Paper-ID: VGI_192216

Eine einfache Flächeneinteilungsaufgabe (Parallel-Trapezteilung)

Franz Aubell [1]

[1] *o. ö. Professor der Montan. Hochschule in Leoben*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **20** (6), S. 81–84

1922

BibTeX:

```
@ARTICLE{Aubell_VGI_192216,
Title = {Eine einfache Fl{\"a}cheneinteilungsaufgabe (Parallel-Trapezteilung)
   },
Author = {Aubell, Franz},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {81--84},
Number = {6},
Year = {1922},
Volume = {20}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.
Redaktion: Hofrat Prof. Dr. Ing. h. c. E. Doležal und Baurat Ing. S. Wellisch.

Nr. 6. **Wien, im Dezember 1922.** **XX. Jahrgang.**

Eine einfache Flächeneinteilungsaufgabe.

(Parallel-Trapezteilung).

Von Dr. F. Aubell, o. ö. Professor der Montan. Hochschule in Leoben.

Ein bei Flächenteilungen nicht selten vorkommender Fall ist der, daß von einem Vierecke beliebiger Form ein Flächenstreifen von gegebener Größe F derart abzutrennen ist, daß die Teilungslinie zu einer Seite c des Vierecks gleichgerichtet ist. Auf diesen letzteren Umstand legt der Landwirt besonderes Gewicht, weil die zur gegebenen Seite gleichlaufend gezogenen Ackerfurchen dann die ganze Fläche durchsetzen. Diese keinesfalls schwierige Aufgabe wurde verschieden gelöst. Die eine Lösung (siehe hiezu Hartner-Doležal, Handbuch der Nied. Geodäsie, 1910, Bd. I, S. 1103) setzt voraus, daß man zunächst zur Seite c (Darst. 1) im Abstande p eine Parallele absteckt und aus dem Unter-

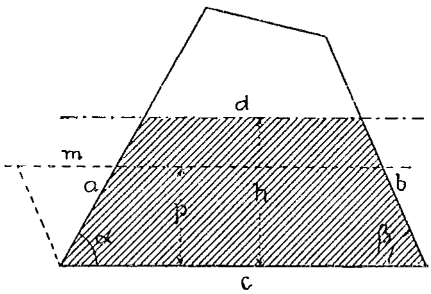

Fig. 1.

schiede m der beiden gleichgerichteten Trapezseiten und deren Abstand p die Höhe h des abzuschneidenden Trapezes nach dem Ausdrucke berechnet:

$$h = -\frac{cp}{m} + \sqrt{\left(\frac{cp}{m}\right)^2 + \frac{2pF}{m}}.$$

Dieser Rechenvorgang wird dann unzweckmäßig, wenn der Wert m klein wird, wenn also die zwei Nebenseiten a und b nahezu gleichgerichtet sind. Es wird außerdem im Felde das Abstecken einer zur Seite c gleichgerichteten Geraden und deren Längenmessung notwendig, was mit Rücksicht auf die Bewachsung der Parzelle nicht immer zulässig sein kann. An der genannten Stelle sind noch Näherungslösungen angegeben, die entweder auf die strenge Gleichrichtung der beiden Geraden verzichten oder bei deren Erhaltung die verlangte Fläche nur in genügender Näherung ergeben.

Einen anderen Weg gibt Jordan-Eggert (Handbuch d. Verm.-Kde. 1914, 2. Bd., S. 120) an, indem er außer der Seite c noch die zwei Winkel α und β als gegeben annimmt, eine Voraussetzung, die jedenfalls am leichtesten durch unmittelbare oder mittelbare Messung erfüllbar ist. Hier ergibt sich die Länge d der Trennungslinie mit $d = \sqrt{c^2 - 2F\,(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)}$ und die zugehörige Höhe des Trapezes mit $h = \frac{2F}{c+d}$. Es kann aber auch die Höhe h unmittelbar aus der Beziehung erhalten werden:

$$h = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\left(c - \sqrt{c^2 - 2F\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}}\right).$$

Dieser Ausdruck nähert sich dem Symbol der Unbestimmtheit $\infty . 0$, wenn die Winkel α und β fast 90^0 sind, oder allgemein, wenn sie sich nahezu zu 180^0 ergänzen, in welchem Falle mit den von Jordan angegebenen Beziehungen zu rechnen ist. Verfolgt man den zuletzt angeschriebenen Ausdruck weiter und setzt $\frac{F}{c} = h_R$ der Höhe des flächengleichen Rechtecks, so erhält man

$$h = c\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2h_R}{c} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}}\right).$$

Setzt man weiters

$$c\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{c}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = c',$$

so wird

$$h = c' . \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2h_R}{c'}}\right)$$

und mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$= c' . \left[1 - (1 - \frac{h_R}{c'} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{h_R}{c'}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{h_R}{c'}\right)^3 - \tfrac{5}{8}\left(\frac{h_R}{c'}\right)^4 - \ldots .\right],$$

was zur Formel führt:

$$h = h_R + \frac{c'}{2} \cdot \left[\left(\frac{h_R}{c'}\right)^2 + \left(\frac{h_R}{c'}\right)^3 + \tfrac{5}{4}\left(\frac{h_R}{c'}\right)^4\right]. \quad \ldots\ldots\ \mathrm{I}$$

Diese Beziehung, die insofern bequem auszuwerten ist, als die Ergänzungsglieder mit dem Rechenschieber gerechnet werden können, stellt eine konvergierende Reihe vor, wenn die Bedingung erfüllt ist, daß

$$\frac{2h_R}{c'} < 1 \quad \text{oder} \quad F < \tfrac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta};$$

sie wird unbrauchbar, wenn die Konvergenz zu langsam vor sich geht, was dann eintritt, wenn die für h_R geltende Ungleichung sich der Gleichung nähert; sie ist daher nur zweckmäßig, wenn c gegenüber h_R groß ist und die

Winkel α und β größer als 45^0 sind. Eine rascher konvergierende und fast ebenso leicht auswertbare Reihe erhält man, wenn man fortgesetzt die Dreiecksflächen, die dem Trapez gegenüber dem gleichhohen Rechtecke fehlen, in weitere Rechtecke verwandelt, wobei deren Höhen rasch abnehmen (Darst. 2).

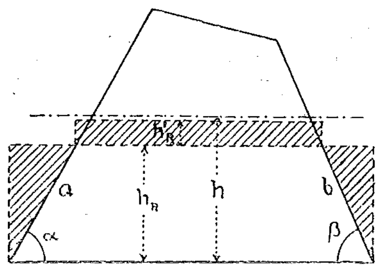

Fig. 2.

Ist F die abzuschneidende Fläche, so ist die Höhe des dieser Fläche gleichenden Rechtecks, wie schon früher angegeben, $h_R = \frac{F}{c}$. Das Trapez mit der Höhe h_R ist gegenüber der abzutrennenden Fläche F zu klein um den Betrag $\frac{1}{2} h_R^2$ (ctg α + ctg β), der sich als Rechteck von der Höhe h_R' ausdrücken läßt, so daß die Gleichung besteht: $\frac{1}{2} h_R^2 (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) = h_R' \, [c - h_R (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)]$, aus welcher wieder unter Heranziehung von $c' = \frac{c}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$ für h_R' der Wert sich ergibt: $h_R' = \frac{1}{2} \frac{h_R^2}{c' - h_R}$. Ebenso folgt für das nächste anzubringende Rechteck die Höhe $h_R'' = \frac{1}{2} \frac{h_R'^2}{c' - (h_R + h_R')}$ usw., wodurch für h die Beziehung folgt:

$$h = h_R + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{h_R^2}{c' - h_R}}_{h_R'} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{h_R'^2}{c' - (h_R + h_R')}}_{h_R''} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{h_R''^2}{c' - (h_R + h_R' + h_R'')}}_{h_R'''} + \ldots$$

Die auf den Nebenseiten aufzutragenden Abschnitte a und b (Darst. 1) ergeben sich schließlich mit $a = \frac{h}{\sin\alpha}$, $b = \frac{h}{\sin\beta}$. Die zuletzt erhaltene Gleichung erfordert die genauere Auswertung der Größen h_R und c', während die übrigen Zuschlagsglieder mit dem Rechenschieber gerechnet werden können. Ist die Abtrennung der Fläche nach der divergenten Seite des Trapezes hin durchzuführen, so erfolgt die Berücksichtigung dieses Umstandes durch das Vorzeichen von ctg α und ctg β von selbst.

Als Beispiele für die Anwendung der Formeln I und II sollen die im Handbuche von Jordan-Eggert a. a. O. gegebenen Annahmen durchgerechnet werden: $c = 80{\cdot}20\,m$, $\operatorname{ctg}\alpha = -0{\cdot}1375$, $\operatorname{ctg}\beta = +0{\cdot}8688$, $F = 1142{\cdot}15\,m^2$; sonach ist $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = +0{\cdot}7313$ und $c' = \frac{80{\cdot}20}{0{\cdot}7313} = 109{\cdot}67\,m$,

$$h_R = \frac{1142{\cdot}15}{80{\cdot}20} = 14{\cdot}24_1\,m.$$

Nach Formel I erhält man

$$h = 14{\cdot}24_1 + 54{\cdot}83_5\,(0{\cdot}01686 + 0{\cdot}00219 + 0{\cdot}00036)$$
$$= 14{\cdot}24_1 + 1{\cdot}06_4 = 15{\cdot}31 \text{ (nach Jordan-Eggert } 15{\cdot}31).$$

Unter Anwendung von Formel II ergibt sich:

$$h = 14{\cdot}24_1 + \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot\frac{14{\cdot}24_1{}^2}{109{\cdot}67 - 14{\cdot}24}}_{1{\cdot}06_3} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1{\cdot}06_3{}^2}{109{\cdot}67 - (14{\cdot}24 + 1{\cdot}06)}}_{0{\cdot}00_6}$$

$= 14{\cdot}24_1 + 1{\cdot}06_9 = 15{\cdot}31$. Hier ist die Auswertung des dritten Zuschlagsgliedes wegen der rascheren Konvergenz der Reihe erspart.

Anmerkung: Mit dieser Aufgabe und hieher gehörigen Fragen beschäftigten sich u. a.: Ehrhardt, Zeitschr. f. V. 1902, S. 317, „Über die Verwendung einer Tafel von Achtelquadraten zur Flächenberechnung und -Teilung"; Fenner, Zeitschr. f. V. 1884, S. 528, „Die Parallelteilung eines Trapezes"; Fretwurst, Zeitschr. f. V. 1893, S. 371, „Teilung des Trapezes"; Haselmayr, Zeitschr. f. V. 1882, S. 552, „Hilfstabellen zum praktischen Gebrauche bei der Teilung trapezförmiger Grundstücke"; Hintze, Zeitschr. f. V. 1889, S. 468, „Die Teilung der Grundstücke"; Jordan, Zeitschr. f. V. 1884, S. 90, „Über Parallelteilung"; Kroll, Zeitschr. f. V. 1916, S. 227, 1917, S. 57, „Über Teilungen von Paralleltrapezen und Dreiecken"; Vogler, Zeitschr. f. V. 1884, S. 227, „Über Proportionalteilung an polygonal begrenzten Grundstücken", Wildt, Zeitschr. f. V. 1902, S. 477, „Über die Proportionalteilung an polygonal begrenzten Grundstücken"; Forts. 1904, S. 665; Wilski, Zeitschr. f. V. 1885, S. 289, „Die Flächeninhaltsberechnung und Flächenteilung des Vierecks nach der Koordinatenmethode"; Zimmermann, Zeitschr. f. V. 1894, S. 321, „Hilfsmittel zum praktischen Gebrauch bei der Teilung der Grundstücke."

Ein Dreipunkte-Problem.

Von Dr. Fr. Aubell, o. ö. Professor der Montan. Hochschule in Leoben.

Drei Punkte, die starr zueinander festgelegt sind und von denen je ein Triangulierungspunkt sichtbar ist, sollen in das Koordinatensystem der letzteren eingeschaltet werden. Die Lösung dieser Aufgabe wurde in verschiedener Weise durchgeführt; man vergleiche hiezu: Laska, Ztschr. f. Vermw. 1900, S. 565; Löschner, ebenda 1901, S. 485; Puller, ebenda 1902, S. 456; Klingatsch, Österr. Ztschr. f. Vermw. 1911, S. 212. Die in folgendem gegebene Lösung benützt die Heranziehung eines Hilfspunktes.

Die Entfernungen zwischen den drei einzuschaltenden Punkten P, Q, S sowie die in der Darstellung bezeichneten Winkel nach den drei gegebenen Punkten L, M, R seien durch unmittelbare oder mittelbare Messung erhalten worden. Aus diesen Angaben sind bekanntlich die Dreiecke PQr, QlS und somit auch das Dreieck lmr mit den Seiten a und b bestimmt. Der Hilfspunkt H ergibt sich durch Rückwärtseinschneiden mit den Winkeln α und β aus den Punkten L, M, R. Das Viereck $Hrml$ vermittelt nun die weitere Berechnung. Es ist

$$\varkappa + \lambda = 180 - (\varphi + \psi),$$

ferner

$$\frac{\sin\varkappa}{\sin\lambda} = \frac{\sin(\varphi + \alpha)\,.\,a}{\sin(\psi + \beta)\,.\,b} = \operatorname{tg}\mu,$$