Paper-ID: VGI_192212

Ueber die vier-dimensionale Welt

Siegmund Wellisch [1]

[1] *Baurat der Stadt Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **20** (4), S. 49–53

1922

BibTEX:

```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_192212,
Title = {Ueber die vier-dimensionale Welt},
Author = {Wellisch, Siegmund},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {49--53},
Number = {4},
Year = {1922},
Volume = {20}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.
ORGAN
DES
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.
Redaktion: Hofrat Prof. Dr. Ing. h. c. E. Doležal und Baurat Ing. S. Wellisch.

Nr. 4. **Wien, im August 1922.** **XX. Jahrgang.**

Ueber die vier-dimensionale Welt.

Von **S. Wellisch.**

Als eine der größten Errungenschaften der menschlichen Geistesgeschichte gepriesen, hat die heute in den Vordergrund des wissenschaftlichen Interesses gerückte Relativitätstheorie durch Erschütterung des stolzen Gebäudes der klassischen Mechanik die festesten Grundlagen der Naturwissenschaften ins Wanken gebracht und in ihrem Bemühen, die fundamentalsten Begriffe von Raum, Zeit und Masse von allen Unklarheiten und falschen Vorstellungen zu befreien, neu aufzubauen versucht. In Anbetracht der immer wachsenden Gegensätze zwischen den Anhängern und Gegnern der Relativitätstheorie wird der Wunsch, in dieses neue Gebiet einzudringen, gewiß auch jeden nach Naturerkenntnis strebenden und für die Naturwissenschaften eingenommenen Techniker beseelen. So mancher mitten in der Praxis stehende Geometer wird aber aus Zeitmangel zurückschrecken vor der Fülle des mathematischen Aufwandes, der zum vollen Verständnis des nicht einfachen Formelapparates erforderlich ist; er wird sich vielleicht abschrecken lassen durch das äußere Gewand der mit «Divergenz-Skalaren», «Rotations-Vektoren» und «Krümmungs-Affinoren» arbeitenden Theorie, in der das «elektrische Viererpotential» und der «metrische Fundamentaltensor» eine ebenso wichtige Rolle spielen, wie «geodätische Vektorfelder», «Christoffelsche Dreiindizessymbole» usw. Bei dem begreiflicherweise allgemein bestehenden Bedürfnis, dennoch in die modernen Anschauungen der Relativitätstheorie eingeweiht zu werden, habe ich in der «Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines», 1920, S. 257, die «Folgerungen des Relativitätsprinzips» ohne Heranziehung der erwähnten Hilfsmittel zusammengestellt und will ich an dieser Stelle gleichfalls ohne Inanspruchnahme der Vektor- und Tensoranalysis einige Erklärungen geben über die geometrische Beschaffenheit der zum leichteren Verständnis der Relativitätstheorie unerläßlichen Minkowskischen Welt.

Die Relativitätstheorie, gegen die auch schon von hervorragenden Autoritäten die ernstesten Zweifel und Einwände erhoben werden, dringt bis in das geheimnisvolle Reich der vierten Dimension, bei deren Vernehmen den Uneingeweihten ein mystischer Schauer ergreift und selbst den Naturforscher ein Gefühl der Ohnmacht erfaßt. Immerhin will ich es unternehmen, zu einem beherzten Schritt in diese fremde Gedankenwelt einzuladen. Doch nicht mit einem jähen

Sprung, sondern schrittweise wollen wir versuchen, uns wenigstens bis an die Grenze der vierten Dimension heranzuarbeiten. Die hiebei an das Vorstellungsvermögen gestellten besonderen Anforderungen machen es notwendig, vorher über die drei unseren gewohnten Vorstellungen zugänglichen Dimensionen einige erläuternde Betrachtungen anzustellen.

Es gibt Linien, zu deren Vorstellung eine einzige Dimension genügt, wie die Geraden; dann gibt es ebene Kurven, die wie die Schriftzüge auf dem Papier zwei Dimensionen beanspruchen, und endlich räumliche Kurven, die wie die Zickzacklinie des Blitzes einen drei-dimensionalen Raum benötigen. Alle Linien bleiben aber nichtsdestoweniger Gebilde der ersten Dimension, weil zur Beurteilung der Dimension eines Raumgebildes immer nur die eigene Erstreckung und nicht das außerhalb ihr Befindliche in Betracht kommt.

Ein stets nur in einer Linie bewegliches Wesen, das weder links noch rechts, auch nicht nach oben und unten, sondern bloß vor- oder rückwärts blicken kann, wird sich daher von einer ebenen oder gar räumlichen Ausdehnung keine Vorstellung machen können. Aehnlich verhält es sich mit den Geschöpfen der Phantasie, die immer nur in einer Fläche zu leben gezwungen sind; für alles Geschehen außerhalb ihrer Fläche können sie gar keinen Begriff haben, weil sie diese Fläche nicht verlassen können. Sind die «linearen Wesen» in ihrer Beschränktheit zu sagen berechtigt, ihre Welt sei «lang», so sind die «flächenhaften Geschöpfe» bereits in der Lage, ihre Welt als «eben» zu bezeichnen, und sind wir Menschen uns bewußt, daß sie «körperlich» ist.

Die praktische Geometrie der Linearwesen ist sehr einfach; sie kennen nur die Längenmessung, ohne von der Planimetrie und Stereometrie eine Ahnung zu haben. Von ihrer Welt haben sie die Vorstellung, daß sie sich von ihrem Standorte nach vorn und hinten geradlinig bis ins Unendliche erstreckt. Die Geometer dieser Welt werden aber sicher erkannt haben, daß die nach einer Seite fortgesetzte «Gerade» ein Kreisbogen ist, der von der anderen Seite zum Ausgangspunkte wieder zurückkehrt, daß also ihre Welt keineswegs ins Unendliche führt, sondern endlich wie eine Kreislinie und wie diese auch ohne Anfang und ohne Ende, d. i. grenzenlos verläuft. Wollten sie als irdische Wesen den Versuch machen, ihren Wohnsitz mittels eines Maßstabes auszumessen, so würden sie die Länge des Erdumfanges erhalten und behaupten, ihre Welt sei 40.000 *km* lang.

Die Flächengeschöpfe werden von ihrer Welt die Vorstellung haben, daß sie sich von ihrem Standpunkte weg nach allen Seiten hin eben und unbegrenzt ins Unendliche ausbreite. Die Erkenntnis von der Krümmung ihrer Wohnfläche muß ihnen versagt bleiben, weil sie aus ihr nicht heraustreten können. Bei dem Versuche, ihren Wohnsitz auszumessen, würden sie von dem gewählten Nullpunkte aus nach allen Seiten hin ein Dreiecksnetz ausspannen und dabei die Wahrnehmung machen, daß sie mit dem Triangulierungsnetze im Gegenpunkte des gewählten Koordinatenursprunges wieder zusammentreffen. Die Geodäten unter ihnen würden aus den Ergebnissen der Triangulierung den Schluß ziehen, daß ihre Welt keineswegs unendlich ausgedehnt, sondern in ihrem Flächenausmaße endlich sei, daß sie aber wie jede Kugeloberfläche weder Anfang noch Ende hat und daher grenzenlos ist.

Bei einem Kreise unterscheiden wir die Kreislinie von der Kreisfläche. Die in sich geschlossene ein-dimensionale Kreislinie bildet die Begrenzung der zwei-dimensionalen Kreisscheibe. In analoger Weise begrenzt die geschlossene zwei-dimensionale Kugelfläche einen drei-dimensionalen Kugelraum und könnte man nach dem «Prinzip der Kontinuität» geneigt sein, unseren drei-dimensionalen Weltraum als die Begrenzung eines vier-dimensionalen Ueberraumes zu definieren.

Zu demselben Schlusse gelangt man durch folgende Ueberlegung. Zieht man von einem Punkte in der Ebene nach allen Richtungen gerade Strahlen und trägt auf jeden Strahl die gleichlange Strecke r auf, so kommen alle freien Enden dieser Strecken auf einem Kreise zu liegen, der eine Kreisscheibe einschließt. Je größer r gewählt wird, desto weiter dehnt sich der Kreis. Anstatt r geradlinig bis ins Unendliche wachsen zu lassen, führen wir jeden Strahl wie die vom Erdpol ausgehenden Meridiane kreisförmig herum, so daß sie sich im Gegenpol schneiden und im weiteren Verlaufe im Ausgangspunkte wieder zusammenlaufen. In ihrer Gesamtheit bilden sie eine zwei-dimensionale Kugelschale, die einen drei-dimensionalen Kugelraum einhüllt.

Denken wir uns nun analog von einem Punkte im Raume nach allen Richtungen Gerade gezogen und auf allen Geraden die gleich langen Strecken r aufgetragen, so werden alle freien Enden dieser Strecken auf einer Kugelfläche zu liegen kommen, die einen Kugelraum in sich schließt. Je größer r genommen wird, desto weiter dehnt sich die Kugel. Läßt man die radialen Strahlen anstatt sie geradlinig ins Unendliche fortzuführen, den Himmelsraum sphärisch durchmessend, zum Ausgangspunkt wieder zurückkehren, so werden sie in ihrer Gesamtheit den drei-dimensionalen Raum ausfüllen und hiebei in Analogie zu dem ersten Falle eine Art Ueberraum oder nach Riemann einen «sphärischen» Raum einhüllen, der die vier-dimensionelle Welt vorstellt.

Der die Welt umschließende drei-dimensionelle Weltraum, dessen einzelne Punkte ebenso wie die Punkte der Kreislinie und der Kugelfläche in geometrischer Hinsicht alle gleichwertig sind, muß wie alle in sich geschlossenen Raumgebilde ohne Grenzen, aber von endlichem Inhalte sein. Doch ein durch Zusammenfügen von Teilen gebildetes Unendlich gibt es nicht. «Man täuscht sich — sagt Leibniz in seinen neuen Abhandlungen über den menschlichen Verstand — wenn man sich einen absoluten Raum in der Einbildung vorstellen will, der ein aus Teilen zusammengesetztes und unendliches Ganzes sein soll.»

Uebersichtlich zusammengestellt unterscheiden wir nun folgende Gruppen von Raumgebilden:

Geometrische Ausdehnung	Unendlich ausgedehntes Ideal-Gebilde	Geometrisch begrenztes Teil-Gebilde	Grenzenloses geschlossenes Real-Gebilde
1. Dimension	Strahl	Strecke	Kreislinie
2. Dimension	Ebene	Scheibe	Kugelfläche
3. Dimension	Himmel	Kugel	Weltraum

Die Strecke ist als Teil der Kreislinie zwei-dimensional, die Scheibe als ein Stück der Kugeloberfläche drei-dimensional und die Kugel als Bestandteil des Weltraumes vier-dimensional gekrümmt anzusehen. Aber im Bereiche einer kurzen Strecke, einer wenig ausgedehnten Scheibe und einer kleinen Kugel, wie die sichtbare Weltkugel, wird der um eine Dimension höhere Krümmungs-Charakter nicht erkannt.

Wie die ein-dimensionale Kreislinie zu ihrer Entwicklung die zweite Dimension und die zwei-dimensionale Kugelschale die dritte Dimension benötigt, so setzt das bloße Vorhandensein des drei-dimensionalen Weltraumes eine vierte Dimension voraus. Aber diese vierte Dimension haben wir nicht als eine übernatürliche Erweiterung des Raumes zu einem unserer Vorstellungsgabe unzugänglichen Ueberraum zu betrachten, sondern als die zur vollständigen Beschreibung eines bloß dem Orte nach festgestellten Naturvorganges noch notwendige Zeitangabe. Gewissermaßen dient ja die Zeit auch zur näheren Ortsbestimmung, indem durch sie der Augenblick angezeigt wird, zu welchem ein Körper einen bestimmten Ort einnimmt.

Durch Multiplikation der Zeit t mit der Lichtgeschwindigkeit c nimmt sie geradezu die Dimension einer Länge ct an, d. i. nämlich der in der betreffenden Zeit vom Licht zurückgelegte Weg. Wie in der Astronomie unter Zugrundelegung der Lichtgeschwindigkeit sehr große Entfernungen durch die Zeit, z. B. durch Lichtjahre gemessen werden, so kann man umgekehrt von einem Kilometer Zeit, d. i. ein Dreihunderttausentel einer Zeitsekunde sprechen. Dem Faktor c fällt hiebei die Aufgabe zu, die Zeit als gleichförmig wachsende Größe zu kennzeichnen.

Zur eindeutigen, raum-zeitlichen Festlegung eines Punktes oder zur raumzeitlichen Beschreibung einer physikalischen Erscheinung sind also vier Bestimmungsstücke erforderlich: Drei Raumkoordinaten x, y, z und ein Zeitwert t. Ein so in einem bestimmten Augenblicke festgelegtes Wertsystem x, y, z, t wird «Weltpunkt» genannt. Er fixiert ein im Orte x, y, z zur Zeit t stattfindendes Ereignis. Stetig aneinander gereihte Weltpunkte bilden eine «Weltlinie», sozusagen «das Bild für den Lebenslauf eines materiellen Punktes». Die hiebei zurückgelegte Bahn befolgt wie die Gerade in der Euklidischen Geometrie und wie der Lichtstrahl in der vier-dimensionalen Welt das Gesetz des kürzesten Weges bei kürzester Ankunft: Das Prinzip des geringsten Zeit-Weg-Aufwandes. Die Weltlinie ist sohin eine geodätische Linie im Raum-Zeit-Gebiete.

Was gewöhnlich durch eine ein-dimensionale Bahnkurve im drei-dimensionalen Raume dargestellt wird, ist die Projektion der Weltlinie auf den drei-dimensionalen Raum, die daher nur ein Bild der Bahngestalt, sonst aber keine weiteren Angaben der Bewegung liefert. Erst durch das Hinzutreten der Zeit als vierte Koordinate wird die drei-dimensionale Projektion zur Weltlinie, aus der auch alle übrigen Eigenschaften, wie die Geschwindigkeit und die Zeit, die zu irgend einem Orte der Bahn gehören, erkannt werden können.

Die Mannigfaltigkeit aller möglichen Wertsysteme x, y, z, t heißt die «Welt»; sie ist im raum-zeitlichen Sinne vier-dimensional und hat demnach Ausdehnungen nach vier Richtungen hin: Länge, Breite, Tiefe und Dauer. «In der Welt haben wir unendlich viele Räume, analog wie es im drei-dimensionalen Raume unendlich viele Ebenen gibt.» (Minkowski.) Und wie jede Ebene einen «Querschnitt» des gewöhnlichen Raumes darstellt, so darf man diese Räume als «Querräume» der vier-dimensionalen Welt bezeichnen. «Die Zeit aber erscheint wie ein Strom, der durch alle diese Querräume in senkrechter Richtung hindurchfließt.» (Palágyi.) An dieses symbolische Bild muß man festhalten, wenn man den drei Achsen des gewöhnlichen, rechtwinkligen Koordinatensystems noch eine vierte Achse, die Zeitachse, so angliedert, daß sie auf den drei Raumachsen gleichzeitig senkrecht steht.

Die mathematische Gleichwertigkeit der Zeit mit den drei Richtungen im Raume erkannt zu haben, ist das Verdienst des Göttinger Mathematikers Professor Dr. Hermann Minkowski. Er fand, daß der «Abstand» zweier unendlich nah benachbarter Punkte im Raum-Zeit-Gebiete oder zweier physikalischer Ereignisse für alle Galilei-Systeme durch einen quadratischen Differentialausdruck von konstanter Größe bestimmt ist, worin die Zeitkoordinate genau dieselbe Rolle spielt, wie die drei Raumkoordinaten, und kein Unterschied mehr gemacht wird zwischen einer Raumstrecke und einer Zeitstrecke. Die Welt aber kann demzufolge als ein vier-dimensionales Gebilde aufgefaßt und formal ebenso behandelt werden, wie der drei-dimensionale Raum der Euklidischen Geometrie. —

Wenn unser großer Richard Wagner den Gurnemanz zu Parzival sagen läßt: «Du siehst, mein Sohn, zum Raum wird hier die Zeit», so gewinnen diese ahnend ausgesprochenen Dichterworte im Minkowskischen Denkgebilde ihre mathematisch-physikalische Bedeutung.

Lineare Meridiankonvergenz der Randlinien der Katastersektionen.

Von Hofrat Prof. Dr. E. Doležal.

(Fortsetzung.)

Da die Größen γ_0 und $\frac{L}{N}$ klein sind, so kann man nach Reihen entwickeln, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{L}{N} &= \frac{L}{N} - \frac{1}{6}\frac{L^3}{N^3} + \ldots\ldots \\ \gamma_0 &= \operatorname{tang}\gamma_0 - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\gamma_0 + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5\gamma_0 - \ldots\ldots \end{aligned}\right\},$$

so daß für die Meridiankonvergenz vorerst erhalten wird:

$$\gamma_0 = \left(\frac{L}{N} - \frac{1}{6}\frac{L^3}{N^3} + \ldots\right)\operatorname{tang}\varphi_0 - \frac{1}{3}\left(\frac{L}{N} - \frac{1}{6}\frac{L^3}{N^3} + \ldots\right)^3\operatorname{tang}^3\varphi_0 + \ldots\ldots$$

Nach Vernachlässigung der nur geringen Einfluß übenden Glieder höherer Ordnung wird erhalten: