Eine einfache Rechenkontrolle für gewisse Fälle der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate und der Ivory'sche Beweis dieser Methode

Gottfried Dimmer [1]

[1] *Inspektor der k. k. Normal-Eichungs-Kommission in Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **15** (6), S. 84–89

1917

BibTEX:

```
@ARTICLE{Dimmer_VGI_191713,
Title = {Eine einfache Rechenkontrolle f{\"u}r gewisse F{\"a}lle der
    Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate und der Ivory
    'sche Beweis dieser Methode},
Author = {Dimmer, Gottfried},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {84--89},
Number = {6},
Year = {1917},
Volume = {15}
}
```

Der Schreiber dieser Zeilen, der zu seinen ehemaligen Hörern zählt, gedenkt mit Vergnügen der schönen Vorlesungen, welche eine erfrischende Abwechslung den Kandidaten des Lehramtes an der Wiener Universität boten.

Bedeutende Männer: Bidschof, Herz, Hillebrand, Oppenheim, Prey, Spitaler usw. sind Schüler des Hofrates Weiß.

Weiß war ein seelensguter, im wahren Sinne des Wortes edler Mensch, der nur seiner Wissenschaft und seiner Familie lebte.

An seiner Bahre trauern seine hochbetagte Gemahlin Adeline, die Tochter des bekannten Botanikers Prof. Fenzl, ein Sohn und mehrere Töchter, von denen eine an den Universitätsprofessor Dr. Hillebrand in Graz verheiratet ist.

Ehre seinem Andenken! *D.*

Eine einfache Rechenkontrolle für gewisse Fälle der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate u. der Ivory'sche Beweis dieser Methode.

Von Dr. **Gottfried Dimmer**, Inspektor der k. k. Normal-Eichungs-Kommission in Wien.

1.

Bei der Durchführung von Ausgleichungsrechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate sind Rechenkontrollen von großer Bedeutung. Als solche sind die Kontrollen der Normalgleichungen durch Summengleichungen und durch Quersummen, die Schlusskontrolle durch doppelte Berechnung der Summe der Fehlerquadrate und die summarische Kontrolle mit Hilfe der Minimumsbedingungen bekannt.*) Für gewisse Fälle läßt sich nun aus den Minimumsbedingungen eine besonders einfache und augenfällige Kontrolle ableiten, die meines Wissens nirgends erwähnt ist. Der Versuch einer geometrischen Darstellung an dem einfachen Beispiele der Geraden in der Ebene führt zu einer Erweiterung des sogenannten Beweises der Methode der kleinsten Quadrate von Ivory,**) gegen den die Kritik***) so scharf Stellung genommen hat.

2

Ist ein auf der m-gliedrigen Funktion †)

$$u = ax + by + cz + \dots\dots\dots \qquad 1)$$

fußendes, für $a, b, c \dots\dots$ lineares Gleichungssystem (Bedingungsgleichungen)

$$u_i = ax_i + by_i + cz_i + \dots\dots\dots \qquad 2)$$

gegeben, bei dem i die Werte $1, 2, 3 \dots\dots n$ annimmt, die Größen u_i einerseits und $x_i, y_i\ z_i \dots\dots$ andererseits durch Beobachtung erhalten sind und die

---

*) Helmert: Die Ausgleichungsrechnung nach der M. d. Kl. Qu., 2. Aufl. 1907, B. G. Teubner, Leipzig, Seite 131.

**) Tillochs Philos. Mag. vol. 65 (1825) u. vol. 68 (1826).

***) Ellis: Cambridge Phil. Trans. VIII.
Glaisher: Mem. of the R. Astron. Soc. XXXIX.

†) Ich halte es weder für notwendig noch für zweckmäßig, die übliche mathematische Bezeichnungsweise zu ändern. Sie bildet nicht nur keine Belastung für den Leser, sondern hebt gerade die Eigenart der Methode, die Bestimmung der Konstanten, hervor.

Größen $a, b, c \ldots\ldots$ (die Konstanten der Funktion) bestimmt werden sollen, so ist das entsprechende System von n Fehlergleichungen dargestellt durch

$$\triangle_i = - u_i + a x_i + b y_i + c z_i + \ldots\ldots \quad 3)$$

Die bekannten Minimumsbedingungen

$$\frac{\partial \Sigma \triangle^2}{\partial a} = \frac{\partial \Sigma \triangle^2}{\partial b} = \frac{\partial \Sigma \triangle^2}{\partial c} = \ldots\ldots = 0 \quad 4)$$

führen zu den Beziehungen

$$\Sigma \triangle x = \Sigma \triangle y = \Sigma \triangle z = \ldots\ldots = 0 \quad 5)$$

und weiterhin zu den m Normalgleichungen, die durch

$$a \Sigma x k + b \Sigma y k + c \Sigma z k + \ldots\ldots = \Sigma k u \quad 6)$$

dargestellt seien, worin k die Werte $x, y, z \ldots\ldots$ annimmt.

Aus ihnen erhält man die gesuchten Konstanten in der Form

$$a = \frac{D_a}{D},\ b = \frac{D_b}{D},\ c = \frac{D_c}{D} \text{ usw.} \quad 7)$$

wenn D die Determinante des Systems und $D_a, D_b, D_c \ldots\ldots$ diejenigen Determinanten bedeuten, die entstehen, wenn jeweils die den Konstanten $a, b, c \ldots\ldots$ entsprechenden Vertikalreihen der Determinante D durch die die rechten Seiten des Systemes 6 umfassende Vertikalreihe der $\Sigma k u$ ersetzt werden.

Sind auf diesem Wege die Werte von $a, b, c \ldots\ldots$ bestimmt und nach Einsetzung dieser Werte in die Fehlergleichungen 3 die Größen $\triangle$ ermittelt, so können die Beziehungen 5 zu einer summarischen Kontrolle dienen. Führt man ein System von Ausdrücken

$$s_i = x_i + y_i + z_i + \ldots\ldots \quad 8)$$

ein, so kann auch die aus 5 folgende Beziehung

$$\Sigma \triangle s = 0 \quad 9)$$

zu einer Kontrolle Verwendung finden.

3.

Hat die Grundfunktion die Form

$$u = a x + b y + c z + \ldots\ldots + p, \quad 1a)$$

ist also ein von den unabhängigen Variablen freies Glied vorhanden, so tritt, entprechend den nunmehrigen Formen der Bedingungsgleichungen

$$u_i = a x_i + b y_i + c x_i + \ldots\ldots + p \quad 2a)$$

und Fehlergleichungen

$$\triangle_i = - u_i + a x_i + b y_i + c z_i + \ldots\ldots + p \quad 3a)$$

zu den Minimumsbedingungen 4 eine weitere

$$\frac{\partial \Sigma \triangle^2}{\partial p} = 0 \quad 4a)$$

hinzu, aus der, da p den Faktor 1 hat, als Ergänzung zu den Beziehungen 5, die Beziehung

$$\Sigma \triangle = 0 \quad 5a)$$

folgt. Die Normalgleichungen erhalten, jetzt in extenso geschrieben, die Form

$$\left.\begin{array}{l} a \Sigma x^2 + b \Sigma y x + c \Sigma z x + \ldots\ldots + p \Sigma x = \Sigma u x \\ a \Sigma x y + b \Sigma y^2 + c \Sigma z y + \ldots\ldots + p \Sigma y = \Sigma u y \\ a \Sigma x z + b \Sigma y z + c \Sigma z^2 + \ldots\ldots + p \Sigma z = \Sigma u z \\ \text{— — — — — — — — — — — — — — — —} \\ a \Sigma x + b \Sigma y + c \Sigma z + \ldots\ldots + p \cdot n = \Sigma u \end{array}\right\} \quad 6a)$$

Die Beziehung 5a besagt, daß für den Fall des Vorhandenseins eines von den unabhängigen Variablen freien Gliedes die Summe der übrigbleibenden Fehler gleich Null ist, die Fehler sich also gegenseitig aufheben. Dies bildet für diese Fälle eine ebenso einfache, wie augenfällige Kontrolle, einfacher noch als die durch die Beziehung 8. Ferner bietet die letzte Gleichung des Systems 6a, die in diesen und nur in diesen Fällen gilt, ebenfalls eine sehr bequeme Rechenkontrolle.

4.

Die Gleichung

$$y = a\,x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

stellt eine durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Gerade in der Ebene dar. Soll diese durch ein auf Beobachtung beruhendes System

$$y_i = a\,x_i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

festgelegt werden, so lauten die Fehlergleichungen

$$\triangle_i = -\,y_i + a\,x_i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

woraus folgt

$$\Sigma\triangle = -\,\Sigma y + a\,\Sigma x \qquad \ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

bezw

$$\Sigma\triangle = -\,\Sigma y + \frac{\Sigma\,x\,y}{\Sigma\,x^2}\,\Sigma\,x, \qquad \ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

wenn man den in diesem Falle sich ergebenden Wert von a einsetzt. Man erkennt aus der rechten Seite der Gleichung 13, daß $\Sigma\triangle$ hier nicht gleich 0 ist.

Eine nicht durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Gerade hat die Gleichung

$$y = a\,x + b \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10a)$$

Aus dem ihr entsprechenden System

$$y_i = a\,x_i + b \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11a)$$

ergeben sich die Fehlergleichungen

$$\triangle_i = -\,y_i + a\,x_i + b \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12a)$$

und aus ihnen

$$\Sigma\triangle = -\,\Sigma y + a\,\Sigma x + n\,.\,b \qquad \ldots\ldots \quad 13a)$$

bezw.

$$\Sigma\triangle = -\,\Sigma y + \frac{n\,.\,\Sigma x y - \Sigma x\,\Sigma y}{n\,.\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} + n\,.\,\frac{\Sigma x^2\,\Sigma y - \Sigma x\,\Sigma x y}{n\,.\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \quad 14a)$$

für die hier gültigen Werte von a und b. Die rechte Seite der Gleichung 13a ist, wie man nach Wegschaffnng der beiden Brüche sofort sieht, tatsächlich gleich Null, die Forderung $\Sigma\triangle = 0$ also hier erfüllt.

Um auch ein Zahlenbeispiel zu geben, seien 4 Messungen an einem Meterstab bei verschiedenen Temperaturen angeführt. Die Ergebnisse sind, wenn t die Temperatur und L_t die zugehörige Länge bezeichnet,

t	L_t	
20°	1000·22	*mm*
40°	1000·65	„
50°	1000·90	„
60°	1001·05	„

Der Einfluß der Temperatur auf die Länge wäre zu ermitteln, d. h. der Temperaturausdehnungskoeffizient α zu bestimmen.

Zunächst werde angenommen, die Länge des Stabes bei 0° (L_0) sei bekannt und betrage genau 1 *m*. Man hat es dann bloß mit den Verlängerungen (l_t) zu tun und die Rechnung beruht auf der Gleichung

$$l_t = L_0 \alpha t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10b)$$

Dementsprechend erhält man das System

$$\left.\begin{array}{l} 0{\cdot}22 = L_0 \alpha \,.\, 20 \\ 0{\cdot}65 = \;\text{,,}\; .\, 40 \\ 0{\cdot}90 = \;\text{,,}\; .\, 50 \\ 1{\cdot}05 = \;\text{,,}\; .\, 60 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11b)$$

Daraus ergibt sich $L_0 \alpha$ zu 0·0171 und somit α zu 0·0000171. Die Fehlergleichungen sind

$$\left.\begin{array}{l} +\,0{\cdot}122 = -\,0{\cdot}22 + 0{\cdot}0171 \,.\, 20 \\ +\,0{\cdot}033 = -\,0{\cdot}65 + \quad\text{,,}\quad .\, 40 \\ -\,0{\cdot}045 = -\,0{\cdot}90 + \quad\text{,,}\quad .\, 50 \\ -\,0{\cdot}024 = -\,1{\cdot}05 + \quad\text{,,}\quad .\, 60 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 12b)$$

und $\Sigma \triangle = 0{\cdot}087$.

Wird die Länge L_0 nicht als bekannt angenommen, sondern soll sie aus den Beobachtungen zugleich mit α ermittelt werden, so lautet die Grundgleichung jetzt

$$L_t = L_0 + L_0 \alpha t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10c)$$

und die Bedingungsgleichungen sind

$$\left.\begin{array}{l} 1000{\cdot}22 = L_0 + L_0 \alpha \,.\, 20 \\ 1000{\cdot}65 = \;\text{,,}\; + \;\text{,,}\; .\, 40 \\ 1000{\cdot}90 = \;\text{,,}\; + \;\text{,,}\; .\, 50 \\ 1001{\cdot}05 = \;\text{,,}\; + \;\text{,,}\; .\, 60 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12c)$$

Man erhält $L_0 = 999{\cdot}804$ und $L_0 \alpha = 0{\cdot}0212$, sonach $\alpha = 0{\cdot}0000212$. Die Fehlergleichungen sind jetzt

$$\left.\begin{array}{l} +\,0{\cdot}008 = -\,1000{\cdot}22 + 999{\cdot}804 + 0{\cdot}0212 \,.\, 20 \\ +\,0{\cdot}002 = -\,1000{\cdot}65 + \quad\text{,,}\quad + \quad\text{,,}\quad .\, 40 \\ -\,0{\cdot}036 = -\,1000{\cdot}90 + \quad\text{,,}\quad + \quad\text{,,}\quad .\, 50 \\ +\,0{\cdot}026 = -\,1001{\cdot}05 + \quad\text{,,}\quad + \quad\text{,,}\quad .\, 60 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 12c)$$

und $\Sigma \triangle = 0$.

Die der Gleichung 6*a* entsprechende Gleichung, die, wie erwähnt, ebenfalls zur Kontrolle dienen kann, lautet im letzteren Falle

$$L_0 \alpha \,.\, \Sigma t + n \,.\, L_0 = \Sigma L t \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6c)$$

bezw. $$0{\cdot}012 \,.\, 170 + 4 \times 999{\cdot}804 = 4002{\cdot}82$$

und ist, wie man nach Auswertung der Produkte sofort sieht, erfüllt.

5.

Ivory hat den Versuch gemacht, ohne Anwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Ueberlegungen, jedoch unter Heranziehung mechanischer Vorstellungen einen Beweis für die Methode der kleinsten Quadrate zu geben. Ausgehend von der Wahrnehmung, daß in dem Ausdruck

$$\triangle = -y + a x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

der Einfluß des $\triangle$ auf das a mit wachsendem x abnimmt und umgekehrt, hat er die durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Gerade als einen um diesen Punkt drehbaren Hebel aufgefaßt, an dem die Fehler als Kräfte wirksam sind.

Die zu ermittelnde Lage der Geraden wird dann übereinstimmen mit der Gleichgewichtslage des Hebels, derjenigen Lage also, bei der keine Drehung, die einzige hier mögliche Bewegung, eintritt. Diese Lage wird dann vorhanden sein, wenn die Momentensumme gleich Null ist, d. h. für

$$\Sigma \triangle x = 0 \quad \text{. . . . . 16)}$$

Dies ist aber dieselbe Bedingung, die die Methode der kleinsten Quadrate stellt.

Die Kritik hat den Beweis Ivorys als einen vagen Analogieschluß bezeichnet, der auf der willkürlichen Annahme beruhe, daß der Einfluß des Fehlers auf die Größe a dem x umgekehrt proportional sei.

Schon hier wäre m. E. zu bemerken, daß die letztere Annahme nicht als so völlig unberechtigt erscheint, wie sie bezeichnet wird, denn betrachtet man — was wohl nicht als unerlaubt gelten kann — die Größe $\frac{\partial a}{\partial \triangle}$ als Maß des Einflusses des Fehlers auf a, so folgt aus 14

$$a = \frac{\triangle - y}{x} \quad \text{. . . . . 17)}$$

und daraus

$$\frac{\partial a}{\partial \triangle} = \frac{1}{x} \quad \text{. . . . . 18)}$$

Vor allem läßt sich jedoch die mechanische Analogie noch wesentlich weiter verfolgen.

Wird die nicht durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Gerade als Angriffsobjekt von Kräften aufgefaßt, so sind bei ihr zwei Bewegungen möglich, eine drehende und eine fortschreitende, und Gleichgewicht wird dann herrschen, wenn keine der beiden Bewegungen eintritt.

Eine Drehung wird dann nicht stattfinden, wenn die Momentensumme inbezug auf den Mittelpunkt dieser Drehung gleich Null ist. Betrachtet man wieder die Fehler $\triangle$ als parallel der y-Achse wirkende Kräfte und bezeichnet die horizontalen Abstände der Angriffspunkte dieser Kräfte von der durch den Drehungspunkt gehenden Vertikalen mit ξ_i; so muß die Beziehung

$$\Sigma \triangle \xi = 0 \quad \text{. . . . . 19)}$$

gelten. Hat der Drehpunkt die Abszisse X, so ist allgemein

$$\xi_i = X - x_i, \quad \text{. . . . . 20)}$$

woraus nach Multiplikation mit $\triangle$ und Summierung folgt

$$\Sigma \triangle \xi = X \Sigma \triangle - \Sigma \triangle x \quad \text{. . . . . 21)}$$

Soll auch keine fortschreitende Bewegung stattfinden, so muß die Resultierende der als parallele Kräfte aufgefaßten Fehler, die gleich ihrer Summe ist, gleich Null sein, also

$$\Sigma \triangle = 0, \quad \text{. . . . . 22)}$$

die oben besprochene Kontrollgleichung. Aus 19, 21 und 22 folgt

$$\Sigma \triangle x = 0 \quad \text{. . . . . 23)}$$

22 und 23 stellen die von der Methode der kleinsten Quadrate gestellten Bedingungen für die Gleichung

$$y = a x + b \quad \text{. . . . . 24)}$$

dar. Aus ihnen folgt

$$\left.\begin{aligned} a \Sigma x^2 + b \Sigma x &= \Sigma x y \\ a \Sigma x + b \, . \, n &= \Sigma y \end{aligned}\right\}, \quad \text{. . . . . 25)}$$

die zu 22 gehörigen Normalgleichungen, die zu den in 13*a* enthaltenen Werten von *a* und *b* führen.

Es hat den Anschein, als ob dem Ivory'schen Gedankengang vielleicht doch mehr Inhalt zukommt, als die Kritik ihm zugesteht.

6.

Der Beziehung

$$\Sigma \triangle = 0$$

die hier nur als Rechenkontrolle für gewisse Fälle gewertet wird, wurde früher eine weit größere Bedeutung zugeschrieben. Laplace*) hat vor Einführung der Methode der kleinsten Quadrate gelegentlich einer bestimmten Aufgabe ein Rechenprinzip aufgestellt (ohne Begründung), das auf den beiden Forderungen beruhte, daß einerseits die Summe der Fehler gleich Null und andererseits die Summe der Absolutwerte der Fehler ein Minimum sei. Er ist in seinem speziellen Falle zu einem Ergebnis gelangt und hat dieses als das „wahrscheinlichste" bezeichnet. Estienne**) ist bei Aufstellung seiner Regel zur Bestimmung des wahrscheinlichsten Wertes einer direkt beobachteten Größe auf dieses Prinzip, das er die Methode der kleinsten arithmetischen Summe nennt, zurückgekommen. Ferner hat Lamont***) den Umstand, daß $\Sigma \triangle$ nicht notwendig gleich Null wird, als einen Mangel der Methode der kleinsten Quadrate bezeichnet.

Tatsache ist, daß die Bedingung $\Sigma \triangle = 0$ als Prinzip einer Ausgleichungsmethode nicht hinreicht, und überdies gibt die Methode der kleinsten Quadrate in jedem Falle die größten Gewichte.

Über eine Lösung des Rückwärtseinschneidens.

Von **Dr. techn. Erich Liebitzky**, k. k. Bauadjunkt in Prag.

(Fortsetzung und Schluß.)

Sind in Figur 3 A, B, C die drei gegebenen Punkte und zieht man durch A eine Parallele $\overline{A3}$ zu $\overline{CB}$ und durch C eine Parallele $\overline{C2'}$ zu $\overline{BA}$, so hat man, um den Punkt S der «mittleren Visur» zu erhalten, einfach durch C einen Strahl unter dem Winkel β gegen $C2'$ und durch dessen Schnittpunkt S_0 mit $\overline{AB}$ einen zweiten Strahl unter dem Winkel α gegen $\overline{AB}$ zu ziehen, welcher im Schnitte S mit $\overline{A3}$ den gesuchten Punkt der «mittleren Visur» CS ergibt. Zieht man durch A bezw. B je einen Strahl unter dem Winkel α bezw. β gegen die mittlere Visur, so müssen sich beide auf $\overline{CS}$ in dem Punkte P schneiden, der zu bestimmen war.

Die eben entwickelte Konstruktion hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der bekannten Methode von Collins. Nach dieser ergibt sich der «Collins'sche Hilfspunkt» Z als Schnitt zweier Strahlen, welche durch A und B unter dem Winkel β bezw. α gegen $\overline{AB}$ gezogen werden. An die Stelle des «Collins'schen Hilfspunktes»

*) Mécanique céleste, II, art. 39—42.

**) Étude sur les erreurs d'observ., p. 9 und 23 ff (C. R. CX, p. 512).

***) Meteorolog. Wochenbericht Nr. 203—210, 1869