Paper-ID: VGI_192108

Ueber die Schärfe der Zahlenrechnung

Siegmund Wellisch [1]

[1] *Baurat der Stadt Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **19** (3–4), S. 46–49

1921

BibTEX:

```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_192108,
Title =  {Ueber die Sch{\"a}rfe der Zahlenrechnung},
Author =  {Wellisch, Siegmund},
Journal =  {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages =  {46--49},
Number =  {3--4},
Year =  {1921},
Volume =  {19}
}
```

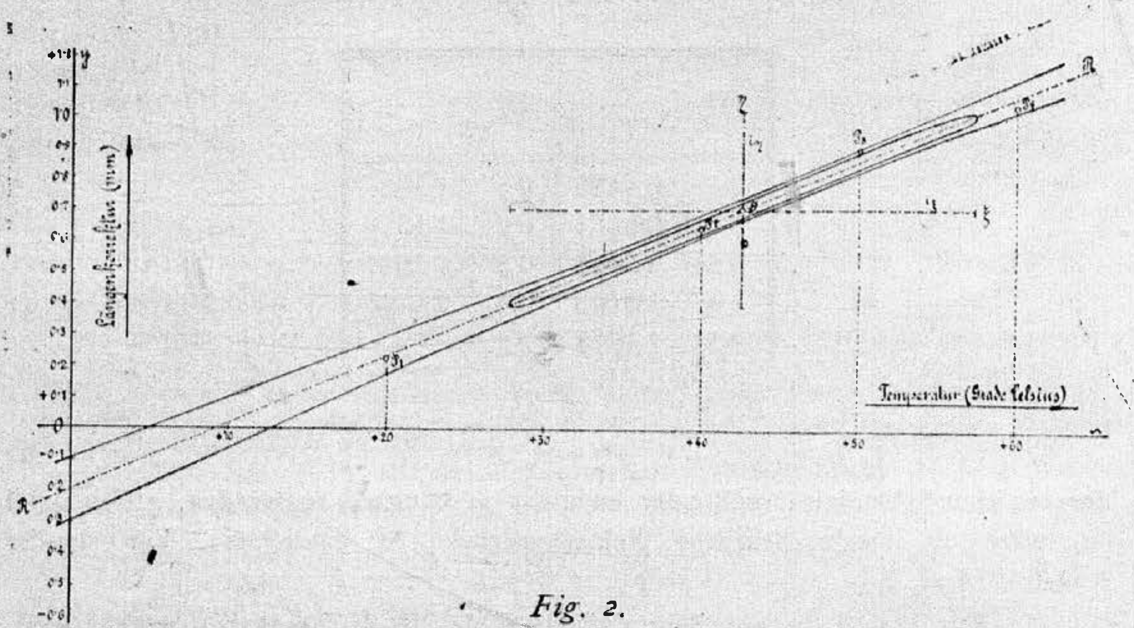

Fig. 2.

der mittlere Fehler der betreffenden Längenkorrektur[1]. So ist z. B. für die Temperatur $x = 15^0$ der plausibelste Wert der Längenkorrektur

$$y_{15} = -0\cdot196 + 0\cdot0212 \times 15 = +0\cdot122.$$

Der mittlere Fehler dieser Korrektur ist durch die Beziehung gegeben

$$\mu_{15}^2 = \mu_y^2 \left(1 + \frac{\xi^2}{i_\xi^2}\right) = \frac{\mu_y^2}{i_\xi^2}\left[i_\xi^2 + (x - s_x)^2\right],$$

das ist in dem behandelten Zahlenbeispiel

$$\mu_{15}^2 = \frac{0\cdot001024}{218\cdot75}\left[218\cdot75 + (15 - 42\cdot5)^2\right] = 0\cdot004564,$$

daher

$$\mu_{15} = \pm 0\cdot068.$$

Für die Temperatur 0^0 ergab sich schon früher als plausibelste Korrektur $A = -0\cdot196$ und als deren mittlerer Fehler $\mu_A = \pm 0\cdot098$.

Für die Temperatur $s_x = 42\cdot5^0$ ist der plausibelste Wert der Längenkorrektur $s_y = +0\cdot705$. Für diese Temperatur ist der mittlere Fehler der Längenkorrektur am kleinsten, und zwar $\mu_y = \pm 0\cdot032$.

Man könnte zur Kennzeichnung der Genauigkeit der Lagenbestimmung der Schaulinie ebensogut die «wahrscheinliche Fehlerhyperbel» verwenden.

Wien, Anfang Mai 1915.

Ueber die Schärfe der Zahlenrechnung.

Von **Baurat Ing. S. Wellisch.**

Nichts, was Menschen unternehmen, ist vollkommen. Aber in allem Tun soll der Mensch versuchen, sich der Vollkommenheit zu nähern. Wenn er sie auch nie ganz erreicht, so soll er sich doch mit einer halbwegs befriedigenden

[1] Vergl. auch R. Schumann, „Bestimmung einer Geraden durch Ausgleichung der beobachteten Koordinaten ihrer Punkte nach der Methode der kleinsten Quadrate". Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse Bd. CXXV, Abt. IIa. 1916.

Annäherung an sie begnügen. Wird dann bei einer Arbeit der Maßstab des Mittelwertes angelegt, so kann es bei gutem Willen niemals Enttäuschungen geben und es wird dankbare Befriedigung gewähren, wenn unser Menschenwerk sich nur ein wenig über den Mittelwert erhebt.

«Absolute Vollkommenheit ist — wie Thomas Carlyle in seinem Werke „Arbeiten und nicht verzweifeln" so schön sich ausdrückt — einmal unerreichbar; kein Zimmermann machte jemals einen mathematisch ganz genauen rechten Winkel; und dennoch wissen alle Zimmerleute, wenn er recht genug ist, und hämmern nicht noch lange daran herum und verlieren ihren Arbeitslohn dadurch, daß sie ihn zu richtig machen. Wer sich zu viel Mühe gibt, verrät ebenso einen krankhaften Geist, wie der, welcher sich zu wenig Mühe gibt. Der gewandte Mann von gesundem Geist wird sich bemühen, auf jedes Geschäft annähernd so viele Mühe zu verwenden, als es verdient, und es dann ohne Gewissensbisse ruhen lassen.»

«Kein Maurer — sagt Carlyle an einer anderen Stelle desselben Buches — baut eine Mauer vollkommen senkrecht; das ist mathematisch unmöglich; es genügt ihm, wenn sie nur einigermaßen senkrecht ist; dann läßt er sie so, als ein guter Maurer, der auch mit seiner Arbeit fertig werden muß. Wehe aber, wenn er zu sehr von der Senkrechten abweicht, wenn er gar Senkblei und Setzwage fortwirft und achtlos Stein auf Stein häuft! — Ein solcher Maurer ist auf bösem Wege. Er hat sich vergessen; aber das Gesetz der Schwerkraft vergißt nicht, sich an ihm zu rächen; er und seine Mauern stürzen zusammen in Schutt und Verwirrung.»

Den richtigen Mittelweg zu finden ist die große Kunst der praktischen Arbeit, auch im Rechnen. Da zeigt sich der Meister in der richtigen Wahl des Maßstabes für die Rechengenauigkeit. Alle Rechnungen sind doch nur Abrundungen; jedes Zuviel oder Zuwenig sind da von Uebel.

Die Genauigkeit oder besser die Schärfe bei geodätischen Rechnungen ist durch den Zweck der Messung bedingt. Nach Schreiber[1] zerfallen die Dreiecksmessungen der Landesaufnahme in bezug auf Rechenschärfe in folgende drei Klassen:

1. Hauptdreiecksketten und -netze,
2. Füllnetze, Zwischenpunkte erster Ordnung und Messungen zweiter Ordnung,
3. Messungen dritter Ordnung.

In diesen Schärfeklassen werden die Dreiecksseiten mit 8, 7 bezw. 6stelligen Logarithmen berechnet und dementsprechend die Winkel mit 3, 2 bezw. 1 Dezimalen der Sekunde, die ebenen Koordinaten mit 3, 3 bezw. 2 Dezimalen des Meters und die geographischen Koordinaten durchwegs mit 4 Dezimalen der Sekunde gegeben. Hiezu bemerkt Generalleutnant Schreiber: «Da in den aufeinanderfolgenden Rangklassen der Messungen die Rechenschärfe und Seitenlänge abnehmen, die Zahl der zu übertragenden Seiten aber erheblich zunimmt, so ist es aus ersterem Grunde möglich und aus letzterem geboten, Reduktionsformeln zum Gebrauch in den niederen Rangklassen zu vereinfachen, so daß die Formel um so einfacher ist, je häufiger sie gebraucht wird.»

[1] Die konforme Doppelprojektion der trigonometrischen Abteilung der Königl. Preußischen Landesaufnahme. 1897, S. 4.

Wenn bei den geodätischen Rechnungen die geographischen Längen und Breiten bis auf 4 Dezimalstellen der Sekunde, d. i. in unseren Breiten bis auf einige Millimeter genau angegeben werden, so geht diese Rechenschärfe selbstverständlich weit über die Messungsgenauigkeit hinaus. Es ist nämlich die Genauigkeit der astronomischen Messungen höchstens 0·1″ und es beträgt der mittlere Fehler einer Dreiecksseite etwa 0·1m. «Die Hinzufügung zweier fernerer Stellen in den Rechnungen — sagt General v. Schmidt[1] — sichert einmal die Messungsergebnisse innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler gegen Veränderungen infolge Abrundungsfehler usw. und gewährt außerdem den Vorteil, auch örtlich nahe gelegene Punkte hinsichtlich ihrer geographischen Lage scharf zu präzisieren.»

Helmert[2] empfiehlt die Berechnung der geographischen Positionen für Landesvermessungen bis auf eine Einheit der 3., 4. oder selbst 5. Dezimale der Sekunde, «da sie eben der Schärfe geodätischer und nicht astronomischer Messungen zu entsprechen haben und da man die Rechnungsschärfe gern 1 bis 2 Stellen weiter als die Messungsschärfe treibt.»

Auch Jordan[3] befürwortet die Ausführung der Rechnung mit mehr Dezimalstellen, selbst wenn die Messungen viel weniger sicher sind. «Hiebei soll die letzte Dezimalstelle keine selbständige Bedeutung haben, sondern nur die vorletzte Stelle vor Abrundungsfehlern schützen. Es ist keine Frage, daß oft mit solchen 0·001″ Ueberfluß an Ziffern geschrieben und gedruckt wird, aber bei langen Ausgleichungsrechnungen kann man genötigt sein, von vornherein auf 0·001″ genau und vielleicht noch schärfer zu rechnen, wenn man am Schlusse 0·01″ noch sicher haben will; bei kürzeren trigonometrischen Berechnungen genügt 0·01″ als letzte Rechenstelle.»

Die Zahlenschärfe bestimmter Konstanten geht oft erheblich über die sachliche Genauigkeit hinaus, denn es ist — nach Jordan — namentlich bei Berechnung von geodätischen Zahlentafeln, wo man wegen Abrundungshäufung oft 3 bis 4 Stellen mehr in Anrechnung stellt, als man schließlich haben will, störend, wenn die letzten Stellen bei dem einen und anderen Rechner nicht übereinstimmen.

Doch wird beim praktischen Rechnen in der Mitführung von Dezimalen oft zu weit gegangen. Warnend setzt Wittstein seinen fünfstelligen Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln als Motto den bekannten Ausspruch des Oberbaurates Hagen voran: «Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.»

Das richtige Anpassen der Rechenschärfe an das Genauigkeitsbedürfnis der Ergebnisse ist für die Oekonomie der Rechenpraxis von größter Bedeutung. Uebertriebene Schärfe im Rechnen durch Mitführen überflüssigen Ziffernballastes bekundet nicht minder Mangel an mathematischem Empfinden, wie zu starkes Abrunden des Zahlenwertes durch unüberlegtes Abwerfen von Dezimalstellen.

[1] Die Projektionsmethode der trigon. Abt. der Königl. Preuß. Landesaufnahme. Zeitschr. f. Verm. 1894, S. 387.

[2] Theorien der Höheren Geodäsie. 1880, S. 486.

[3] Handbuch der Vermessungskunde. 3. Bd. 1916, S. 250.

Es ist ein Zeichen geringen Verständnisses für praktisches Rechnen, wenn die Stellenzahl unrichtig angesetzt wird. Erschwert zu scharfes Rechnen die Arbeit unnötigerweise und verursacht nutzlose Mühe, so leidet bei zu mäßiger Schärfe die Güte der Ergebnisse.

Beherzigenswerte Grundsätze für die einzuschlagende Rechenschärfe gibt Gauß in den «Untersuchungen über Gegenstände der Höheren Geodäsie», erste Abhandlung S. 43, worin er sagt: «In welcher Form man übrigens auch die Resultate einer Messung darstellen mag, so sollte dies konsequenterweise immer in einer Schärfe geschehen, die der Schärfe der Messung selbst entsprechend ist, so daß man aus den Zahlen der Resultate immer rückwärts die beobachteten Größen ebenso scharf wieder finden kann, wie sie gemessen waren. Wählt man also dazu ausschließlich die Längen und Breiten, so würde trigonometrischen Messungen, selbst von nur mäßiger Schärfe, durchaus nicht ihr Recht widerfahren, wenn man die Resultate nur in solcher Schärfe ansetzen wollte, wie Längen und Breiten sich auf astronomischem Wege bestimmen lassen: Man würde dadurch nur einen falschen Maßstab für die Güte der Arbeit erhalten und sich oft gerade der durchgreifendsten Prüfungen dieser Güte entäußern.»

Da geodätische Rechnungen immer nur mehr oder minder scharfe Näherungen bleiben, so hat die Genauigkeit der Rechnung sich stets nach ihrem Zwecke zu richten, wobei nicht genug vor maßlosen Uebertreibungen gewarnt werden muß.

Ein neues Prismenkreuz, das Kreuzvisier von Hensoldt.

Von Hofrat Prof. Dr. E. Doležal.

Prof. v. Bauernfeind hat im Jahre 1851 das einfache Glasprisma und die Kombination zweier einfacher Glasprismen als sogenanntes Prismenkreuz in das Vermessungswesen eingeführt; beide Instrumente fanden ob ihrer unverkennbaren Vorteile gegenüber den reinen Spiegelinstrumenten (Winkelspiegel und Spiegelkreuz) volle Beachtung und verdiente Würdigung.

Im Jahre 1858 wurde von Bauernfeind ein fünfseitiges Prisma besprochen, das 45, 90 und 180° abzustecken gestattet, und Prof. Vogler beschäftigte sich 1876 mit der günstigsten Form desselben.

Im Math.-mech. Institut von Starke & Kammerer in Wien wurde im Jahre 1887 von Starke ein kompendiöses Prismenkreuz angegeben und ausgeführt, das sich vornehmlich in den Ingenieur- und Geometerkreisen Oesterreichs großer Beliebtheit erfreut. Ueber dieses Instrument sowie über die Leistungsfähigkeit der Winkelinstrumente im allgemeinen hat Prof. Lorber 1888 eine verdienstvolle Studie veröffentlicht.

Das Prandtlsche Prisma, gegenwärtig als Pentagon-Prisma angesprochen (in Frankreich von Goulier verwendet), wurde 1890 in die deutsche Literatur eingeführt; nach Zeiß hat 1897 das Optische Institut M. Hensoldt in Wetzlar die Herstellung dieser Instrumente übernommen und sie als Pentagon- und Pentagonalprisma in den Handel gebracht.