Beiträge zur Praxis der Bestimmung der Konstanten entfernungsmessender Fernrohre

Ernst Hammer [1]

[1] *Stuttgart*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **15** (11–12), S. 177–198

1917

Generalstabes dem k. u. k. Militärgeographischen Institute in Wien von 1901—1904 bzw. von 1911 bis zum Ausbruche des Krieges zugeteilt, hat Korzer, der als Leiter einer Mappierungs-Abteilung und später als Leiter der Mappierungs-Gruppe wirkte, in den Mitteilungen des k. u. k. Militärgeographischen Institutes in Wien die drei Abhandlungen veröffentlicht:

1. «Geographische Literatur und ziviltechnische Vermessungen im Dienste der Landesaufnahme» im XXIII. Bande 1903,
2. «Altes und Neues von der Landesaufnahme» im XXXII. Bande 1912 und
3. «Die Stereoautogrammetrie im Dienste der Landesaufnahme» im XXXIII. Bande 1913,

in welchen er sich als genauer Kenner des militärischen Vermessungswesens zeigte, die Bedeutung der zivilgeodätischen Arbeiten richtig einschätzte, an ihre sinngemäße Verwertung bedacht war und das vorteilhafte Zusammenwirken beider klar erfaßte.

Wenn nun Korzer, der an wichtigen und verantwortungsvollen Stellungen als Brigadier in den Karpathen und jetzt an der italienischen Front tätig ist, seine freie Zeit und Muße dem Studium des staatlichen Vermessungswesens widmete und nun mit Überzeugung für die Organisation des Vermessungswesens eintritt, so können wir ihm dafür nur dankbar sein. Es drückt sich darin nicht nur eine ganz besondere Liebe zum geodätischen Fache aus, die umso wertvoller ist, als sie mit reicher Erfahrung und scharfem, kritischem Blicke gepaart ist, sondern es ist auch das redliche Streben zu erkennen, mit Bausteine liefern zu wollen zu einem stolzen Aufbaue des staatlichen Vermessungswesens in einem verjüngten Österreich.

Wir möchten wünschen, daß die anregenden Ausführungen dieser Denkschrift maßgebenden Ortes die gebührende Beachtung finden, damit recht bald in strahlendem Glanze der Friedenssonne die Reorganisation des gesamten staatlichen Vermessungswesens zur Tat werde. — Das wäre das schönste Geschenk, welches dem nunmehr in das zweite Säkulum eintretenden österreichischen Kataster gemacht werden könnte! — Das walte Gott!

Doležal.

Beiträge zur Praxis der Bestimmung der Konstanten entfernungsmessender Fernrohre.

Von **E. Hammer.**

1. Bei Bestimmung der Grundwerte c und k eines entfernungsmessenden Fernrohrs (wir betrachten nur Fadendistanzmesser mit festen Fäden) für die Entfernungsgleichung bei wagrechter Ziellinie

$$E = c + k \cdot l, \tag{1}$$

in der l den Lattenabschnitt zwischen den zwei «Distanzfäden» und E die Entfernung von der Kippachse des Fernrohrs bis zu der vertikal stehenden «Distanzlatte» bedeutet, wird bekanntlich in der Regel und zweckmäßig so verfahren, daß man zunächst c für sich unmittelbar mißt, was bei Fernrohren sowohl mit positivem wie mit negativem Okular im allgemeinen leicht auf $^1/_2$ *cm* genau, d. h. bei den in (1) auftretenden Fehlern selbst für T I (Präzisionstachymetrie) vergleichsweise fehlerfrei geschehen kann; erst dann wird k allein ermittelt auf Grund einiger sorgfältig («fehlerfrei») abgemessener horizontaler Versuchsstrecken.

Die geometrische Bedeutung der Additionskonstanten (oder s. g. kleinen Konstanten) c ist wie bekannt:

I. bei Fernrohren mit «positivem» oder «Mikrometer»-Okular (keine Linse im Fernrohr zwischen Objektiv und Fadenebene vorhanden; Ramsden'sches, orthoskopisches oder Kellner'sches Okular, Euryskop-Okular u. s. f.) der Abstand zwischen dem vordern Brennpunkt des Objektivs und der Kippachse des Fernrohrs;

II. bei Fernrohren mit «negativem» Okular (die im Okularauszug sitzende «Kollektiv»-Linse, die aber ihren Abstand von der festen «eigentlichen» Objektivlinse mit jeder neuen Einstellung des Fernrohrs, Verkürzung des Fernrohrs für große E, Verlängerung für kleine E, verändert, ist ein Teil des Objektivsystems, Huygens) ebenfalls der Abstand zwischen dem vordern Brennpunkt der «eigentlichen» Objektivlinse (Objektivlinse für sich allein, ohne Rücksicht auf das Kollektiv) und der Kippachse des Fernrohrs*).

Bei den zwei genannten Fernrohreinrichtungen kann man demnach, wie eingangs angegeben, sofort c mit für jeden Fall hinreichender Genauigkeit bestimmen, sobald die Brennweite des Objektivs (bei Huygens der Objektivlinse im engern Sinn ohne Rücksicht auf das Kollektiv) genügend gemessen werden kann. In beiden Fällen reicht es hin, die Objektivlinse aus dem Objektivrohr herauszuschrauben und im Sonnenschein als Brennglas zu benützen, um F genügend zu erhalten. Ist die Sonne nicht zu haben und will man sich nicht der Grundformel der Konvexlinse mit endlichem a bedienen, so hat man bei Fernrohren I. positive Okulare, immer noch das sogar bequemere Mittel, im Fernrohr das Bild eines Punktes in mehreren hundert *m* oder größerer Entfernung deutlich zu machen, um im Abstand zwischen Objektivlinse und Fadenebene die Objektivbrennweite genügend zu erhalten; es ist dabei nur (was meist übersehen wird, aber freilich meist nur einen Fehler von einigen *mm*, in jedem

*) Hierüber herrscht in der Lehrbuch-Literatur der Niedern Geodäsie auch heute noch vielfach Unklarheit; vergleiche z. B. das Lehrbuch der Vermessungskunde von Weitbrecht, II. Band, Vertikalmessungen, Stuttgart 1911, Seite 190: die Angabe, es sei in $c = m + f$ als Wert von f die Brennweite «der (nur gedachten) Ersatzlinse einzuführen» (die ja bei den Veränderungen des Abstands zwischen eigentlichem Objektiv und Kollektiv gar keine «Konstante» ist), ist nicht zutreffend und diese unrichtige Angabe um so auffallender, als der Verfasser einige Seiten vorher (Seite 187) nach Jordan den Wert $c = m + f$ findet, in dem f die Brennweite der Objektivlinse allein, nicht des Objektivsystems bedeutet; es ist demnach die einfache Bedeutung der eigenen (Jordan'schen) Entwicklung verkannt. Der weitere Fehler der Angabe des Verfassers, Seite 188, daß sich bei »Huyghens» mit der Veränderung des Abstandes zwischen Kollektiv und Fadenebene nicht nur, wie selbstverständlich k_2, sondern auch c_3 verändere, ist hiernach nicht verständlich, kommt übrigens für uns hier jetzt nicht in Betracht.

Fall vernachlässigbar in c, bringen kann) zu beachten, daß der Ort der Fadenebene im Okular nicht genau die Stelle ist, an der die Richtschrauben des Fadenkreuzes hervorstehen. Dieses zweite Mittel zur Messung von F (für die Ablesung von c) versagt allerdings bei Huygens; aber nur in diesem Fall der Unmöglichkeit der Brennglas-Bestimmung des F der «eigentlichen» Objektivlinse, und keineswegs allgemein, kann man sagen, es sei bei Huygens «besser», «beide Konstanten gleichzeitig festzustellen», statt wie es sich bei Ramsden empfehle, «zuerst die Additionskonstante c direkt und dann die Multiplikationskonstante k . . . zu bestimmen». Immerhin ist also in der Tat schon bei Huygens gelegentlich die gleichzeitige Ermittlung der Additions- und der Hauptkonstanten, c und k vorzunehmen. Sie ist auch unentbehrlich z. B. bei der Untersuchung des

III. Porro'schen Fernrohrs auf die Anforderung, ob bei ihm wirklich, wie beabsichtigt, praktisch genau $c = 0$ ist. Während bei den meist gebräuchlichen Fernrohrkonstruktionen I. und II. (von denen II. für entfernungsmessende Fernrohre, wie auch für andere Zwecke, gegen I. immer mehr zurückgetreten ist), der sogenannte anallaktische Punkt der optischen Achse des Fernrohrs, von dem aus gerechnet bei wagrechter Zielung die Entfernungen bis zur Latte genau proportional sind den Lattenabschnitten zwischen den Distanzfäden, je im vordern Brennpunkt der Objektivlinse (bei Huygens der «eigentlichen» Objektivlinse für sich allein) liegt, hat bekanntlich Porro ein Fernrohr angegeben, das ermöglicht, $c = 0$ zu machen, den anallaktischen Punkt in die Kippachse zu legen. Es beruht auf der Anwendung eines Kollektivs, das nicht wie bei Huygens im Okularrohr sitzt und sich also gegen die Objektivlinse bei der Latteneinstellung verschiebt, sondern fest im Objektivrohr, im konstanten Abstand q vom Objektiv i. e. S. angebracht ist; das Objektivsystem ist hier als durch die Aequivalentlinse mit $f = \frac{F \cdot F'}{F + F' - q}$ Brennweite ersetzbar anzusehen, wenn F und F' die Brennweiten des Objektivs i. e. S. und des Kollektivs bezeichnen.

IV. Endlich kommt gemeinschaftliche Untersuchung des Verhaltens von c und k bei verschiedenen E auch in Betracht bei dem neuerdings eingeführten Wild (Zeiß)'schen Fernrohr mit konkaver Schaltlinse, das einen anallaktischen Punkt im Sinn von I. bis III. nicht hat und dessen Anwendung als entfernungsmessendes Fernrohr schon zahlreiche Erörterungen hervorgerufen hat (Wild, Klingatsch, Bäschlin, Eggert). Wir beschäftigen uns im Schlußabschnitt mit diesem Fernrohr.

Was die Zahlenwerte von c und k angeht, so ist die Additionskonstante c, von Porro mit $c = 0$ abgesehen, selbstverständlich immer eine nicht runde Zahl, übrigens stets nur wenige dm groß, und wie schon angegeben, bei Fernrohren I. und II. aufs einfachste am Instrument unmittelbar abzumessen. Die Bequemlichkeit, bei Porro $c = 0$ zu haben, hat nicht für die ganze Tachymetrie den großen Wert, der ihr besonders früher zugeschrieben wurde, zumal es nur in wenigen Fällen gelingt, k gleich dem beabsichtigten runden Wert, z. B. 100, mit genügender Schärfe zu machen; in manchen Fällen ist sie jedoch willkommen.

Der Wert der «Hauptkonstanten» k bedeutet bei I. bis III.:

$$k = \frac{f}{a} \quad \text{bei I.,}$$

(2) $$k = \frac{f}{a} \cdot \left(1 - \frac{b}{f'}\right) \quad \text{bei II.,}$$

$$k = \frac{f}{a} \quad \text{bei III.,}$$

wo in jedem Fall a der Abstand der zwei Distanzfäden im Okular ist, f bei I. die Brennweite des Objektivs, in II. f die Brennweite des «eigentlichen» Objektivs i. e. S., f' die des Kollektivs und b dessen konstanten Abstand von der Fadenebene, endlich in III. $f = \frac{F \cdot F'}{F + F' - q}$ die Aequivalentbrennweite des Objektivsystems F, F', q bedeutet. Ueber die Veränderlichkeit von k mit E bei IV. vergl. unten in 8. Man sucht bei I. bis III. meist k gleich einer runden Zahl zu machen: 200 oder 100 bei der topographischen Tachymetrie, zu T II gehörig; 100 bis 50 bei der feinern Tachymetrie T I, zu der unter anderen meist auch die markscheiderischen Tachymetermessungen mit ihren 2 *mm*-Milchglasskalen als «Latten» u. dgl. gehören. Die Zahl 100 für k ist im ganzen die wichtigste: E im wesentlichen (nämlich von c abgesehen), so viel *m* groß, als l *cm* enthält. Eine nicht runde Zahl für k hat jedoch kaum eine Unbequemlichkeit, wenn man nur beim praktischen Gebrauch des entfernungsmessenden Fernrohrs E, statt es im Kopf zu rechnen, einer mit Hilfe der Addiermaschine so bequem zu berechnenden Tabelle mit l als Argument (auch für T I genügt vollständig das Intervall 1 *cm*), entnimmt, oder im Falle der Messtisch-T II an einem mit Rücksicht auf den Wert von k und auf den Maßstab 1 : M der Aufnahme zu zeichnenden Maßstab als Zirkelöffnung herstellt.

2. Setzen wir nun also zunächst voraus, daß für das zu untersuchende Fernrohr c unmittelbar abgemessen werden konnte (und als vergleichsweise fehlerfrei bekannt anzusehen ist). Eine einzige fehlerfrei gemessene horizontale Probestrecke E würde dann gemäß (1) den Wert der Hauptkonstanten k fehlerfrei liefern, wenn das zugehörige Lattenstück l ohne Fehler beobachtet werden könnte. Da dies nicht der Fall ist, nimmt man mehrere, mit Latten von genau bekannter Korrektion mehrfach und sorgfältig auf annähernd wagrechter Meßbahn abgemessene Probestrecken zu Hilfe und beobachtet auch mehrfach die bei Aufstellung der «Distanzlatte» in den Endpunkten dieser Strecken zwischen den Distanzfäden erscheinenden l. Wenn die Aufgabe oft wiederkehrt, wird man sich die Endpunkte solcher Versuchsstrecken, damit sie jederzeit zur Verfügung stehen, versichern. Da kleine Neigungen der Zielrichtung (über den mittlern Horizontalfaden), z. B. bis zu 1° nach oben oder unten von der Horizontalen, auf l auch bei schärfster Ablesung ohne merklichen Einfluß sind, ist es üblich geworden, den «untern» Faden (den mit der kleinern Ablesung; in Wirklichkeit ist es der «obere» Faden, was aber natürlich hier ganz gleichgültig ist) scharf auf einen Strich der Lattenskale zu stellen und nur am andern, s. g. «obern» Faden (in Wirklichkeit dem untern) so scharf als möglich abzulesen: die Einstellung des Fadens kann ziemlich viel schärfer gemacht werden als eine mit Schätzung verbundene Ablesung. Wenn, wie gewöhnlich, die 1 *cm*-Latte zu der Bestimmung von k verwendet wird, so ist die Einheit, bis zu der durch Schätzung am Faden abgelesen werden kann, das *mm*; auch bei kleinen Zielweiten kann die Ablesung nicht schärfer oder höchstens auf $^1/_2$ *mm* gemacht werden; bei größern Zielweiten und etwa 25 facher Vergrößerung des Fernrohres geht diese *mm*-Schätzung etwa bis 200 *m* an. Die Tatsache, daß die Einstellung eines Fadens auf einen Strich der Lattenskale und noch mehr auf die Mitte eines weißen 1 *cm*-Lattenfeldes schärfer zu machen ist als die 1 *mm*-Ablesung an der 1 *cm*-Lattenskale, kann, worauf schon mehrfach aufmerksam gemacht worden ist, zur Verschärfung der Bestimmung von k in der Art dienen, daß man die Distanzlatte nicht unveränderlich in den Endpunkten der runden abgemessenen Probestrecken aufstellt, sondern sie in der Nähe dieser Endpunkte so lange verschiebt, auf bestimmte verabredete Zeichen vom Instrument weg oder zu ihm hin, bis beide Distanzfäden scharf mit runden Strichen der Lattenskale oder scharf mit den Mitten je eines weißen kleinsten Feldes der Lattenskale übereinstimmen; in letzter Zeit hat besonders Egerer wieder hierauf hingewiesen, vergl. «Zeitschr. f. Vermess.» **42**, S. 745, 1913, und mein Ref. in der «Zeitschr. f. Instrum.-Kunde» **34**, S. 257, 1914. Auch andere Vorschriften wären zu erwähnen, z. B. absichtlich nicht runde Probestrecken, damit man unbefangener abliest, bei der Rechnung besondere Auswahl der Ablesungen u. s. f.; doch wollen wir uns auf solche Einzelheiten nicht einlassen.

Bleiben wir vielmehr bei dem gewöhnlichen Verfahren der Praxis, das auch für T I genügt: runde Probestrecken, Einstellung des einen Fadens bei der nahe horizontalen Zielung scharf auf Lattenstrich an der 1 *cm*-Lattenskale, Ablesung am andern Faden auf 1 *mm*. Es ist naheliegend und üblich geworden, die runden Probestrecken zur Ermittlung von k nicht von der Kippachse des Fernrohrs aus abzumessen, sondern von dem anallaktischen Punkt der optischen Achse aus (vorderer Brennpunkt des Objektivs bei I., des Obj. im engern Sinn bei II.). Man erhält damit bei n Probestrecken zur Ermittlung von k ein System von Verbesserungsgleichungen von der Form:

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} E_1 - c = k \cdot l_1 + v_1 \\ E_2 - c = k \cdot l_2 + v_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ E_n - c = k \cdot l_n + v_n ; \end{array}\right.$$

die $(E - c)$ sind die runden Versuchsstrecken, die l die zugehörigen beobachteten Lattenabschnitte. Die linken Seiten dieser Gleichungen sind als fehlerfrei anzusehen, die eine zu bestimmende Unbekannte k kommt auf der rechten Seite mit dem nicht fehlerfrei bekannten, nämlich an der Latte beobachteten l multipliziert vor. Solche Ausgleichungsaufgaben sind neuerdings vielfach schärfer behandelt worden, es sei nur auf die Aufsätze von Doležal in seiner Arbeit über das Pantograph-Planimeter (Sitz.-Ber. Akad. Wien, II a, **124**, 1915; Ref. in der Zeitschr. für Instrum.-Kunde **37**, S. 78, 1917) und an die eingehende Abhandlung von R. Schumann: Bestimmung einer Geraden durch Ausgleichung der beobachteten Koordinaten ihrer Punkte (Sitz.-Ber. Ak. Wien, IIa, **125**, 10. Heft, 1916) verwiesen. Es genügt jedoch für unsere Aufgabe so ziemlich das üblich gewordene Verfahren, aus jeder einzelnen der Gleichungen (3) mit vorläufiger Vernachlässigung des v, den Wert von k, oder bequemer (weil mit den runden Zahlen $(E-c)$ bequemer zu dividieren ist) zunächst $\frac{1}{k}$ zu bestimmen und aus diesen als gleichwertig anzusehenden Einzelwerten $\frac{1}{k}$ das einfache Mittel zu nehmen, um das endgültige $\frac{1}{k}$ und damit k zu erhalten, nebst bequem anzuschließender m. F.-Berechnung. Unter einer Bedingung genügt dieses Verfahren, die leicht einzusehen ist. Die einfache Mittelbildung aus den Einzelwerten für $\frac{1}{k}$ nach (4), die also diese Einzelwerte als gleichwertig voraussetzt,

$$(4)\qquad \begin{cases} \left(\frac{1}{k}\right)_1 = \frac{l_1}{E_1 - c} \\ \left(\frac{1}{k}\right)_2 = \frac{l_2}{E_2 - c} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \left(\frac{1}{k}\right)_n = \frac{l_n}{E_n - c} \end{cases}$$

nimmt nämlich an, daß die den l anhaftenden mittlern Beobachtungsfehler den Entfernungen $(E-c)$ proportional seien. Daß der Fehler der beobachteten l mit der Zielweite wächst ist ja sicher; weniger sicher ist aber die eben ausgesprochene nach Jordan üblich gewordene Annahme. Diese ist nur dann genügend zulässig, wenn man das Verhältnis des größten zum kleinsten der Versuchs-$(E-c)$ nicht zu groß nimmt; oder mit andern Worten, da man einige große $(E-c)$ jedenfalls braucht, wenn man kleine $(E-c)$ ausschließt. Es wird doch in der Tat niemand annehmen wollen, daß der (selbstverständlich mit demselben Fernrohr) auf $E-c = 10\,m$ beobachtete Lattenabschnitt einen zehnmal geringern Fehler habe als der auf $E-c = 100\,m$ beobachtete, wenn in beiden Fällen an der 1 *cm*-Latte durch Schätzung bis auf 1 *mm* abgelesen ist und nicht etwa, nach dem Vorgang von Eggert (vergl. Jordan-Eggert, Handbuch der Vermess., II. Band, 8. Aufl. 1914, S. 762) bei dem genannten kleinen Abstand ein 1 *mm*-Maßstab auf der Latte benützt und l auf $^1/_{10}\,mm$ abgelesen worden ist, vergl. unten in 3. Ist denn aber in der Tat solchen kleinen $(E-c)$, nachdem an dem Fernrohr c unmittelbar abgemessen ist, zur Ermittlung von k irgendwelche Bedeutung beizumessen? Antwort offenbar: nein; und damit ist als Regel festzuhalten: man kann, wenn c unmittelbar abgemessen ist, zur Bestimmung von k mit Hilfe der üblichen 1 *cm*-Latte aus Probestrecken solche von etwa 250 oder 200 *m* (bei Vergrößerg. 25; bei Vergröß. 15 nur 100 *m*) herunter bis zu etwa 50 *m* verwenden, soll aber kleine $(E-c)$ unbedingt ausschließen; es ist ganz sinnlos, unter diesen Umständen etwa bis zu 10 *m* in $(E-c)$ herabzugehen, der zu ermittelnde Wert von k kann durch solche kleine Abstände nur verdorben werden. Die flüchtigste

Ueberlegung muß diese wichtige Regel eigentlich als selbstverständlich zeigen. Wie wenig sie befolgt wird, dafür nur ein Beispiel: in dem schon oben angeführten Buch von Weitbrecht, II. Band, Seite 191, sind zur Bestimmung von k eines Fernrohrs, dessen c unmittelbar zu 0·35 m abgemessen ist, folgende zusammengehörige $(E—c)$ vom «analIatischen Punkt» aus (wie es nach der frühern Uebernahme des griechischen Wortes aus den romanischen Sprachen noch heißt) [a. a. O. $(D—c)$] und beobachtete l (an einer 1 cm-Latte, a. a. O. L) angegeben, wobei die $(E—c)$ bis zu 10 m (!) heruntergehen:

(5)

$E-c$	l	$\frac{1}{k}=\frac{l}{E-c}$ *)
10	0,096	0,00960
20	0,193	965
40	0,385	962_5
60	0,579	965
80	0,767	959
100	0,963	963
120	1,157	964
150	1,447	965

Es wird daraus $\frac{1}{k}$ als einfaches Mittel der Einzelwerte gebildet,

$$\frac{1}{k} = 0{,}00963$$ und damit also

$$k = 103{,}8$$ gefunden.**)

---

*) A. a. O. ist $\frac{L}{D-c_1}$ statt $\frac{1}{-c_1 D}$ zu lesen.

**) Daß man bei dieser Durchschnittsbildung, wie stets beim Mittel aus wenig voneinander abweichenden mehrstelligen Zahlen, nicht die ganzen zu mittelnden Zahlen addieren wird, sondern, indem man in Einheiten einer bestimmten Dezimalstelle rechnet, nur die untereinander verschiedenen Ziffern, sei nur nebenbei als ebenfalls zur Praxis der Ausgleichung gehörig angedeutet. A. a. O. ist $\left[\frac{1}{k}\right] = 0{,}07703_5$ tatsächlich gebildet, um das Ergebnis dieser Addition dann durch die Division mit 8 wieder zu vernichten und die in allen Einzelzahlen gleich lautenden Ziffern 0,0096 wieder herzustellen; $\left[\frac{1}{k}\right] = 0{,}07703_5$ durch 8 gibt 0,00963 als Resultat für $\frac{1}{k}$. Statt dessen, von 0,00960 aus im Kopf in Einb.$_5$ gerechnet, wird $\frac{1}{k}$ größer als 0,00960 um $\frac{0+5+2_5+5-1+3+4+5}{8} = 3$ Einh.$_5$, also $\frac{1}{k} = 0{,}00963$, mit der ebenfalls im Kopf zu rechnenden Probe: [pos. v] $= +7·5$, [neg. v] $= -7$. Auch die sich zweckmäßig anschließende Berechnung des m. F. des Ergebnisses aus der innern Uebereinstimmung wird am einfachsten in Einh. einer bestimmten Dezimalstelle gemacht. Nach Anblick der Zählerzahlen bei der zuletzt angegebenen Rechnung für das endgültige $\frac{1}{k}$ liegt der m. F. eines der Einzelwerte von $\frac{1}{k}$ zwischen 2 und 3 Einh.$_5$; man findet in der Tat den m. F. eines der $\frac{1}{k}$ gleich $\pm 2{,}3$ Einh.$_5$, also den mittlern Fehler des entgültigen Werts $\sqrt{8}$mal kleiner oder gleich $\pm 0{,}82$ Einh.$_5$, damit $k = 103{,}8 \pm 0{,}1$ (nach $m_{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}.m_x$; oder nach vorheriger Logarithmierung, wobei der m. F. von $\log\frac{1}{x}$ derselbe ist wie der von $\log x$). Etwas schärfer wird, immer zufällig auch mit Beibehaltung der zwei ersten Beobachtungen, $k = 103{,}85 \pm 0{,}09$.

Daß die Weglassung der zwei ersten Beobachtungen an diesem Ergebnis nichts ändern würde, beweist natürlich nichts gegen die methodische Unrichtigkeit des Verfahrens; es sei wiederholt, daß Werte von $(E-c) < 40\,m$ bei dieser Art der Bestimmung von k allein (Ablesung der l an einer 1 *cm*-Latte) jedenfalls ausgeschlossen werden sollten.

Man kommt durch dieses einfache und im allgemeinen stets zu empfehlende Verfahren der Trennung der unmittelbaren Abmessung von c und der Bestimmung von k allein mit Hilfe von einigen Probestrecken, (bis zu 100 oder bis zu 250 *m* je nach der Vergrößerung des Fernrohrs; Ausschließung kleiner Probestrecken) bei Ablesung von l an einer 1 *cm*-Latte (Einstellung des einen Fadens, Ablesung am andern auf 1 *mm*) bei k etwa $= 100$ leicht auf den m. F. von etwa $\pm 0{,}1$ und selbst $\pm 0{,}05$ oder $\pm 0{,}04$ [dies jedoch nur bei mehrmaliger Ablesung des l im Hin- und Hergang der Latte über etwa 5 verschiedene $(E-c)$]. Nach dem Egerer'schen Verfahren ist der m. F. von k schon aus ganz wenigen Messungen auf $\pm 0{,}1$, mit einer nicht großen Zahl von Messungen auf $\pm 0{,}02$ herabzubringen. Feinere Bestimmung von k als auf etwa $\pm 0{,}05$ ist übrigens auch für *T* I fast nie notwendig, während für *T* II eine wesentlich geringere Schärfe genügt.

3. Gehen wir nun aber über zur gleichzeitigen Bestimmung der Konstanten c und k eines Fernrohrs, z. B. notwendig, weil für dieses Fernrohr II. (Huygens) zur Zeit der Untersuchung das «eigentliche» Objektiv i. e. S. nicht als Brennglas gebraucht werden konnte, oder weil für ein Porro'sches Fernrohr III. die Genauigkeit der «Anallaktisierung» geprüft werden soll.

Eine sehr einfache Ueberlegung zeigt, daß für diesen Fall, wenn man sich mit einfacher Bestimmung von c und k ohne überschüssige Beobachtungen begnügen will, ein auf kleine Entfernung E_1 der Latte von der Kippachse des Fernrohrs beobachtetes l_1 kombiniert werden muß mit einem auf große Entfernung E_2 abgelesenen l_2. Hierher gehörige Betrachtungen finden sich in den elementarsten, wie in tiefer dringenden Lehrbüchern (es sei, um von beiden Arten nur je eines zu nennen, verwiesen auf Schewior, Feldmessen II. Teil, Leipzig 1917, S. 136, Ref. in der Zeitschr. f. Instrum.-Kunde, Bd. **37,** 1917, S. 239, und auf Jordan-Eggert, a. a. O., II. Band, S. 761 bis 762). Schon hieraus ist klar, daß man, wenn zur Kontrolle und besonders zur m. F.-Berechnung für die erhaltenen Konstantenwerte mehr als zwei gemessene E und dazu beobachtete l angewendet werden sollen, diese E auf möglichst verschiedene Werte, von Lattenaufstellung dicht beim Fernrohr bis zu Entfernungen von 150 oder 250 *m* je nach der Vergrößerung des Fernrohrs gleichmäßig zu erstrecken hat: die kleinen E und l tragen vor allem bei zur genügenden Ermittlung von c, die großen E und l verbürgen genügend scharfe Bestimmung von k. Man kann hier auch daran denken, die Genauigkeit, mit der die l beobachtet werden können, in der Art von E abhängig zu machen, daß man z. B. bei 25-fach vergrößerndem Fernrohr von $E = 250$ bis zu $E = 100$ oder 80 *m* an einer 1 *cm*-Latte auf 1 *mm*, von $E = 80$ bis 30 *m* an einer $^1/_2$ *cm* oder 4 *mm*-Latte auf 0,5 oder 0,4 *mm*, von $E = 30$ bis 5 *m* an einer 2 *mm*- oder 1 *mm*-Skale auf 0,2 oder 0,1 *mm* abliest (wie schon oben erwähnt, hat

z. B. Eggert auf ganz kurze Entfernungen solche l-Ablesung auf 0,1 mm an einem Millimeter-Maßstäbchen angewendet); indessen wird sich die gewöhnliche Praxis des Ingenieurs und Landmessers hierauf nie einlassen können und wollen, sondern die Ablesung der l auf 1 *mm* an der 1 *cm*-Latte auf alle Probeentfernungen, auch die kleinen, als Regel festhalten. Man sollte dann aber allerdings auch nicht dem naivsten Leser zumuten (wie es z. B. Weitbrecht a. a. O. S. 191/192 tut) ohne jede Erläuterung die sich ergebenden Verbesserungsgleichungen als gleichwertig anzusehen, d. h. sie alle mit dem Gewicht 1 einzuführen!

Werfen wir zunächst einen Blick auf die «Ablesungsgenauigkeit» an der Lattenskale. Trotz vieler Arbeiten darüber sind wir weit davon entfernt, einen hier allgemein anerkannten oder brauchbaren Ausdruck dafür angeben zu können, um so weniger als hier das Individuum wohl eine wichtigere Rolle spielt als oft angenommen wird, vergl. z. B. mein Referat über eine Arbeit von Hohenner, «Ueber das Zielen mit dem Zielfernrohre und die Abschätzung der Lage des Zielfadens auf Teilungen», Zeitschrift für Vermessungswesen **44**, S. 357, 1915 (die sich mit der Genauigkeit der Einstellung eines Fadens auf die Mitte eines weißen kleinsten Lattenfeldes und mit der Abschätzungsgenauigkeit beim Ablesen im gewöhlichen Sinn beschäftigt) in der Zeitschr. f. Instrum.-Kunde **36**, S. 212, 1916. Es mag dabei nur von der Ablesungsgenauigkeit im Sinn der gewöhnlichen Praxis, nicht auch von der Einstellungsgenauigkeit auf Feldmitte die Rede sein (vergl. oben in **2.**) Aus den Versuchen von Kummer und Reinhertz hat Eggert für den m. F. λ der Ablesung an einem Faden den Ausdruck abgeleitet:

(6) $\lambda_{mm} = 0{,}0292 \cdot t_{mm} + 0{,}13 \cdot \frac{Z_m}{v}$, worin λ den mittleren Ablesefehler in *mm*, t_{mm} die Teilungseinheit (kleinster Lattenskalenteil) in *mm*, Z_m die Zielweite in *m*, und v die Fernrohrvergrößerung bedeutet. Nach Hohenner sollen dieselben Versuche besser als durch (6) durch den Ausdruck

(7) $\lambda_{mm} = 0{,}20 + 0{,}019 . t_{mm} \frac{Z_m}{v}$ dargestellt werden. Für $v = 25$ und die in den vorliegenden Zeilen stets festgehaltene 1 *cm*-Latte mit $t = 10\,mm$ beispielsweise sind also nach (6) und (7)

(6') $\lambda_{mm} = 0{,}292 + 0{,}0052 \; Z_m$ oder

(7') $\lambda_{mm} = 0{,}20 + 0{,}0076 \; Z_m$;

für Zielweiten von $Z = 10\,m$ bis $Z = 140\,m$ erhält man hieraus unter den angegebenen Umständen:

$Z\,(m) =$	10	20	40	60	80	100	120	140	
(6')	0,34	0,40	0,50	0,60	0,71	0,81	0,92	1,02	*mm.*
(7')	0,28	0,35	0,50	0,66	0,81	0,96	1,11	1,26	

Die auf dasselbe Material gegründeten Zahlen nach (6) und (7) weichen also ziemlich stark voneinander ab; bemerkenswert ist aber z. B. jedenfalls, daß im Vergleich mit $Z = 100\,m$ die Ablesungsgenauigkeit für $Z = 20\,m$ selbstverständlich keineswegs 5 mal so groß ist (wie in **1.** angenommen) sondern nur 2 bis 3 mal so groß. Die vorstehenden Zahlen gelten für einen Faden; sind an beiden Fäden beliebige Ablesungen zu machen, so sind für das zwischen beiden Fäden liegende l die Zahlen mit $\sqrt{2}$ zu multiplizieren; wird der eine Faden auf eine runde Zahl (Strich) oder auf Feldmitte gestellt und nur am andern Faden abgelesen, so wird man m. F.-Zahlen der l durch Multiplikation der vorstehenden Zahlen mit einer Konstanten etwas $<$ 1,41, vielleicht $1\,^1/_4$ erhalten können. Darauf kommt nichts an, wenn wir nur Gewichtszahlen aufstellen wollen, die dem m. F. nach (6) oder (7) entsprechen, da es sich dabei nur um Verhältniszahlen handelt. Nehmen wir zunächst die p' unmittelbar als Reziproken der Quadrate der obigen Zahlen, so ergeben sich folgende Werte:

$Z\,(m) =$	10	20	40	60	80	100	120	140
(6''), nach (6'), $p' =$	8,5	6,4	4,0	2,7	2,0	1,5	1,2	1,0
(7''), nach (7'), $p' =$	13,1	8,1	4,0	2,3	1,5	1,1	0,8	0,6.

Reduzieren wir beide Reihen, die für $t = 10\,mm$ und z. B. Fernrohrvergrößerung 25 gelten, auf die Zahl

(8) $p = 1$ für $E = 100\,m$, so ergeben sich folgende p:

(6''')	5,6	4,2	2,6	1,8	1,3	1,0	0,8	0,6
(7''')	12,0	7,4	3,6	2,1	1,4	1,0	0,7	0,6

Die Hohenner'schen Zahlen nach (7) (7') nehmen für die kleinen Entfernungen zu kleine m. F. an (auch die etwas größern Eggert'schen sind noch knapp, selbst wenn bei diesen kleinen Entfernungen an der 1 *cm*-Latte auf $^1/_2\,mm$ statt 1 *mm* geschätzt wird); man könnte deshalb für die Lattenabschnitte l, die durchaus an einer 1 *cm*-Latte durch Schätzung an einem Faden bis auf 1 *mm* abgelesen sind, bei 25 fach vergrößerndem Fernrohr etwa folgende abgerundete Gewichtszahlen ansetzen:

(9)

$Z\,(m) =$	10	20	40	60	80	100	120	140	160
$p =$	5	5	3	2	1	1	1	0,5	0,5

Uebrigens werden im Folgenden die Zahlenbeispiele absichtlich mit verschiedenen Gewichtsannahmen durchgeführt.

4. Es sollen nämlich hier zunächst einige Beispiele rechnerischer gemeinschaftlicher Bestimmung von c und k aus Beobachtungen an Probestrecken bei verschiedenen Gewichtsannahmen behandelt werden.

Nach einem Beispiel bei Weitbrecht a. a. O., S. 191/912 sollen für ein bestimmtes Fernrohr, dessen c nicht unmittelbar gemessen wurde, zu den folgenden E (von der Kippachse aus gemessen und als fehlerfrei anzusehen) die beigesetzten l abgelesen sein (offenbar an einer 1 *cm*-Latte):

(10)

E	l	E	l
10	0,095	80	0,800
20	0,195	100	0,998
40	0,392	120	1,193
60	0,596	140	1,396

Man braucht in der Tat nur sehr wenig Praxis in diesen Messungen und Rechnungen zu haben, um aus den Unregelmäßigkeiten im Gang der l sofort nach Anblick, ohne jede Rechnung oder Zeichnung, zu sehen, daß k aus diesen Beobachtungen nicht auf $\pm$ 0, 1 bestimmt sein kann. Der genannte Verfasser allerdings rechnet heraus

$$(11) \qquad c = 0{,}52 \pm 0{,}18 \; m, \quad k = 100,\ 197 \pm 0{,}007 \text{ (!)};$$

der m. F. von k ist wie gesagt, ganz unmöglich, aber auch k selbst muß unrichtig bestimmt sein, es muß, da c, wie immer, einige dm groß sein wird, nahe bei 100 liegen, aber noch etwas kleiner als 100 sein. In der Tat kommt das Weitbrecht'sche Ergebnis nur auf Grund von Fehlern zustande (die selbstverständlich unabhängig von der Einführung unzutreffender Gewichte sind).

Mit den Weitbrecht'schen Näherungswerten 0,46 und 100,20 für die Unbekannten c und k und den gesuchten Korrektionen x und y jener Näherungswerte:

$$(12) \qquad c = 0{,}46 + x, \qquad k = 100{,}20 + y$$

ergeben sich folgende Verbesserungsgleichungen, in denen alles in Metern als Längeneinheit gemessen ist:

$$(13) \quad \begin{cases} 1 \cdot x + 0{,}095 \cdot y - 0{,}021 = v_1 \\ 1 \cdot x + 0{,}195 \cdot y - 0{,}001 = v_2 \\ 1 \cdot x + 0{,}392 \cdot y - 0{,}262 = v_3 \\ 1 \cdot x + 0{,}596 \cdot y + 0{,}179 = v_4 \\ 1 \cdot x + 0{,}800 \cdot y + 0{,}620 = v_5 \\ 1 \cdot x + 0{,}998 \cdot y + 0{,}460 = v_6 \\ 1 \cdot x + 1{,}193 \cdot y - 0{,}001 = v_7 \\ 1 \cdot x + 1{,}396 \cdot y + 0{,}339 = v_8 \end{cases}$$

a) In diesen Verbesserungsgleichungen führt Weitbrecht «zur Erlangung passender Werte als Längeneinheit das dm und statt y als neue Unbekannte $y' = 100y$ ein»; dies ist angesichts der Werte $a = 1$, b durchschnittlich $+ 0{,}7$, l (ich bezeichne die Absolutglieder der Verbesserungsgleichungen wieder mit l, da ja Verwechslung mit den Lattenabschnitten nicht zu befürchten) absolut durchnittlich 0,2 bis 0,3, nicht angezeigt, sondern für die Einfachheit und Sicherheit der Rechnung durchaus schädlich, wie auch der Erfolg zeigt. Lassen wir also die Verbesserungsgleichungen (13) unverändert und legen ihnen mit Weitbrecht je das Gewicht 1 bei (was nicht richtig ist, vergl. **2.** und unten), so lauten die zwei Normalgleichungen

$$\begin{array}{r} \underline{8}\, x + 5{,}665\, y + 1{,}313 = 0 \\ 5{,}665\, x + \underline{5{,}564}\, y + 1{,}429 = 0 \end{array} \quad \Bigg| \quad \text{bei } [ll] = \underline{0{,}812};$$

die Rechenschieber-Auflösung (deren Einfachheit den angesichts der unrichtigen Gewichtsannahme unwiderstehlich komisch wirkenden Dezimalenluxus der Weitbrecht'schen Auflösung einschätzen lehrt und deren Vergleich mit dieser Auflösung auch die Rechenfehler sofort erkennen läßt) gibt:

$$y = -\frac{0{,}489}{1{,}55} = -0{,}322 \quad \Bigg| \quad x = +\frac{0{,}141}{2{,}235} = +0{,}063;$$

rechnet man mit diesen, zu eben dem Zweck übertrieben scharf angeschriebnen Werten x und y die Verbesserungen v nach (13) aus, so findet man $[vv] = 0{,}436$, übereinstimmend mit $[ll \cdot 2] = 0{,}436$ aus der Auflösung der Normalgleichungen.

Es wird also

$$m_1 \text{ (m. F. der Gewichtseinheit)} = \sqrt{\frac{0{,}436}{6}} = \pm 0{,}27 \text{ (Meter)};$$

$m_y = \frac{0{,}27}{\sqrt{1{,}55}} = \pm 0{,}22$ (Zahl) und $m_x = \frac{0{,}27}{\sqrt{2{,}23}} = \pm 0{,}18$ (Meter), oder im ganzen

$$(14) \quad \begin{cases} c = 0{,}46 + 0{,}06 = \underline{0{,}52 \pm 0{,}18\, m} \\ k = 100{,}20 - 0{,}32 = \underline{99{,}88 \pm 0{,}22} \end{cases}$$

Man findet damit c wie bei W e i t b r e c h t [vergl. (11)], während k, wie vorauszusehen, richtigerweise um 0,3 kleiner ausfällt als bei W. und sein mittlerer Fehler 30 mal so groß ist als dort berechnet!

b) Führen wir, um die W i r k u n g r i c h t i g e r e r G e w i c h t e beurteilen zu können, in die Verbesserungsgleichungen (13) die Gewichtszahlen (9) ein, nämlich folgeweise (für die Annahme 25 facher Vergrößerung des Fernrohrs u. s. f.)

$p = 5, \quad 5, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 0{,}5$

und gehen wir ferner in der Absicht, allen Absolutgliedern der Verbesserungsgleichungen d a s s e l b e Vorzeichen zu geben, statt von (12) von den Näherungen x_0 (Näherungswert für c) $= 0$ und y_0 (Näherungswert für k) $= 100{,}00$ aus, wobei wieder deren Korrektionen x und y zu bestimmen sind, so werden die Absolutglieder der Verbesserungsgleichungen folgeweise

$-0{,}50, \quad -0{,}50 \quad -0{,}80 \quad -0{,}40 \quad 0{,}00 \quad -0{,}20 \quad -0{,}70 \quad -0{,}40$

und die Normalgleichungen für die Korrektionen x und y lauten

$$\begin{aligned} 18{,}5\, x + 7{,}51\, y - 9{,}30 &= 0 \\ 7{,}51\, x + 5{,}44\, y - 3{,}454 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{bei } [p\, ll] = 5{,}35.$$

Die Auflösung, selbstverständlich wieder mit dem gewöhnlichen Rechenschieber, liefert:

$$y = -\frac{0{,}32}{2{,}39} = -0{,}134 \quad \Big| \quad x = +\frac{4{,}53}{8{,}13} = +0{,}558; \qquad [p\, ll \cdot 2] = 0{,}64.$$

Direkte Ausrechnung der v mit Hilfe der (zu diesem Zwecke eben wieder übertrieben genau angeschriebnen) Werte von x und y und Bildung der einzelnen $p\, v^2$ gibt $[p\, vv] = 0{,}637$, stimmend mit $[p\, ll \cdot 2]$. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit [n i c h t vergleichbar mit dem m_1 in a)] wird

$$m_1 = \sqrt{\frac{0{,}64}{6}} = \pm 0{,}33\, m \qquad \text{und damit}$$

$m_y = \frac{0{,}33}{\sqrt{2{,}39}} = \pm 0{,}21$ (Zahl), $m_x = \frac{0{,}33}{\sqrt{8{,}13}} = \pm 0{,}11$ (Meter), das Ergebnis also

$$(15) \quad \begin{cases} \underline{c = 0{,}56 \pm 0{,}11} \\ \underline{k = 99{,}87 \pm 0{,}21} \end{cases}$$

Die Unbekannten, besonders k, sind also gegen a), Gleichungen (14), nicht wesentlich verändert, ebenso der m. F. von k praktisch genau derselbe $\pm 0{,}2$, dagegen ist c etwas größer geworden und insbesondere sein m. F. nur $^2/_3$ von dem in a).

c) Führen wir endlich, um die Vergleichung mit der folgenden Nummer dieses Aufsatzes vollständig zu ermöglichen, auch noch die Gewichtszahlen ein, die die Eggert'sche Annahme verlangt: mittlere Fehler der beobachteten Lattenabschnitte proportional den Entfernungen E oder also genügend auch den Lattenabschnitten l selbst (die Annahme ist einigermaßen zu rechtfertigen, wenn zur Beobachtung der kleinsten l auf 0,1 *mm* der 1 *mm*-Maßstab, für kleine l ein 2 *mm*-Maßstab, und nur für die größten l auf 1 *mm* die 1 *cm*-Latte angewendet wird; sie ist aber unter keinen Umständen gerechtfertigt bei der hier vorausgesetzten durchgehenden Verwendung der 1 *cm*-Latte für alle l), so werden diese Gewichte durch folgende Zahlen ausgedrückt:

$$\frac{1}{0{,}095^2} = 110, \quad \frac{1}{0{,}195^2} = 26, \quad \frac{1}{0{,}392^2} = 6{,}5, \quad \frac{1}{0{,}596^2} = 2{,}8,$$

$$\frac{1}{0{,}800^2} = 1{,}6, \quad \frac{1}{0{,}998^2} = 1{,}0, \quad \frac{1}{1{,}193^2} = 0{,}7, \quad \frac{1}{1{,}396^2} = 0{,}5.$$

Ihre Anwendung läßt nach (14) und (15) erwarten, daß der m. F. von c weiter sinkt, während k wenig verändert werden wird. Gehen wir wie bei b), um bequeme und für die Auflösung günstige Zahlen für die Verbesserungs- und Normalgleichungen zu erhalten, wieder von den Näherungswerten x_0 (Näherungswert für c) $= 0$, y_0 (für k) $= 100{,}00$ aus, womit die Absolutglieder der Verbesserungsgleichungen die schon in b) angegebenen Werte von einerlei Vorzeichen annehmen, so werden die Normalgleichungen zur Ermittlung von x $(= c)$ und von y:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{149}\,x + 23{,}55\,y - 75{,}2 = 0 \\ \qquad\qquad\quad \underline{8} - 11{,}5 \end{array}\right| \text{ bei } [p\,ll] = 39{,}1. \text{ Hieraus ergibt sich (Rechenschieber)}$$

$$y = -\frac{0{,}4}{4{,}28} = -0{,}09 \;\Big|\; x = +\frac{41{,}3}{79{,}7} = +0{,}52\,m; \; [p\,ll \cdot 2] = 1{,}1 \text{ und damit der}$$

$$\text{mittl. F. der Gewichtseinheit } m_1 = \sqrt{\frac{1{,}1}{6}} = \pm 0{,}42, \text{ also}$$

$$m_y = \frac{0{,}42}{\sqrt{4{,}3}} = \pm 0{,}20 \text{ (Zahl)}; \quad m_x = \frac{0{,}42}{\sqrt{80}} = \pm 0{,}05 \text{ (Meter). Im Ergebnis}$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{c = \;\; 0{,}52 \pm 0{,}05\,m} \\ \underline{k = 99{,}91 \pm 0{,}20} \end{array} \right.$$

sind also in der Tat abermals c und k wenig verändert, der m. F. von k immer noch derselbe $\pm 0{,}2$ [wie bei a) und b)], dagegen der mittlere Fehler von c wesentlich kleiner, um noch $^1/_{10}$ des Betrages von c selbst gegen $^1/_3$ des Betrages bei a), $^1/_5$ bei b) (der zutreffendsten Gewichtsannahme); die am meisten in die Augen fallende Wirkung der (allzu)starken Wertung der auf die kleinsten Abstände erhaltenen l hier in der letzten Rechnung. Auf k sind die in a), b), c) sehr verschieden angesetzten Gewichte von nicht bedeutender Wirkung. Daß diese Verhältnisse hier nur zufällig vorhanden sind, mag das folgende zweite Beispiel zeigen. Als bestes Ergebnis der Ausgleichung von (10) ist anzusehen:

$$c = 0{,}5 \pm 0{,}1\,m, \quad k = 99{,}9 \pm 0{,}2.$$

5. Dieses zweite Zahlenbeispiel sei die Untersuchung des Fernrohrs eines Porro'schen «Cleps», die in Jordan-Eggert a. a. O. S. 763 mitgeteilt wird. Zu den sieben Entfernungen von der Kippachse aus:

$\overset{(m)}{E} =$ 25,00   50,00   100,00   150,00   200,00   250,00   300,00

sind mit dem 25 fach vergrößernden Fernrohr die folgenden l beobachtet (Mittel aus je 8 Ablesungen, vier im Hingang, vier im Rückgang der Latte)

$l =$ 0,2501   0,5000   1,0006   1,5016   2,0021   2,5058   3,0060

Der schöne, nur bei den zwei letzten, größten Werten von E etwas gestörte Gang der l läßt sehr genaue Ermittlung der Konstanten erwarten.

a) Mit den Jordan'schen Gewichten (bei **4.** der Annahme c) entsprechend)

$p =$ 16,00   4,00   1,00   0,44   0,25   0,16   0,11

und den mit den Näherungswerten $x_0 = 0$ (Näherungswert für c) und $y_0 = 100{,}00$ (Näherungswert für k) sich ergebenden Absolutgliedern der Verbesserungsgleichungen

$\lambda = +\,0{,}01$ $0{,}00$ $+\,0{,}06$ $+\,0{,}16$ $+\,0{,}21$ $+\,0{,}58$ $+\,0{,}60$,

findet man die Normalgleichungen

$$\begin{array}{l} \underline{21{,}96}\,x + 8{,}90\,y + 0{,}50 = 0 \\ \qquad\qquad \underline{7{,}00} \;\; + 0{,}74 \end{array} \quad \Bigg| \quad [p\lambda\lambda] = 0{,}122,$$ und hieraus nach meiner Kontrollrechnung, fast überall noch in der letzten Stelle mit Jordan übereinstimmend:

$y = -\,0{,}158$ ($p_y = 3{,}40$), $x = +\,0{,}041$ ($p_x = 10{,}65$), $[p\lambda\lambda\cdot 2] = 0{,}026$, somit

$$m_1 \text{ (m. F. der Gewichtseinheit)} = \sqrt{\frac{0{,}026}{5}} = \pm\,0{,}072,$$

$$m_y = \frac{0{,}072}{\sqrt{3{,}40}} = \pm\,0{,}039, \quad m_x = \frac{0{,}072}{\sqrt{10{,}6}} = \pm\,0{,}02,$$ also als Gesamtergebnis

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = +\,0{,}04 \pm 0{,}02\; m \\ k = \;\; 99{,}84 \pm 0{,}04\;. \end{array} \right.$$

Das Fernrohr zeigt sich als genügend «anallaktisiert» (mit $c = +\,0{,}04$; daß der m. F. von c die Hälfte des Betrages von c selbst ist, hat bei der Kleinheit dieses Betrags nichts zu sagen); die Multiplikationskonstante ist mit einem m. F. von wenigen Hundertsteln der Einheit bestimmt.

b) Will man auch hier den Versuch machen, eine Gewichtsunterscheidung der l ganz zu unterlassen (der Rechnung 4. a) entsprechend; nicht berechtigt, weil die l durchaus an der 1 *cm*-Latte beobachtet sind und also die kleineren l jedenfalls nicht unwesentlich schärfer sind als die großen), so erhält man mit denselben Näherungswerten 0 und 100,00 und damit denselben λ (Absolutgliedern der Verbesserungsgleichungen) wie in a), dagegen mit allen $p = 1$, die folgenden Normalgleichungen:

$$\begin{array}{l} \underline{7}\,x + 10{,}75\,y + 1{,}62 = 0 \\ \qquad\quad \underline{22{,}81} \;\; + 3{,}97 \end{array} \quad \Bigg| \quad [\lambda\lambda] = 0{,}770;$$ ihre Auflösung gibt die Zahlen

$$y = -\frac{1{,}48}{6{,}29} = -\,0{,}235, \quad x = +\frac{0{,}25}{1{,}92} = +\,0{,}13; \quad [\lambda\lambda\cdot 2] = 0{,}046,$$ somit

m_1 (m. F. der Gew.-Einh., aber mit anderer Bedeutung als in a)$= \pm 0{,}096$ Meter

$$m_y = \frac{0{,}096}{\sqrt{6{,}3}} = \pm 0{,}038, \quad m_x = \frac{0{,}096}{\sqrt{1{,}9}} = \pm 0{,}07 \text{ und als Gesamtergebnis}$$

$$(18) \qquad \begin{aligned} c &= +\,0{,}13 \pm 0{,}07\ m \\ k &= \;\;99{,}77 \pm 0{,}04 \end{aligned}$$

Der Wert von k ist also nicht unwesentlich kleiner geworden, sein m. F. derselbe geblieben wie in (17); bemerkenswert ist, daß der Unterschied der beiden Ergebnisse für k die absolute Summe der zwei gleichen m. F. erreicht, indem jedes der k außerhalb der durch den m. F.-Betrag am andern gezogenen Grenze liegt. Dagegen ist der Wert von c viel größer geworden (während der m. F. die Hälfte des Wertes geblieben ist); nach dem Ergebnis dieser Bestimmung von c könnte das Fernrohr für T I nicht als genügend anallaktisiert gelten.

6. Bevor wir zu einer weitern, das Beispiel in **5.** betreffenden Rechnung übergehen, mag ein Wort über die graphische Behandlung der vorliegenden Aufgabe gleichzeitiger Bestimmung von c und k für ein entfernungsmessendes Fernrohr eingeschaltet werden. Durch die leichte Zugänglichkeit genügend genauer *mm*-Papiere ist diese graphische Behandlung derartiger Aufgaben jetzt sehr erleichtert.

Trägt man hier zu den von der Kippachse des Fernrohrs aus abgemessenen E als in geeignetem Maßstab, z. B. 1 : 1000 oder 1 : 2000 genommenen Abszissen die Zahlen für die beobachteten l als Ordinaten unmittelbar, wenn auch in großem Maßstab auf, so erhält man als Folge der Punkte praktisch genau eine gerade Linie, die keine Beseitigung von Unregelmäßigkeiten, den Zweck der «Ausgleichung», zu verlangen scheint. Ist der Maßstab der E 1 : 1000, der der l 1 : 10 und der Wert der Konstanten k nahezu 100, so hat die Gerade eine Neigung von nahezu $45^0 = \varrho^0 \cdot \operatorname{arc\,tg} 1$ gegen die Grundlinie; werden in einem andern Fall die E z. B. in 1 : 2000, die l in 1 : 40 aufgetragen, bei demselben Werte von $k =$ nahezu 100, so ist die Neigung etwa $\varrho^0 \cdot \operatorname{arc\,tg} {}^1/_2$ oder rund $26^1/_2{}^0$. Mit diesen Linien ist aber, wie bereits angedeutet, nicht viel zu beginnen und es sind deshalb statt der l als Ordinaten die Werte l' einer linearen Funktion der l aufzutragen, die die auszugleichenden Unregelmäßigkeiten graphisch klar hervortreten lassen. Bei $k =$ nahezu 100 ist diese Funktion selbstverständlich wieder

$$(19) \qquad l' = 100 \cdot l - E,$$

die auch bei der rechnerischen Ausgleichung benützt wurde. Für solche graphische Ausgleichungen wird nun in den Lehrbüchern oft der Rat gegeben, die Ordinaten, hier die l', «in möglichst großem Maßstab aufzutragen, damit die auszugleichenden Unregelmäßigkeiten sich möglichst auffallend in der Zeichnung darstellen». Diesem Rat entgegenzutreten, ist der Zweck dieses Abschnitts **6.** und der zwei beigegebenen Abbildungen, deren erste den in (10) zusammengestellten Daten des Beispiels in **4.** entspricht, während die zweite das in **5.** behandelte Beispiel graphisch wiederholt.

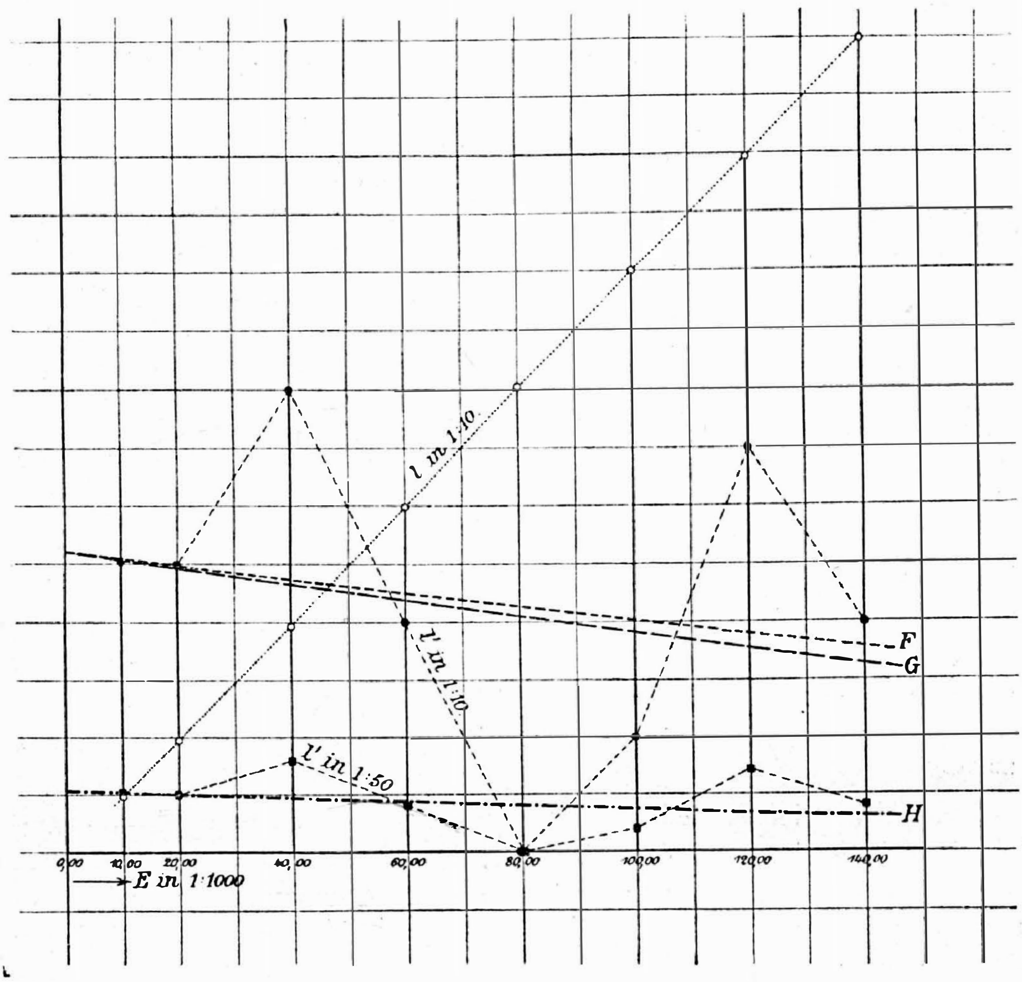

Fig. 1.

Im Original der Fig. 1 (hier auf etwa $^2/_3$ verkleinert) ist für die E der Maßstab 1 : 1000 genommen; trägt man dazu die l im Maßstab 1 : 10 auf, so ergibt sich die Punktfolge o o · ·, durch die Linie . . . . . verbunden, mit der nichts zu beginnen ist. Trägt man dagegen die l' nach (19), d. h. die Werte

$l' = -0{,}50 \quad -0{,}50 \quad -0{,}80 \quad -0{,}40 \quad 0{,}00 \quad -0{,}20 \quad -0{,}70 \quad -0{,}40$

als Ordinaten im Maßstab 1 : 10 zu den im Maßstab 1 : 1000 genommenen Abszissen

$E = \quad 10 \quad 20 \quad 40 \quad 60 \quad 80 \quad 100 \quad 120 \quad 140\ m$

auf, so erhält man die Punktfolge ●, die zwar die «Unregelmäßigkeiten», nämlich hier die Abweichungen aus einer Geraden, recht «auffallend» zeigt, aber eben wegen der gar zu großen Auffälligkeit eine ausgleichende Gerade nur recht unsicher ziehen läßt.

Die Linien F- - - oder G- - - haben bei der Abszisse 0 die Ordinate $c = 0{,}53$ und geben in der Neigung dieser ausgleichenden Linie die Verbesserung von $k_0 = 100{,}00$: die Linien fallen auf 100 m in E um 0,12 oder 0,14, so daß (Vorzeichen — der l' beachten) $k = 100{,}00 - 0{,}13 = 99{,}87$ abgelesen wird, immerhin mit einer Unsicherheit, die zeigt, daß $k = 99{,}9$ nicht auf das Zehntel sicher bestimmt sein kann. Viel sicherer als in F oder G läßt sich die Lage der ausgleichenden Linie H—.—.—. feststellen auf Grund der Punktfolge ■, die die l' im 5mal kleinern Maßstab 1 : 50 aufgetragen zeigt; c wird etwa 0,55 *m*, ohne daß es auf 5 *cm* verbürgt werden könnte, was aber in den Widersprüchen der Daten begründet ist, vergl. die m. F. bei den rechnerischen Ausgleichungen in **4.**; das Fallen der Linie H auf 100 *m* ist mit 0,2 abzulesen, wonach $k = 99{,}8$ beträgt, auch hier jedoch mit der Gewißheit, daß der Wert von k nicht aufs Zehntel verbürgt werden kann.

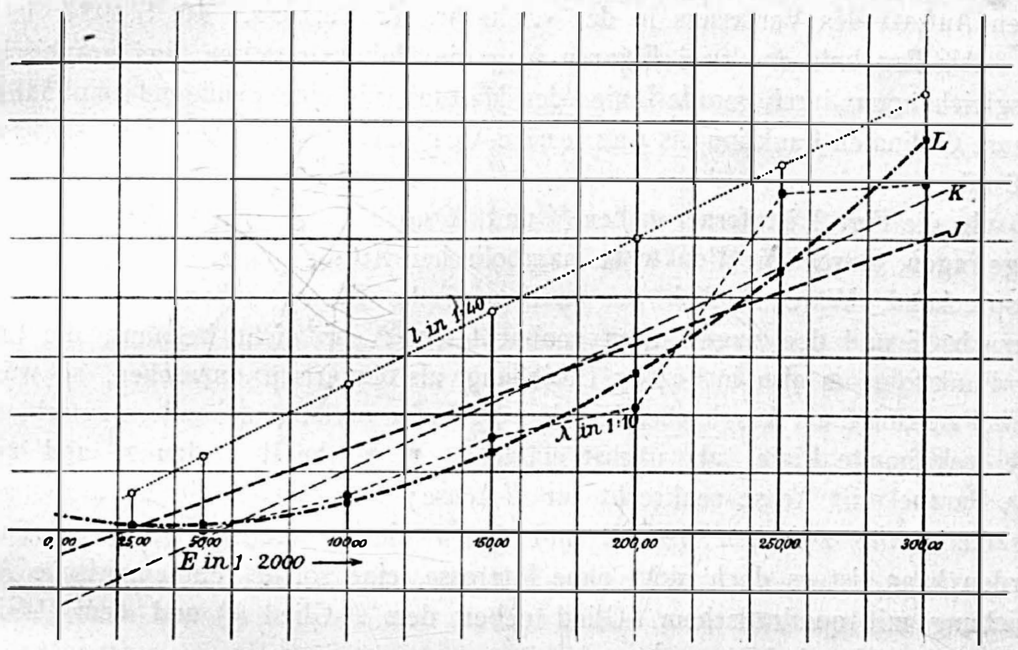

Fig. 2.

In der zweiten Figur, dem Beispiel in **5.** entsprechend, sind im Original (hier ebenfalls auf etwa $^2/_3$ verkleinert) die scharf abgemessenen Entfernungen

$E =$ 25 50 100 150 200 250 300 *m*

als Abszissen im Maßstab 1 : 2000 aufgetragen und als Ordinaten dazu die zugehörigen l'-Werte nach $l' = 100 \cdot l - E$ (in **5.** mit λ bezeichnet), nämlich

$l' = +0{,}01$ 0,00 $+0{,}06$ $+0{,}16$ $+0{,}21$ $+0{,}58$ $+0{,}60$ *m*.

Die l sind zwar ebenfalls als Ordinaten aufgetragen, im Maßstab 1 : 40, sie geben die Folge der o o Punkte, Linie .....; es ist aber daraus wieder nichts zu sehen. Da die l und die l' hier einen viel regelmäßigeren Gang zeigen als die entsprechenden Werte des vorigen Beispiels **4.**, so ist für die l' hiedurch ein viel größerer Maßstab angezeigt, als in der vorigen Figur; es ist im Original 1 : 10 für die l' genommen. Es ergibt sich damit die Punktfolge ●, nach der mit genügender Sicherheit z. B. die Gerade J als Ausgleichende gezogen werden kann, an der bei $E = 0$ die Konstante $c = 4$ *cm*, und an deren Neigung (auf 100 *m* in E 18 *cm* in l' steigend; Vorzeichen der l', hier durchaus +, beachten) $k = 100{,}00 - 0{,}18 = 99{,}82$ abzulesen ist, innerhalb des in **5.** berechneten mittlern Fehlers mit dem Ergebnis der rechnerischen Ausgleichung (17) stimmend. Freilich würde durch die Gerade K mit $c = +0{,}12$ und $k = 100{,}00 - 0{,}23$

$= 99{,}77$, den Ergebnissen (18) fast genau entsprechend, die Punktfolge ● nicht schlechter dargestellt, wenn eben Gleichwertigkeit der Beobachtungen l anzunehmen wäre; die Linie $\mathcal{J}$ ist offenbar vorzuziehen, wenn den kleinen l größeres Gewicht als den großen gegeben werden soll. Oft ist es zweckmäßig, bei solchen graphischen Ausgleichungen die verschiedenen Gewichte der den Beobachtungen entsprechenden Punkte dadurch anzudeuten, daß an Stelle dieser «Punkte» Kreise von verschiedener Fläche, die den Gewichten proportional ist, gezeichnet werden. In den vorstehenden Figuren ist davon Abstand genommen; vergl. dazu z. B. einen Aufsatz des Verfassers in der «Zeitschr. für Vermess.» **40**, S. 934, 1911.

Als Ergebnis der zwei Figuren mag die Mahnung gelten, bei graphischen Ausgleichungen durch gerade Linien den Maßstab für eine genügend empfindliche lineare Ordinaten-Funktion ins passende Verhältnis zu setzen zum Abszissen-Maßstab.

In die Fig. 2 ist ferner neben $\mathcal{J}$ und K noch die gekrümmte Linie L —.—.— eingetragen, durch die Punkte ■ parabolischer Ausgleichung der Punktfolge ● entsprechend. Wäre nämlich der mathematische Zusammenhang zwischen den Versuchs-E und den zugehörigen beobachteten l gar nicht bekannt, die Linie der Punktfolge ● also in jeder Beziehung als empirisch anzusehen, so würde diese Punktfolge als Ausgleichende keine Gerade verlangen, sondern entschieden eine gekrümmte Linie, als nächst einfache eine solche II. Ordnung, und zwar eine Parabel mit Achse senkrecht zur E-Achse; und obwohl dieser parabolische Zusammenhang zwischen den E und den l hier theoretisch nicht begründet werden kann, ist es doch nicht ohne Interesse, eine solche rein empirische Ausgleichung mit quadratischem l-Glied neben dem l^0-Glied (c) und dem l^1-Glied auch noch rechnerisch zu untersuchen.

7. Legen wir der letzten Andeutung gemäß der Beziehung zwischen den am Anfang von **5.** angeschriebenen E und l für das dort behandelte Porro'sche Fernrohr die Form zugrund:

(20) $$E = x + y \cdot l + z \cdot l^2$$

und nehmen als Näherungswerte $x_0 = 0$, $y_0 = 100{,}00$, $z_0 = 0{,}00$ an, so daß die Werte von $\lambda = 100\, l - E$

$$\lambda = 0{,}01, \quad 0{,}00 \quad +0{,}06 \quad +0{,}16 \quad +0{,}21 \quad +0{,}58 \quad +0{,}60$$

bestehen bleiben, und setzen wir endlich auch die Gewichte p wie in der ersten Rechnung **5.** a) an zu

$$p = 16 \quad 4 \quad 1 \quad 0{,}44 \quad 0{,}25 \quad 0{,}16 \quad 0{,}11,$$

so ergeben sich für die an x_0, y_0, z_0 anzubringenden Korrektionen ξ, η, ζ, deren Beifügung dann die Unbekannten x, y, z liefert, die Normalgleichungen:

$$\begin{array}{rrrr|l} \underline{21{,}96}\,\xi + & 8{,}90\,\eta + & 7{,}00\,\zeta + & 0{,}50 = 0 & \\ & \underline{7{,}00} & +10{,}75 & +0{,}74 & [p\lambda\lambda] = \underline{0{,}122}. \\ & & \underline{22{,}81} & +1{,}62 & \end{array}$$

Die Auflösung gibt zunächst ζ, nach vollständiger Umstellung ξ, zur Probe dann doppelt η; man findet

$$\zeta = -\frac{0{,}208}{2{,}18} = -0{,}096; \quad \xi = -\frac{0{,}076}{3{,}53} = -0{,}021; \quad \eta = +\frac{0{,}025}{0{,}35} = +0{,}071,$$

also $z = -0{,}096$; $x = -0{,}02$; $y = 100{,}07$. Ferner wird $[pvv] = [p\lambda\lambda \cdot 3] = 0{,}005_3$ (geprüft durch Bildung der einzelnen v und pv^2) und damit der m. F. der Gewichtseinheit $m_1 = \sqrt{\frac{0{,}005_3}{7-3}} = \pm 0{,}036$, gerade nur **halb** so groß als der, damit unmittelbar zu vergleichende Betrag von m_1 in der Auflösung 5. a). Die m. F. der Unbekannten werden:

$$m_z = \frac{0{,}036}{\sqrt{2{,}2}} = \pm 0{,}024; \quad m_x = \frac{0{,}036}{\sqrt{3{,}5}} = \pm 0{,}019; \quad m_y = \frac{0{,}036}{\sqrt{0{,}35}} = \pm 0{,}061$$

und die Beziehung zwischen l und E in der Form (20) lautet (wobei die klein unten angesetzten Zahlen die mittlern Unsicherheiten der Koeffizienten sind):

$$E = \underset{\pm 0{,}02}{-0{,}02} + \underset{\pm 0{,}06}{100{,}07} \cdot l \; \underset{\pm 0{,}024}{-0{,}096} \cdot l^2; \tag{21}$$

da der m. F. des Koeffizienten des quadratischen letzten Gliedes nur gerade $^1/_4$ des Koeffizienten selbst beträgt, so ist die formelle Berechtigung der Gleichung (20) nicht zweifelhaft, was mit dem Anblick der Figur 2 stimmt; wenn auch die Form theoretisch begründet werden sollte. Jedenfalls kann man auch nach (21) das Fernrohr als «anallaktisiert» bezeichnen (kein von l unabhängiges Glied von merklichem Betrag im Ausdruck für E vorhanden), wenn freilich ein «anallaktischer Punkt» im frühern Sinn hier überhaupt nicht vorhanden ist; während der Koeffizient von l^1 um 0,2 größer ausfällt als früher und dafür ein Glied mit l^2 und einem Koeffizienten = nahezu $- ^1/_{10}$ (mittl. Unsicherheit $^1/_{40}$) erscheint.

Die etwaige Wiederholung dieser Rechnung mit der (an sich nicht zu rechtfertigenden) Annahme gleicher Gewichte der l, um eine unmittelbare Vergleichung auch mit der Rechnung 5. b) zu erhalten, mag dem Leser überlassen bleiben; er wird finden:

$c = x = 0{,}00$, anscheinend vollständige Anallaktisierung in dem oben besprochenen Sinn (mit übrigens beträchtlicher Unsicherheit, s. u.)

$k_1 = y = 100{,}01$ (ebenso wie das obige k_1 im Vergleich mit dem k der Rechnung 5. a) um 0,2 größer ist, so ist auch das nebenstehende um fast genau denselben Betrag größer als das k aus der Rechnung 5. b), wegen des in l quadratischen Gliedes)

$k_2 = z = -0{,}072$.

Die mittlere Unsicherheit der Gewichtseinheit m_1 [nicht zu vergleichen mit dem vorigen m_1, wohl aber mit dem m_1 von 5. b)] wird $m_1 = \pm 0{,}081$ Meter; die m. Unsicherheiten der zuletzt angeschriebenen Koeffizienten x, y, z fallen alle wesentlich größer aus als bei der ersten Rechnung dieses Abschnitts, insbesondere ist der m. F. des von l nicht abhängigen Glieds (c) bedeutend, der von k_1 ist über $\pm 0{,}1$.

Dem Ergebnis der ersten vorstehenden Rechnung **7.** entspricht die Linie —.—.L der Figur 2, die durch die berechneten (nicht beobachteten) Punkte ■ noch hervorgehoben ist.

8. Eine besondere Stellung in der «optischen Distanzmessung» mit festen Fäden in der Tachymetrie nimmt, wie bereits in **1.** IV. angedeutet, das Zeiß-

Wild'sche Fernrohr mit konkaver Schaltlinse insofern ein, als bei ihm die Gleichung von der Form (I)

$$E = c + k \cdot l$$

nur in der Art besteht, daß die Werte von c und von k nicht absolute Konstante sind, sondern selbst mit der Entfernung E, oder wenn man will mit l, etwas veränderlich erscheinen. Indem ich nochmals auf die a. a. O. genannte Literatur verweise, möchte ich hier nur noch auf die Zahlen zurückkommen, die Eggert als Beispiel für ein bestimmtes Wild'sches Fernrohr angegeben hat (Jordan-Eggert, Handbuch, II. Bd., 8. Aufl., 1914, S. 758). Danach sind bei diesem Fernrohr, das bei $E = \infty$ die «Konstanten» $c = 0{,}154$, $k = 100{,}000$ hätte, diese Werte bei den in der folgenden kleinen Tafel angegebenen Entfernungen gleich den beigesetzten Zahlen anzunehmen:

(22)

$E(m)$	$c(m)$	k
5	0,143	96,27
10	0,149	98,19
20	0,152	99,11
50	0,153	99,65
100	0,154	99,83
∞	0,154	100,00

Es zeigt sich also zunächst, daß von der Veränderlichkeit von c mit der Entfernung E abgesehen werden, vielmehr c für alle Entfernungen, selbst für T I genügend genau, gleich 0,15 m gesetzt werden kann. Trägt man ferner die Werte von k, um ihre Abhängigkeit von E klar zu übersehen, als Ordinaten zu E als Abszissen auf, so ergibt sich die Figur 3 (im Original E als Abszissen im

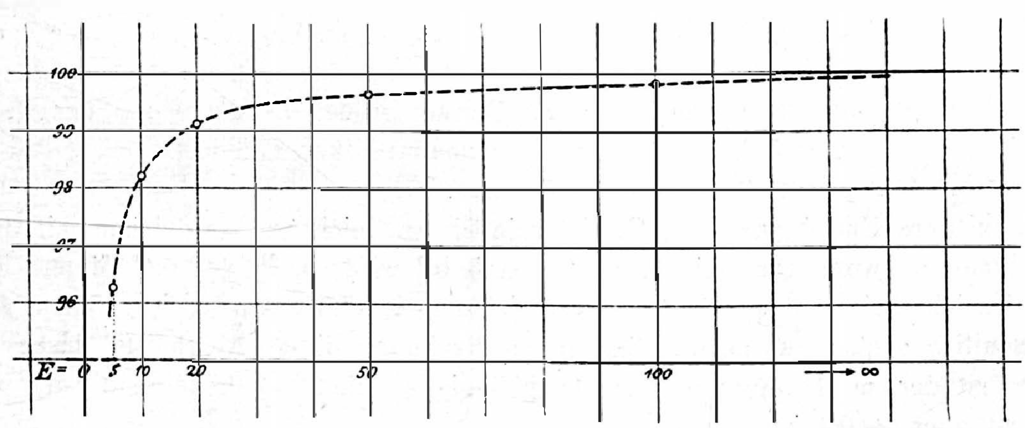

Fig. 3.

Maßstab 1 : 1000, die zugehörigen k im Maßstab einer Einheit in k durch 1 cm dargestellt), die zeigt, daß für nicht zu kleine Werte von E, z. B. jedenfalls von $E = 20$ m an aufwärts, die Linie der k-Punkte für alle Zwecke genügend genau als Hyperbel angesehen werden kann. Setzen wir

$$k' = 100\,k, \text{ so wird}$$

$$(23)\quad \begin{cases} \text{für } E = 20\,m, & k' = 0{,}89, \quad k'\cdot E = 17{,}8 \\ \text{»}\quad E = 50\,m, & k' = 0{,}35, \quad k'\cdot E = 17{,}5 \\ \text{»}\quad E = 100\,m, & k' = 0{,}17, \quad k'\cdot E = 17{,}0 \\ \text{»}\quad E = \infty, & k' = 0{,}00, \quad (k'\cdot E = 17). \end{cases}$$

Die Werte $k'\cdot E$ der letzten Spalte sind nahezu konstant, 17 bis 18; für $E = 10\,m$ steigt die Zahl allerdings auf 18, für $E = 5\,m$ auf rund $18^1/_2$.

Hieraus ergibt sich, daß man bei einem Wild'schen Fernrohr, wenn das als konstant anzusehende c nicht genügend unmittelbar aus den bekannten Abmessungen der Fernrohrteile ermittelt werden kann, sondern zusammen mit dem von E etwas abhängigen Werte von k aus Versuchsmessungen bestimmt werden muß, für den Zusammenhang zwischen E und l die Form zugrund legen kann:

$$(24)\qquad E = x + \left(y - \frac{z}{E}\right)\cdot l.$$

Dabei sind nur Versuchsstrecken E, von der Kippachse aus hinausgemessen, nicht weiter als bis zu 20 oder 10 m herunter anzuwenden (E_{max} von der Fernrohrvergrößerung abhängig), und dies geht ja auch ohne Bedenken oder ist sogar angezeigt, weil solche kleine Werte von E ($<$ 20 oder gar 10 m) auch später bei der praktischen Verwendung des Fernrohrs keine Rolle spielen. Bei der Anwendung der Gleichung (24) auf das vorhin angeführte Fernrohr würden sich nahezu die Werte ergeben $x = c = 0{,}15$, $y = 100{,}00$, $z = 17{,}5$. Setzen wir für ein beliebiges Wild'sches Fernrohr mit k nahe bei 100

$$(25)\qquad E = x + \left(100 + \eta - \frac{z}{E}\right)\cdot l + v = x + 100\,l + l\cdot\eta - \frac{l}{E}\cdot z + v,$$

so erhält man die Verbesserungsgleichungen in der gewöhnlichen Form:

$$(26)\qquad v_i = a_i\cdot x + b_i\cdot\eta + c_i\cdot z + \lambda_i, \text{ wenn gesetzt wird}$$

$$(27)\qquad a_i = 1,\quad b_i = l_i,\quad c_i = \frac{l_i}{E_i},\quad \lambda_i = 100\cdot l_i - E_i.$$

Die Ausgleichung ist also ganz ebenso einfach wie bei andern Fernrohren. Da alle $a = 1$ sind, die Koeffizienten b für Entfernungen zwischen 10 und 250 m zwischen 0,1 und 2,50 liegen, Mittelzahl etwa 1,3, die c_i Werte sind, die sich von $^1/_{100}$ nicht merklich entfernen, endlich die λ_i Beträge von einigen dm, so ist es wieder bequem, in Metern als Längeneinheit zu rechnen; nur im 3. Glied der rechten Seite von (26) ist, wenn z wie bei dem Eggert'schen Exemplar eines Wild'schen Fernrohrs in ganz runder Zahl nahe bei 20 liegt, statt z besser die neue Unbekannte $z' = \frac{1}{10}\,z$ einzuführen.

Die Ausrechnung der E nach (25) auf Grund der für x, y, z gefundenen Werte beim praktischen Gebrauch des Fernrohrs verlangt selbst für den Fall runder Werte der Koeffizienten die oben mehrfach angeführte Tabelle mit l als Argument, die dann auch die hier im allgemeinen stets nicht runden Werte der Koeffizienten gleichgültig erscheinen läßt. Die Aufstellung dieser Tafel der E, die auch für T I kein engeres Intervall als 1 cm im Argument l zu haben braucht (welches Intervall dann aber auch für T II bequem ist, da man bei T II jedenfalls ganz ohne Zwischenschaltung, auch selbst ohne Anblickseinschaltung, wie sie dann für TI erforderlich ist, auskommen will; die Tafel ist für TII nur weiter auszudehnen als für TI, dort bis zu l etwa $= 4\ m$, hier nur bis zu etwa 2,5 m), kann hier etwas unbequem erscheinen, weil auf der rechten Seite des Ausdrucks für E nach (25) E selbst vorkommt. Indessen ist dies nicht von Bedeutung, weil für $\frac{z}{E}$ stets eine nicht sehr weitgehende Näherung für E genügt. So ist z. B., wenn für ein bestimmtes Fernrohr gefunden sein mag:

$x = 0{,}20, \quad y = 100{,}35, \quad z = 17{,}50,$ d. h. also

$$E = 0{,}20 + \left(100{,}35 - \frac{17{,}5}{E}\right) \cdot l$$

die unmittelbare Aufstellung der E für die runden Grundwerte von $l = 0{,}20$, 0,30, 0,40, 0,50; 1,00, 1,50, 2,00, 2,50, 3,00 das Werk von zwei Minuten. Man findet mit einer auch für TI mehr als hinreichenden Genauigkeit:

$l=$	0,20	0,30	0,40	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
$E=$	20,10	30,13	40,17	50,20	100,38	150,55	200,73	250,90	301,08
	3	4	3		18	17	18	17	18

und der Verlauf der unten angesetzten Differenzen (in cm und von den Metern absehend) zeigt sofort die Möglichkeit linearer weiterer Einschaltung, am einfachsten mit der Addiermaschine. So ergeben sich z. B. für die cm-Dekade in l zwischen $l = 0{,}40$ und $l = 0{,}50$ die beigesetzten Werte E mit Sicherheit gegen Fehler nicht über 1 cm, also abermals für TI mehr als hinreichend genau:

$l=$	0,40	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50 ....
$E=$	40,17	41,17	42,18	43,18	44,18	45,18	46,19	47,19	48,19	49,20	50,20 ....

Die Herstellung der vollständigen E-Tabelle von $l = 0{,}10$ bis $l = 4{,}00$ mit dem Intervall von durchaus 1 cm ist in einer halben Stunde bequem durchzuführen. Die vorstehende Zeile dieser Tabelle gibt dann z. B. für $l = 0{,}476$ (bei TI) nach Anblick $E = 47{,}79$ (übereinstimmend mit der hier zur Probe angedeuteten unmittelbaren Rechnung $E = 0{,}20 + \left(100{,}35 - \frac{17{,}50}{47{,}8}\right) \cdot 0{,}476 =$ $0{,}20 + (100 + 0{,}350 - 0{,}366) \cdot 0{,}476 = 0{,}20 + 47{,}60 - 0{,}01 = 47{,}79$). Vergl. zur Berechnung der E beim Wild'schen Fernrohr auch Eggert a. a. O. S. 758 und mein Referat in der Zeitschr. f. Instrum. **34**, S. 259, 1914.

Über die Potenzreihen zur sogenannten „geodätischen Hauptaufgabe".

Von **Prof. Dr. L. Grabowski** in Lemberg, k. k. Technische Hochschule.

(Fortsetzung und Schluß.)

4. *Formel für die Differentialquotienten der geogr. Länge.* — Der n-te Differentialquotient der geogr. Länge hat allgemein die Gestalt

$$(14)\quad \frac{d^n \lambda}{ds^n} = \frac{W^n \sec\varphi}{a^n}\left[c_0^{(n)} \xi^0 \eta^n + c_1^{(n)} \xi^1 \eta^{n-1} + c_2^{(n)} \xi^2 \eta^{n-2} + \ldots + c_n^{(n)} \xi^n \eta^0\right],$$