Aus der Praxis der Triangulierungs-Ausgleichung. (Die Broch'sche Aufgabe.)

Siegmund Wellisch [1]

[1] *Baurat der Stadt Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **18** (4), S. 75–80

1920


```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_192008,
Title = {Aus der Praxis der Triangulierungs-Ausgleichung. (Die Broch'sche
   Aufgabe.)},
Author = {Wellisch, Siegmund},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {75--80},
Number = {4},
Year = {1920},
Volume = {18}
}
```

der betreffenden Richtungswinkel gibt daher die Richtung für den Durchbruch von S an. Ist h die Neigung von S nach S', so ist

$$\operatorname{tang} h = \frac{\zeta' - \zeta}{\sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Hiezu tritt jedoch noch eine Reduktion, da weder der Instrumentenmittelpunkt mit S noch der Zielpunkt mit S' zusammenfallen wird und die entsprechenden Abweichungen maßgebend für den tatsächlich einzustellenden Höhenwinkel sein werden, der sich aber, sowie diese Abweichungen den örtlichen Verhältnissen entsprechend gegeben sind, leicht ableiten läßt.

Die theoretische Länge s des kürzesten Durchschlages ist dann

$$s = \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2}.$$

Aus der Praxis der Triangulierungs-Ausgleichung.

(Die Broch'sche Aufgabe.)

Von Baurat Ing. **S. Wellisch.**

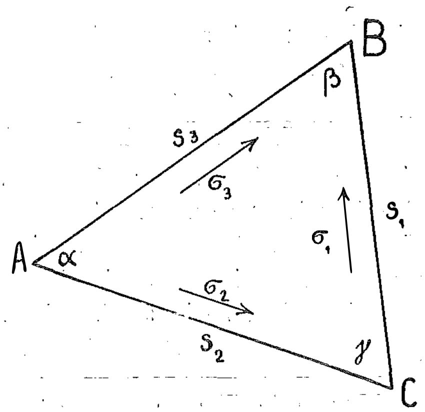
An den Geometer tritt in der Praxis zuweilen die Aufgabe heran, eine Neumessung an Punkte einer älteren Aufnahme anzuschließen, z. B. wenn ein Teil eines älteren Planes auf Grund von drei diesem Plane entnommenen und in der Natur noch vorfindlichen Punkten auf graphischem Wege erneuert, oder wenn auf Grund einer ausnahmsweise graphisch durchgeführten Triangulierung eine Neuaufnahme bewirkt werden soll. Da nur in den seltensten Fällen die älteren, planlich dargestellten Punkte mit ihrer Lage in der Natur gut übereinstimmen werden, so obliegt es dann in der Regel dem Geometer, die in Betracht gezogenen Punkte durch zweckmäßige geringe Aenderungen ihrer Lage auf dem Plane mit der Natur in Uebereinstimmung zu bringen.

Hofrat A. Broch hat sich in seinen letzten Jahren viel mit dieser Aufgabe beschäftigt und verschiedene, zumeist graphische Lösungen versucht.

Im nachstehenden Aufsatze sei auf eine rechnerische Lösung dieser Aufgabe näher eingegangen.

Das ebene Dreieck ABC einer älteren Triangulierung soll als Grundlage für eine neue Triangulierung benützt werden. Es ergaben sich aber bei den Winkelmessungen gegenüber den aus den älteren Koordinaten der Dreieckspunkte abgeleiteten Dreieckswinkeln Differenzen, die teils auf eine nicht ganz strenge Ausgleichung des früheren Triangulierungsnetzes, teils auf unvermeidliche Fehler bei der Identifizierung der Punkte zurückzuführen sind. Es soll nun durch eine Aenderung der älteren Koordinaten den neuen Messungsergebnissen in der Weise Rechnung getragen werden, daß die Summe der Quadrate dieser Aenderungen $[dx^2] + [dy^2]$ ein Minimum werde. Wir bezeichnen:

1. Die Dreiecksseiten mit s_1, s_2, s_3;
2. die älteren Koordinaten der Dreieckspunkte A, B und C mit $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$;
3. die den Dreiecksseiten zukommenden Südwinkel in der Pfeilrichtung mit σ_1, σ_2, σ_3;



4. die an den Koordinaten und Südwinkeln anzubringenden Verbesserungen mit $dx_1\ dy_1$, $dx_2\ dy_2$, $dx_3\ dy_3$ beziehungsweise $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$;

5. die aus den älteren Koordinaten abgeleiteten Dreieckswinkel mit α, β, γ, wobei $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ und die Differenzen zwischen diesen Winkelwerten und jenen aus der Neumessung hervorgegangenen, gleichfalls auf 180^0 ausgeglichenen Winkeln α_1, β_1, γ_1 mit $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$;

6. die Koeffizienten a und b in der zwischen den Südwinkel- und Koordinaten-Aenderungen bestehenden Beziehung $d\sigma = a\,dx + b\,dy$ mit $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ und $a_3 b_3$. Hienach erhält man

$$\left.\begin{aligned} d\sigma_1 &= a_1 (dx_3 - dx_2) + b_1 (dy_3 - dy_2) \\ d\sigma_2 &= a_2 (dx_1 - dx_3) + b_2 (dy_1 - dy_3) \\ d\sigma_3 &= a_3 (dx_1 - dx_2) + b_3 (dy_1 - dy_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

ferner

$$\left.\begin{aligned} d\alpha = d\sigma_2 - d\sigma_3 &= a_2 (dx_1 - dx_3) + \\ &+ b_2 (dy_1 - dy_3) - a_3 (dx_1 - dx_2) - b_3 (dy_1 - dy_2) \\ d\gamma = d\sigma_1 - d\sigma_2 &= a_1 (dx_3 - dx_2) + \\ &+ b_1 (dy_3 - dy_2) - a_2 (dx_1 - dx_3) - b_2 (dy_1 - dy_3) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

Ordnet man die Gleichungen (2) nach dx und dy, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} (a_2 - a_3) dx_1 + a_3 dx_2 - a_2 dx_3 + (b_2 - b_3) dy_1 + b_3 dy_2 - b_2 dy_3 - d\alpha &= 0 \\ - a_2 dx_1 - a_1 dx_2 + (a_1 + a_2) dx_3 - b_2 dy_1 - b_1 dy_2 + (b_1 + b_2) dy_3 - d\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} (3)$$

und hieraus die Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} & 2\left[(a_2^2 + b_2^2) + (a_3^2 + b_3^2) - (a_2 a_3 + b_2 b_3)\right] k_1 + \\ & + \left[-2 (a_2^2 + b_2^2) + (a_2 a_3 + b_2 b_3) - (a_1 a_3 + b_1 b_3) - (a_1 a_2 + b_1 b_2)\right] k_2 - d\alpha = 0 \\ & \left[-2 (a_2^2 + b_2^2) + (a_2 a_3 + b_2 b_3) - (a_1 a_3 + b_1 b_3) - (a_1 a_2 + b_1 b_2)\right] k_1 + \\ & \qquad + 2\left[(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + (a_1 a_2 + b_1 b_2)\right] k_2 - d\gamma = 0 \end{aligned}\right\} (4)$$

Wird berücksichtigt, daß

$$a = \frac{\varrho'' \sin \sigma}{s} \quad \text{und} \quad b = \frac{-\varrho'' \cos \sigma}{s},$$

so ist

$$a_1^2 + b_1^2 = \frac{\varrho^2}{s_1^2}, \qquad a_2^2 + b_2^2 = \frac{\varrho^2}{s_2^2}, \qquad a_3^2 + b_3^2 = \frac{\varrho^2}{s_3^2},$$

ferner

$$a_2 \alpha_3 + b_2 b_3 = \frac{\varrho^2}{s_2 s_3} \cos(\sigma_2 - \sigma_3) = \frac{\varrho^2}{s_2 s_3} \cos \alpha$$

$$a_3 a_1 + b_3 b_1 = \frac{\varrho^2}{s_1 s_3} \cos(\sigma_3 - \sigma_1) = \frac{\varrho^2}{s_1 s_3} \cos \beta$$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = \frac{\varrho^2}{s_1 s_2} \cos(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{\varrho^2}{s_1 s_2} \cos(\gamma - 180^0) = -\frac{\varrho^2}{s_1 s_2} \cos \gamma.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen (4) ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} 2\varrho^2\left(\frac{1}{s_2^2} + \frac{1}{s_3^2} - \frac{\cos\alpha}{s_2 s_3}\right) k_1 + \varrho^2\left(-\frac{2}{s_2^2} + \frac{\cos\alpha}{s_2 s_3} - \frac{\cos\beta}{s_1 s_3} + \frac{\cos\gamma}{s_1 s_2}\right) k_2 - d\alpha = 0 \\ 2\varrho^2\left(\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{s_2^2} - \frac{\cos\gamma}{s_1 s_2}\right) k_2 - d\gamma = 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Erwägt man noch, daß nach dem Kosinussatze

$$\cos\alpha = \frac{s_2^2 + s_3^2 - s_1^2}{2\, s_2 s_3}, \quad \cos\beta = \frac{s_1^2 + s_3^2 - s_2^2}{2\, s_1 s_3}, \quad \cos\gamma = \frac{s_1^2 + s_2^2 - s_3^2}{2\, s_1 s_2},$$

und setzt diese Kosinuswerte in die Gleichungen (5) ein, so nehmen diese nach entsprechender Reduktion folgende einfache Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varrho^2[s^2]}{s_2^2 s_3^2} k_1 - \frac{\varrho^2[s^2]}{s_2^2 s_3^2} \cdot \frac{s_3}{s_1} \cos\beta \cdot k_2 - d\alpha = 0 \\ + \frac{\varrho^2[s^2]}{s_2^2 s_3^2} \cdot \frac{s_3^2}{s_1^2} k_2 - d\gamma = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

Wenn man schließlich die Gleichungen (6) durch $\frac{\varrho^2[s^2]}{s_2^2 s_3^2}$ dividiert und diesen Divisor der Einfachheit halber mit m bezeichnet, so ergeben sich als endgültige Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} k_1 - \frac{s_3}{s_1} \cos\beta \cdot k_2 - \frac{d\alpha}{m} = 0 \\ \frac{s_3^2}{s_1^2} k_2 - \frac{d\gamma}{m} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

und daraus die Korrelaten:

$$k_1 = \frac{d\alpha + \frac{s_1}{s_3} \cos\beta \cdot d\gamma}{m \sin^2\beta}, \qquad k_2 = \frac{d\gamma + \frac{s_3}{s_1} \cos\beta \cdot d\alpha}{\frac{s_3^2}{s_1^2} m \sin^2\beta}.$$

Setzt man $m \sin^2\beta = n$, so erhält man:

$$k_1 = \frac{d\alpha + \frac{s_1}{s_3} \cos\beta \cdot d\gamma}{n}, \qquad k_2 = \frac{d\gamma + \frac{s_3}{s_1} \cos\beta \cdot d\alpha}{n \frac{s_3^2}{s_1^2}}.$$

Mit Hilfe dieser Korrelaten berechnen sich die Koordinatenverbesserungen

$$\left.\begin{aligned} dx_1 &= (a_2 - a_3)\,k_1 - a_2\,k_2 \\ dx_2 &= \quad + a_3\,k_1 - a_1\,k_2 \\ dx_3 &= \quad - a_2\,k_1 + (a_1 + a_2)\,k_2 \\ dy_1 &= (b_2 - b_3)\,k_1 - b_2\,k_2 \\ dy_2 &= \quad + b_3\,k_1 - b_1\,k_2 \\ dy_3 &= \quad - b_2\,k_1 + (b_1 + b_2)\,k_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Bei näherer Betrachtung dieser Ausdrücke findet man, daß nicht nur $[dx] + [dy] = 0$, sondern daß auch $[dx] = 0$ und $[dy] = 0$ sind, woraus aber folgt, daß die Summe der Abszissen- beziehungsweise Ordinatenwerte der Dreieckspunkte den entsprechenden Summen der älteren Koordinaten dieser Punkte vollkommen gleich sind, oder mit anderen Worten: Der Schwerpunkt des ausgeglichenen Dreiecks ist mit jenem des ursprünglichen Dreiecks identisch.

Nachstehend sei ein Beispiel einer solchen Ausgleichung durchgeführt.

A. Berechnungs-Grundlagen.

Alte Triangulierung.

Punkte	Koordinaten		Südwinkel	Dreieckswinkel	Logarithmen der Dreiecksseiten
	y	x			
A	$y_1 = + 6618{\cdot}55$	$x_1 = + 2119{\cdot}47$	$\sigma_1 = 170^0\,15'\,39{\cdot}7''$	$\alpha = 50^0\,23'\,30{\cdot}2''$	$\log s_1 = 3{\cdot}3010306$
B	$y_2 = + 4674{\cdot}17$	$x_2 = + 983{\cdot}14$	$\sigma_2 = 290\;05\;20{\cdot}2$	$\beta = 69\;26\;10{\cdot}3$	$\log s_2 = 3{\cdot}3857090$
C	$y_3 = + 4335{\cdot}85$	$x_3 = + 2954{\cdot}32$	$\sigma_3 = 239\;41\;50{\cdot}0$	$\gamma = 60\;10\;19{\cdot}5$	$\log s_3 = 3{\cdot}3525836$
				$180^0\,00'\,00{\cdot}0''$	

Neumessung.

Punkte	Dreieckswinkel auf 180^0 ausgeglichen	Differenzen
A	$\alpha_1 = 50^0\,23'\,00{\cdot}2''$	$d\alpha = -\,30{\cdot}0''$
B	$\beta_1 = 69\;26\;20{\cdot}3$	$d\beta = +\,10{\cdot}0$
C	$\gamma_1 = 60\;10\;39{\cdot}5$	$d\gamma = +\,20{\cdot}0$
	$180^0\,00'\,00{\cdot}0''$	$00{\cdot}0''$

B. Berechnungs-Ergebnisse.

Als Koeffizienten a und b der Gleichung $d\sigma = a\,dx + b\,dy$ ergaben sich gelegentlich der Südwinkelberechnung:

$$\begin{aligned} a_1 &= +\,17{\cdot}4 \qquad & b_1 &= +\,101{\cdot}6 \\ a_2 &= -\,79{\cdot}7 & b_2 &= -\,29{\cdot}1 \\ a_3 &= -\,79{\cdot}1 & b_3 &= +\,46{\cdot}2 \end{aligned}$$

Berechnung der Korrelaten:

$$\begin{array}{lll}
\log s_1^2 = 6{\cdot}602\,0612 & s_1^2 = 4{,}000\,011 & \log \varrho^2 = 10{\cdot}628\,8502 \\
\log s_2^2 = 6{\cdot}771\,4180 & s_2^2 = 5{,}907\,695 & \log [s^2] = 7{\cdot}175\,4992 \\
\log s_3^2 = 6{\cdot}705\,1672 & s_3^2 = 5{,}071\,859 & \log \dfrac{1}{s_2^2 s_3^2} = 6{\cdot}523\,4148 - 20 \\
 & [s^2] = 14{,}979\,565 & \log m = 4{\cdot}327\,7642 \\
 & & \log \sin^2\beta = 9{\cdot}942\,8130 - 10 \\
 & & \log n = 4{\cdot}270\,5772
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\log d\alpha &= 1{\cdot}477\,1213_n \\
\log \frac{1}{n} &= 5{\cdot}729\,4223 - 10 \\
&\ 7{\cdot}206\,5441_n - 10 \;.\;.\;.\;.\;.\; -0{\cdot}001\,609
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log d\gamma &= 1{\cdot}301\,0300 \\
\log \frac{s_1}{s_3} &= 9{\cdot}948\,4470 - 10 \\
\log \cos\beta &= 9{\cdot}545\,6166 - 10 \\
\log \frac{1}{n} &= 5{\cdot}729\,4228 - 10 \\
&\ 6{\cdot}524\,5164 - 10 \;.\;.\;.\;.\; +0{\cdot}000\,33 \\
&\qquad\qquad k_1 = -0{\cdot}001\,274
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log d\gamma &= 1{\cdot}301\,0300 \\
\log \frac{1}{n} &= 5{\cdot}729\,4228 - 10 \\
\log \frac{s_1^2}{s_3^2} &= 9{\cdot}896\,8940 - 10 \\
&\ 6{\cdot}927\,3468 \;.\;.\;.\;.\;.\; +0{\cdot}000\,846
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log d\alpha &= 1{\cdot}477\,1213_n \\
\log \frac{s_1}{s_3} &= 9{\cdot}948\,4470 - 10 \\
\log \cos\beta &= 9{\cdot}545\,6166 - 10 \\
\log \frac{1}{n} &= 5{\cdot}729\,4228 - 10 \\
&\ 6{\cdot}700\,6077_n - 10 \;.\;.\;.\;.\; -0{\cdot}000\,502 \\
&\qquad\qquad k_2 = +0{\cdot}000\,344
\end{aligned}$$

Koordinaten-Differenzen:

$$\left.\begin{aligned}
dx_1 &= +(-79{\cdot}7 + 79{\cdot}1)k_1 + 79{\cdot}7\ k_2 = +0{\cdot}028 \\
dx_2 &= -79{\cdot}1\ k_1 - 17{\cdot}4\ k_2 = +0{\cdot}095 \\
dx_3 &= +79{\cdot}7\ k_1 + (17{\cdot}4 - 79{\cdot}7)k_2 = -0{\cdot}123
\end{aligned}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
dy_1 &= -(29{\cdot}1 + 46{\cdot}2)k_1 + 29{\cdot}1\ k_2 = +0{\cdot}106 \\
dy_2 &= +46{\cdot}2\ k_1 - 101{\cdot}6\ k_2 = -0{\cdot}094 \\
dy_3 &= +29{\cdot}1\ k_1 + (101{\cdot}6 - 29{\cdot}1)k_2 = -0{\cdot}012
\end{aligned}\right\} = 0$$

Länge der Dreiecksseiten in *m*.

Vor	Nach	Unterschied
der Ausgleichung		
$s_1 = 2000{\cdot}00$	$1999{\cdot}77$	$-0{\cdot}23$
$s_2 = 2430{\cdot}57$	$2430{\cdot}63$	$+0{\cdot}06$
$s_3 = 2252{\cdot}08$	$2252{\cdot}22$	$+0{\cdot}14$

Südwinkel.

Vor	Nach	Unterschied
der Ausgleichung		
$\sigma_1 = 170^0\,15'\,39{\cdot}7''$	$170^0\,15'\,44{\cdot}2''$	$+\ 4{\cdot}5''$
$\sigma_2 = 290\ \ 05\ \ 20{\cdot}2$	$290\ \ 05\ \ 04{\cdot}7$	$-15{\cdot}5$
$\sigma_3 = 239\ \ 41\ \ 50{\cdot}0$	$239\ \ 42\ \ 04{\cdot}6$	$+14{\cdot}6$

Dreieckswinkel.

Gemessen	Aus endgültigen Südwinkeln abgeleitet	Unterschied
$\alpha_1 = 50^0\,23'\,00{\cdot}2''$	$50^0\,23'\,00{\cdot}1''$	$-0{\cdot}01''$
$\beta_1 = 69\ \ 26\ \ 20{\cdot}3$	$69\ \ 26\ \ 20{\cdot}4$	$+0{\cdot}01$
$\gamma_1 = 60\ \ 10\ \ 39{\cdot}5$	$60\ \ 10\ \ 39{\cdot}5$	$0{\cdot}00$

Einfluß der bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen in Verwendung gezogenen Näherungswerte auf die ausgeglichenen Größen.

Von **Dr. F. Aubell**, o. ö. Professor der Mont. Hochschule in Leoben.

Bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen gibt es zwei Wege, die zu den ausgeglichenen Werten der Unbekannten führen: einen unmittelbaren, bei welchem man die Unbekannten in ihrer vollen Größe aus linearen Endgleichungen (den Normalgleichungen) rechnet, und einen mittelbaren, der insbesondere bei nicht linearer Form der zwischen den Beobachtungen und den Unbekannten bestehenden Funktionsgleichung einzuschlagen ist, bei welchem man die Unbekannten aus anderweitig gewonnenen Näherungswerten durch an diesen anzubringende, in der Regel kleine Zuschläge erhält, die sich wieder aus Endgleichungen der erwähnten Art rechnen lassen. In letzterem Falle ist die Frage naheliegend, inwieweit der ausgeglichene Wert durch die Annahme des Näherungswertes beeinflußt werde. Diese Frage findet ihre sofortige Beantwortung durch die bloße Ueberlegung, daß der ausgeglichene Wert ein eindeutiger sein, daß er somit vom Wege unabhängig sein müsse, der zu seiner Erreichung eingeschlagen wird, sofern nur bei diesem das Fundamentalgesetz der Ausgleichungsrechnung $[gvv] =$ Min. erfüllt wurde.