Über das Legendre'sche Theorem

Gerhard Kowalewski [1]

[1] *o. ö. Professor an der deutschen Universität zu Prag*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **17** (1), S. 1–5

1919

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Baurat Ing. S. Wellisch.

Nr. 1. Wien, im April 1919. XVII. Jahrgang.

Über das Legendre'sche Theorem.

Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. ö. Professor an der deutschen Universität zu Prag.

In der Zeitschrift für Vermessungswesen habe ich vor einiger Zeit einen Beweis des Legendre'schen Satzes veröffentlicht, der mit geringem Formelaufwand zum Ziele führt. Durch einen hervorragenden Fachvertreter (Herrn E. v. Hammer) wurde ich zu einer Modifikation meines Beweises angeregt, die ihn über das Niveau einer bloßen Verifikation erhebt. Der Zweck vorliegender Notiz ist die Darlegung dieses modifizierten Beweises, und zwar unter Ausdehnung auf den erweiterten Legendre'schen Satz.

Herr Frischauf hat kürzlich (in Nr. 5 des XIV. Jahrganges dieser Zeitschrift) den Beweis von A. Winkler, den er für den einfachsten hält, auf den erweiterten Legendre'schen Satz übertragen.

§ 1. Ziel und Gang meines Beweises.

Der Legendre'sche Satz bezieht sich auf ein kleines sphärisches Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln A, B, C. Konstruiert man mit denselben Seiten ein ebenes Dreieck und nennt seine Winkel (wie Legendre) A', B', C', so ist in erster Annäherung

$$A' = A,\ B' = B,\ C' = C.$$

Es wird verlangt, A', B', C' genauer zu approximieren.

Die hiermit gekennzeichnete Aufgabe (das Legendre'sche Problem) ist gelöst, sobald man A', B', C' nach Potenzen einer Hauptinfinitesimale entwickelt hat, und zwar werden wir als solche den sphärischen Exzeß E benützen. Die Herleitung von E-Reihen für A', B', C' ist also das Ziel.

Den Ausgangspunkt meines Beweises bilden die Gleichungen

$$A' + B' + C' = \pi, \tag{1}$$

$$\frac{\sin B'}{\sin A'} = \frac{b}{a}, \tag{2}$$

$$\frac{\sin C'}{\sin A'} = \frac{c}{a}, \tag{3}$$

durch welche die zu berechnenden Winkel A', B', C' bestimmt sind. Der erste Schritt besteht darin, die Seitenverhältnisse $b:a$ und $c:a$ als Quotienten von E-Reihen darzustellen. Ist dies geschehen, so suchen wir den Gleichungen (1), (2), (3) dadurch zu genügen, daß wir für A', B', C' passende E-Reihen einsetzen.

Läßt man die auf solche Weise erhaltenen Reihen mit den Gliedern erster Ordnung abbrechen, so erhält man den einfachen Legendre'schen Satz. Geht man bis zu den Gliedern zweiter Ordnung, so ergibt sich der erweiterte Legendre'sche Satz.

§ 2. Durchführung des Beweises.

Um $b:a$ und $c:a$ in der gewünschten Form darzustellen, stützen wir uns auf die Arcussinusreihe

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}\ldots$$

Danach ist

$$a = \left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 a}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^4 a}{5}\ldots\right)\sin a$$

oder

$$a = \mathfrak{A}\sin a,$$

wenn wir zur Abkürzung

$$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 a}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^4 a}{5} + \ldots = \mathfrak{A}$$

setzen. Entsprechend drücken sich b und c aus, und man erhält unter Berücksichtigung des Sinussatzes

$$(4) \qquad \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}\cdot\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}\cdot\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}.$$

Wir brauchen jetzt nur

$$\sin^2 a,\ \sin^2 b,\ \sin^2 c,$$

aus deren Potenzen sich $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ aufbauen, durch E-Reihen darzustellen, um $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ selbst in solche Reihen verwandeln zu können.

Zu einer E-Reihe für $\sin^2 a$ führt uns in einfachster Weise die Schwesterformel des Kosinussatzes (d. h. der Kosinussatz für das reziproke Dreieck):

$$\cos a = \frac{\cos A - \cos B\cos C}{\sin B\sin C}.$$

Setzt man hier

$$A = \pi - (B + C - E)$$

und entwickelt $\cos(B + C - E)$ nach Potenzen*) von E, so ergibt sich nach Einführung der Abkürzungen

$$(5) \qquad \cot A = \alpha, \quad \cot B = \beta, \quad \cot C = \gamma$$

zunächst folgende E-Reihe für $\cos a$:

$$\cos a = 1 - E(\beta + \gamma) + \frac{E^2}{2}(\beta\gamma - 1)\ldots$$

---

*) Man kann sich dabei auf die Taylor'sche Reihe berufen oder auch auf die Formel

$$\cos(B + C - E) = \cos(B + C)\cos E + \sin(B + C)\sin E$$

und die bekannten Reihen für $\cos E$ und $\sin E$.

Daraus folgt aber

$$(6) \qquad \sin^2 a = 2E(\beta + \gamma) - E^2(\beta^2 + \gamma^2 + 3\beta\gamma - 1) \ldots$$

Ferner wird

$$\sin^4 a = 4E^2(\beta + \gamma)^2 \ldots,$$

während die höheren Potenzen von $\sin^2 a$ die zweite Ordnung, bis zu der wir hier gehen, bereits überschreiten. Für $\mathfrak{A}$ erhalten wir demnach folgende E-Reihe:

$$(7) \qquad \mathfrak{A} = 1 + \frac{E}{3}(\beta + \gamma) + \frac{E^2}{30}(4\beta^2 + 4\gamma^2 + 3\beta\gamma + 5) \ldots$$

Entsprechend lauten die E-Reihen für $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.

Diese Ausdrücke denke man sich in (4) an Stelle von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ eingesetzt. Dann erscheinen $b:a$ und $c:a$ als Quotienten von E-Reihen, was wir erreichen wollten.

Nun kommen wir zum Hauptteil unseres Beweises. Wir versuchen jetzt die Gleichungen (1), (2), (3) dadurch zu befriedigen, daß wir für A', B', C' passende E-Reihen schreiben. Wir machen also den Ansatz

$$A' = A + A_1 E + A_2 E^2 \ldots,$$
$$B' = B + B_1 E + B_2 E^2 \ldots,$$
$$C' = C + C_1 E + C_2 E^2 \ldots$$

und sehen zu, ob sich die Koeffizienten

$$A_1,\ B_1,\ C_1,\ A_2,\ B_2,\ C_2, \ldots$$

so wählen lassen, daß den Gleichungen (1), (2), (3) Genüge geschieht.

Bei obigem Ansatz geht die Gleichung (1) in folgende über:

$$(1^*) \qquad E(A_1 + B_1 + C_1 + 1) + E^2(A_2 + B_2 + C_2) \ldots = 0.$$

Die linken Seiten von (2) und (3) verwandeln sich in das, was die rechten schon sind, in Quotienten von E-Reihen. Es wird nämlich*), wenn wir $A' = A + h$ setzen und an die Abkürzungen (5) denken,

$$\sin A' = \sin A + h \cos A - \frac{h^2}{2} \sin A \ldots$$
$$= \sin A \cdot \left(1 + h\alpha - \frac{h^2}{2} \ldots\right).$$

Andererseits ist

$$h = A_1 E + A_2 E^2 \ldots,$$

also

$$h^2 = A_1^2 E^2 \ldots,$$

während die höheren Potenzen von h die zweite Ordnung überschreiten. Demnach wird

$$(8) \qquad \sin A' = \sin A \cdot \left\{1 + E A_1 \alpha + E^2\left(A_2 \alpha - \frac{1}{2} A_1^2\right) \ldots\right\},$$

und ähnliche Entwicklungen gelten für $\sin B'$ und $\sin C'$.

Die Gleichungen (2) und (3) nehmen jetzt unter Berücksichtigung von (4), (7) und (8) folgende Gestalt an, wobei wir noch die übereinstimmenden Sinusfaktoren fortgelassen haben:

*) Hier gilt eine ähnliche Bemerkung, wie wir sie in der Fußnote auf Seite 2 machten.

$$
(2') \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1 + EB_1\beta + E^2(B_2\beta - \frac{1}{2}B_1^2)\ldots}{1 + EA_1\alpha + E^2(A_2\alpha - \frac{1}{2}A_1^2)\ldots} \\
&= \frac{1 + \frac{E}{3}(\gamma + \alpha) + \frac{E^2}{30}(4\gamma^2 + 4\alpha^2 + 3\gamma\alpha + 5)\ldots}{1 + \frac{E}{3}(\beta + \gamma) + \frac{E^2}{30}(4\beta^2 + 4\gamma^2 + 3\beta\gamma + 5)\ldots}.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(3') \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1 + EC_1\gamma + E^2(C_2\gamma - \frac{1}{2}C_1^2)\ldots}{1 + EA_1\alpha + E^2(A_2\alpha - \frac{1}{2}A_1^2)\ldots} \\
&= \frac{1 + \frac{E}{3}(\alpha + \beta) + \frac{E^2}{30}(4\alpha^2 + 4\beta^2 + 3\alpha\beta + 5)\ldots}{1 + \frac{E}{3}(\beta + \gamma) + \frac{E^2}{30}(4\beta^2 + 4\gamma^2 + 3\beta\gamma + 5)\ldots}.
\end{aligned}
\right.
$$

Eine weitere Vereinfachung wird dadurch erreicht, daß man die Nenner fortmultipliziert. An die Stelle der Gleichungen (2'), (3') treten dann folgende:

$$
(2^*) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{c} 1 + B_1\beta \\ + \frac{1}{3}(\beta + \gamma) \end{array}\right\} E + \left\{\begin{array}{c} B_2\beta - \frac{1}{2}B_1^2 \\ + \frac{1}{3}(\beta + \gamma)B_1\beta \\ + \frac{1}{30}(4\beta^2 + 4\gamma^2 + 3\beta\gamma + 5) \end{array}\right\} E^2 \ldots \\
&\left\{\begin{array}{c} 1 + A_1\alpha \\ + \frac{1}{3}(\gamma + \alpha) \end{array}\right\} E + \left\{\begin{array}{c} A_2\alpha - \frac{1}{2}A_1^2 \\ + \frac{1}{3}(\gamma + \alpha)A_1\alpha \\ + \frac{1}{30}(4\gamma^2 + 4\alpha^2 + 3\gamma\alpha + 5) \end{array}\right\} E^2 \ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(3^*) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{c} 1 + C_1\gamma \\ + \frac{1}{3}(\beta + \gamma) \end{array}\right\} E + \left\{\begin{array}{c} C_2\gamma - \frac{1}{2}C_1^2 \\ + \frac{1}{3}(\beta + \gamma)C_1\beta \\ + \frac{1}{30}(4\beta^2 + 4\gamma^2 + 3\beta\gamma + 5) \end{array}\right\} E^2 \ldots \\
&\left\{\begin{array}{c} 1 + A_1\alpha \\ + \frac{1}{3}(\alpha + \beta) \end{array}\right\} E + \left\{\begin{array}{c} A_2\alpha - \frac{1}{2}A_1^2 \\ + \frac{1}{3}(\alpha + \beta)A_1\alpha \\ + \frac{1}{30}(4\alpha^2 + 4\beta^2 + 3\alpha\beta + 5) \end{array}\right\} E^2 \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Unsere Aufgabe besteht darin, $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, \ldots$ derart zu wählen, daß die Gleichungen (1^*), (2^*), (3^*) erfüllt sind. Dies wird sicher der Fall sein, wenn wir die Gleichungen zu Identitäten machen, d. h. die entsprechenden Koeffizienten der verschiedenen E-Potenzen gleich setzen.

Aus den Gliedern erster Ordnung gewinnen wir dann unmittelbar die Relationen:

$$
\begin{aligned}
A_1 + B_1 + C_1 + 1 &= 0, \\
(B_1 + \tfrac{1}{3})\beta &= (A_1 + \tfrac{1}{3})\alpha, \\
(C_1 + \tfrac{1}{3})\gamma &= (A_1 + \tfrac{1}{3})\alpha.
\end{aligned}
$$

Sie sagen uns, daß die Größen $A_1 + \frac{1}{3}$, $B_1 + \frac{1}{3}$, $C_1 + \frac{1}{3}$ proportional sind zu $1/\alpha$, $1/\beta$, $1/\gamma$, also zu $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg} C$ (vgl. Formel 5), und daß sie außerdem die Summe Null haben. Ist nun

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \gtrless 0,$$

so folgt, daß jene drei Größen verschwinden, also

$$\text{(10)} \qquad A_1 = B_1 = C_1 = -\tfrac{1}{3}.$$

Die Identifizierung der Glieder zweiter Ordnung in (1*), (2*), (3*) liefert unter Verwertung des Ergebnisses (10) die Relationen

$$A_2 + B_2 + C_2 = 0,$$

$$\left(B_2 + \frac{2}{90}\beta - \frac{1}{90}\gamma\right)\beta = \left(A_2 + \frac{2}{90}\alpha - \frac{1}{90}\gamma\right)\alpha,$$

$$\left(C_2 + \frac{2}{90}\gamma - \frac{1}{90}\beta\right)\gamma = \left(A_2 + \frac{2}{90}\alpha - \frac{1}{90}\beta\right)\alpha.$$

Sie besagen, daß die drei Größen

$$A_2 + \frac{1}{90}(2\alpha - \beta - \gamma),$$

$$B_2 + \frac{1}{90}(2\beta - \gamma - \alpha),$$

$$C_2 + \frac{1}{90}(2\gamma - \alpha - \beta)$$

proportional zu $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg} C$ sind und die Summe Null haben. Wenn also die Bedingung (9) erfüllt ist, sind alle drei null, d. h. man hat

$$\text{(11)} \qquad \left\{\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{90}(\beta + \gamma - 2\alpha), \\ B_2 &= \frac{1}{90}(\gamma + \alpha - 2\beta), \\ C_2 &= \frac{1}{90}(\alpha + \beta - 2\gamma). \end{aligned}\right.$$

Nach (10) und (11) kann man nun schreiben:

$$\text{(12)} \qquad \left\{\begin{aligned} A' &= A - \frac{E}{3} + \frac{E^2}{90}(\alpha + \beta + \gamma) - \frac{E^2}{30}\alpha \ldots, \\ B' &= B - \frac{E}{3} + \frac{E^2}{90}(\alpha + \beta + \gamma) - \frac{E^2}{30}\beta \ldots, \\ C' &= C - \frac{E}{3} + \frac{E^2}{90}(\alpha + \beta + \gamma) - \frac{E^2}{30}\gamma \ldots. \end{aligned}\right.$$

Damit ist der erweiterte Legendre'sche Satz gewonnen. Die Punkte deuten Glieder von höherer Ordnung als E^2 an.

Die Bedingung (9) läßt sich leicht interpretieren. Sie ist sicher erfüllt, wenn keiner der Winkel A, B, C so klein wie E ist.