Paper-ID: VGI_192218

Brochsches Diagramm für die Korrektion der Lattenhöhe beim Nivellieren mit Libellenausschlägen

Eduard Doležal [1]

[1] *Hofrat, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **20** (6), S. 89–93

1922

BibTEX:

```
@ARTICLE{Dolezal_VGI_192218,
Title = {Brochsches Diagramm f{\"u}r die Korrektion der Lattenh{\"o}he beim
   Nivellieren mit Libellenausschl{\"a}gen},
Author = {Dole{\v z}al, Eduard},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {89--93},
Number = {6},
Year = {1922},
Volume = {20}
}
```

Brochsches Diagramm für die Korrektion der Lattenhöhe beim Nivellieren mit Libellenausschlägen.

Von Hofrat Prof. Dr. E. Doležal.

Im Jahre 1891 wurde durch den damaligen Direktor des Triangulierungs- und Kalkulbureaus beim österreichischen Kataster A. Broch eine kleine Instruktion:

„Anleitung zur Durchführung von Nivellements als Ergänzung zu den im Abschnitte VII. der Instruktion für Polygonal-Vermessungen angeordneten Höhenmessungen"

ausgearbeitet, die den Zweck verfolgt, sichere Anhaltspunkte für die genaue Bestimmung der absoluten Höhen der im Dreiecks- und Polygonnetze festgelegten Punkte, sowie für die Ausgleichung der unvermeidlichen Differenzen, die bei der Berechnung der Höhenunterschiede aus Zenitdistanzen auftreten, zu gewinnen.

Als Methode des Nivellierens ist jene aus der Mitte mit gleichen Zielweiten vorgeschrieben, die zwecks Orientierung der Standpunkte für die Latte beim Rück- und Vorblicke nur approximativ durch Schrittmaß zu ermitteln sind. Das Nivellierinstrument besitzt ein drehbares Fernrohr mit Aufsetzlibelle und eine Stampfersche Meßschraube. Im Fernrohre sind neben dem Nivellierfaden in gleichen Abständen oben und unten distanzmessende Fäden angebracht.

Die Bestimmung der Lattenhöhe erfolgt in zwei Lagen des Fernrohres: Okulartrieb oben und Okulartrieb unten; die Lattenhöhe wird nicht bei einspielender Nivellierlibelle abgelesen, sondern es werden Ausschläge der Libelle in normaler und umgesetzter Lage der Aufsetzlibelle bei Okulartrieb oben und unten, also in Gänze vier ermittelt und zur Verschärfung der Ergebnisse wird die Lesung der Lattenhöhe an drei Horizontalfäden vorgenommen und dann reduziert.

Bei diesem Verfahren in der Bestimmung der Lattenhöhe mittels Libellenausschlägen ist die Ermittlung der Lattenkorrektur $\triangle L$ nötig, die an der auf den Mittelfaden reduzierten Lattenhöhe L angebracht werden muß, um die der horizontalen Lage der Nivellierebene entsprechende Lattenhöhe $L \pm \triangle L$ zu erhalten.

Broch hat hiefür ein einfaches Diagramm angegeben, dessen Theorie Anlage und Verwendung entwickelt werden sollen.

Daran wird sich die Besprechung eines Nomogrammes anschließen, das demselben Zwecke wie das Diagramm dienen kann.

I. Diagramm.

Ist die Nivellierebene, bestimmt durch den Mittelpunkt des Fernrohrobjektives und den mittleren Horizontalfaden des Fadenkreuzes, unter dem Winkel $\pm \alpha$ zum Horizonte geneigt, so ist die Korrektion in der Lattenhöhe bei der Zielweite d:

$$\triangle L = d \operatorname{tang} \alpha = d\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

oder

$$\triangle L = \mp \frac{\alpha''}{206.265''} d, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{I}$$

wobei α und die Korrektion $\triangle L$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, d. h. hebt sich die Nivellierebene über den Horizont, so muß $\triangle L$ subtrahiert, senkt sie sich hingegen, so muß $\triangle L$ zu L addiert werden, um die der horizontalen Lage der Nivellierebene entsprechende Lattenhöhe zu erhalten; es ist daher die zur Berechnung der Höhenunterschiede erforderliche Lattenhöhe $L \mp \triangle L$.

Die Lesungen an den distanzmessenden Fäden geben durch ihre Differenz jenen Lattenabschnitt l, der indirekt die Zielweite durch die Distanzgleichung bietet:

$$d = K l + k, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

worin K und k die Konstanten dieser Gleichung bedeuten.

Bezüglich der Bestimmung des Neigungswinkels α wird nachstehend der Vorgang hiezu kurz geschildert.

Unter Voraussetzung eines rektifizierten Nivellierinstrumentes kann beim Nivellieren mit Libellenausschlägen aus diesen die Neigung α der Nivellierebene zum Horizonte bestimmt werden.

Die Beobachtung der Libellenausschläge erfolgt mit der als Nivellierlibelle dienenden, auf die Ringe aufsetzbaren Reiterlibelle.

In der Lage des Fernrohres: Okulartrieb oben, Aufsetzlibelle in normaler Lage seien die Lesungen an den Rändern der Libellenblase l_1, r_1 und daher die Lage der Blasenmitte $m_1 = \frac{l_1 + r_1}{2}$; nach Umsetzung der Libelle wird erhalten: $l_2, r_2 : m_2 = \frac{l_2 + r_2}{2}$. Nun wird das Fernrohr in seinen Lagern gedreht: Okulartrieb unten, Libelle in umgesetzter Lage, beobachtet: l_3, $r_3 : m_3 = \frac{l_3 + r_3}{2}$; hierauf die Libelle umgesetzt, so daß sie in die normale Lage gelangt: l_4, $r_4 : m_4 = \frac{l_4 + r_4}{2}$.

Bedeutet γ'' den Winkelwert eines Skalenteiles der Aufsatzlibelle, so bestehen die bekannten Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l}(m_2 - m_1)\,\gamma'' = 2\alpha'' \\ (m_4 - m_3)\,\gamma'' = 2\alpha''\end{array}\right\},$$

bzw.

$$\alpha'' = \frac{\gamma''}{4}\left[(m_1 - m_2) + (m_3 - m_4)\right] = \frac{\gamma''}{4} a, \quad \ldots \quad 3)$$

wobei a den doppelten Libellenausschlag bezeichnet.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen 2) und 3) wird die Lattenkorrektion:

$$\triangle L = \mp \frac{\gamma''}{4 \times 206.265''} (K l + k)\, a \doteq \mp \frac{\gamma''}{4 \times 206.265''} K l a. \quad \ldots \quad \mathrm{II}$$

Vereinigt man alle Konstanten in vorstehender Gleichung, so kann

$$\frac{\gamma'' K}{825.060''} = \frac{1}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

eingeführt werden, so daß die Lattenkorrektion in der Form erscheint:

$$\triangle L = \mp \frac{a l}{p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{III}$$

Unter der Annahme eines Nivellierinstrumentes aus der mathematisch-mechanischen Werkstätte von Starke & Kammerer Nr. 5.205, für welches

$$\gamma'' = 4{\cdot}85'' \quad \text{und} \quad K = 209{\cdot}23$$

gelten, wird die Reziproke der Konstanten p und diese selbst:

$$\frac{1}{p} = \frac{4{\cdot}85''.\,209{\cdot}23}{825.060''} = 0{\cdot}001\;229\;91$$

$$p = 813{\cdot}055,$$

so daß die Gleichung für die Lattenkorrektion dieses Instrumentes (in Millimetern) nach Einführung der gewonnenen Werte in die Gleichung III) lautet:

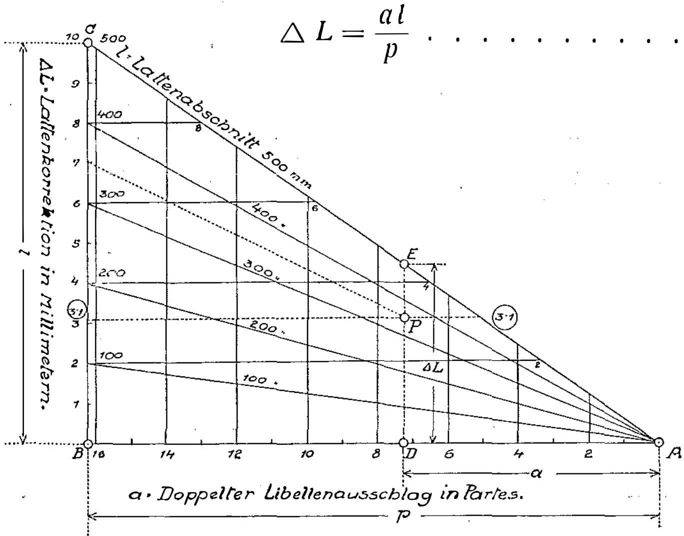
$$\triangle L = \mp 0{\cdot}001\;229\;91\, a l = \mp \frac{a l}{813{\cdot}055}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{IV}$$

wobei a und l die in jedem einzelnen Falle beim Rück- und Vorblick zu bestimmenden Werte (a der doppelte Libellenausschlag in Partes und l den Lattenabschnitt zwischen den distanzmessenden Fäden) sind.*)

D i a g r a m m. Von den bekannten Beziehungen in ähnlichen Dreiecken geleitet, hat B r o c h ein Diagramm beim österr. Kataster eingeführt, das an der Hand der nachstehenden Figur begründet wird.

Werden $\overline{AB} = p$, $\overline{BC} = l$, $\overline{AD} = a$ und $\overline{DE} = \triangle L$ gesetzt, so erhält man aus den ähnlichen Dreiecken ABC und ADE:

$$\triangle L = \frac{a l}{p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5)$$



Um auf dem Diagramm $\triangle L$ mit ausreichender Genauigkeit bestimmen zu können, müssen bestimmte Annahmen getroffen werden.

*) Vgl. W e l l i s c h: Das Nivellement der zweiten Hochquellenleitung (Z. f. V. 1900, S. 242 und 288).

Falls die größte Lattenkorrektion $\triangle L = 10\,mm$ und der größte Lattenabschnitt für die Distanzbestimmung $l = 500\,mm$ betragen sollen, wird bei beliebiger Annahme von $\overline{BC}$ diese Strecke in 50 gleiche Teile geteilt, so daß $\frac{10\,mm}{50} = 0{\cdot}2\,mm$ dem kleinsten Intervalle von $\triangle L$ entspricht und durch Schätzung $0{\cdot}02\,mm$ der Lattenkorrektion erhalten werden können. Der Lattenabschnitt l wird von 5 zu 5 Intervallen mit 50, 100, 150, 200, 250, 300, ... 500 versehen, während die korrespondierenden Teilstriche für $\triangle L$ mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... 10 mm beschrieben werden müßten. Wir sehen, daß zufolge der Radianten für $\triangle L$ auf der Kathete BC eine Doppelskala angebracht werden sollte.

Macht man den Pars einer Libellenskala im Diagramm 1 cm, so müssen der Proportionalität halber auf AB einem Teile der a-Skala 50 Teile des p-Maßstabes entsprechen; weiters wird daher ein Teil von $p\ \frac{1}{50}\,cm$ und da $p = 813{\cdot}055$ ist, wird die Kathete $AB = \frac{813{\cdot}055}{50}\,cm = 16{\cdot}2611\,cm$. Die Graduierung der Skala auf AB erfolgt mit 1, 2, 3, ... 16 Partes, wobei eine sichere Schätzung auf 0·1 Pars möglich ist.

Die Parallelen zur Kathete AB für die Skalenpunkte von l bzw. $\triangle L$ schneiden auf der Hypothenuse Punkte aus, die mit gleicher Bezifferung versehen werden können wie die l- und $\triangle L$-Skala; diese Hypothenusenteilung gestattet eine schärfere Bestimmung von $\blacktriangle L$, als dies auf der Kathete möglich ist.

So ist das Diagramm, das auf beigefügter Tafel in wahrer Größe reproduziert erscheint, entstanden; es trägt drei Teilungen: die Teilung für den doppelten Libellenausschlag a, die Radiantenteilung für den Lattenabschnitt l und für die Lattenkorrektion $\triangle L$; für letztere ist sowohl auf der entsprechenden Kathete als auch auf der Hypothenuse eine Teilung vorhanden.

Beispiel: Für $a = 5$ Partes und $l = 350\,mm$ soll $\triangle L$ bestimmt werden. Die Horizontale, die durch den Schnittpunkt der durch $a = 5$ gehenden Vertikalen mit dem Radialstrahl $l = 350\,mm$ hindurchgeht, trifft die Skala für die Lattenkorrektion bei $\triangle L = 2{\cdot}15\,mm$; zur Kontrolle findet man, daß dieselbe Horizontale die Hypothenuse an einer Stelle schneidet, bei welcher derselbe Wert für $\triangle L$ sich befindet.

II. Nomogramm.

Die Lattenkorrektion $\triangle L = \frac{a\,l}{p}$, worin $\frac{1}{p} = \frac{\gamma''\,K}{825{\cdot}060''}$ . . . . . 6)

bedeutet, nimmt mit Rücksicht der speziellen Werte für

$$\gamma = 4{\cdot}85'',\ K = 209{\cdot}23,\ \text{also}\ p = 813{\cdot}055$$

die besondere Form an:

$$\triangle L = \frac{a\,l}{813{\cdot}055} \quad \text{. . . . . V}$$

Will man ein kollineares Nomogramm mit drei Parallelen herstellen, so nimmt man von Gleichung 6) den Logarithmus:

$$\log a + \log l - \log (p \,.\, \triangle L) = 0, \quad \ldots \ldots \quad 7)$$

bringt diese Gleichung mit der Normalgleichung des Punktes in Linienkoordinaten

$$r\,u + s\,v + t = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

in Verbindung und setzt:

$$\begin{aligned} u &= l_1 \log a \\ v &= l_2 \log l \end{aligned} \quad , \quad \text{woraus} \quad \left.\begin{aligned} \log a &= \frac{u}{l_1} \\ \log l &= \frac{v}{l_2} \end{aligned}\right\} ;$$

nach Einführung dieser Werte in die Gleichung 7) erhalten wird:

$$l_2 u + l_1 v - l_1 l_2 \log (p \,.\, \triangle L) = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad 9)$$

Die Gleichung 9), mit 8) verglichen, gibt:

$$r = + l_2, \; s = + l_1, \; t = - l_1 l_2 \log (p \,.\, \triangle L), \quad \ldots \ldots \quad 10)$$

worin l_1 und l_2, die sogenannten Moduli, im speziellen Falle geschickt gewählt werden müssen, um günstige Teilungen zu erhalten.

Die Graduierung der zwei, im gewählten Abstande $2d = 110\,mm$ angeordneten Skalen u und v, wird ermittelt nach den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &u\text{-Skala für } a \ldots \; u = l_1 \log a = 166\,mm \log a \\ &v\text{-Skala für } l \ldots \; v = l_2 \log l = \;\, 74\,mm \log l \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad \mathrm{VI}$$

Die dritte, gesuchte w-Skala für $\triangle L$ wird bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} &a) \text{ der Lage nach durch } \quad x = d\,\frac{r-s}{r+s} = +\,21{\cdot}08\,mm \text{ d. h.} \\ &\quad\;\text{rechts von der Mittellinie der } u\text{- und } v\text{-Skala,} \\ &b) \text{ der Graduierung nach durch } y = -\frac{t}{r+s} = 5{\cdot}1833 \log (p \,.\, \triangle L) \end{aligned}\right\}, \quad . \;\mathrm{VII}$$

wobei zu beachten ist, daß die Anfangspunkte der 3 Skalen in einer Geraden liegen müssen.

Werden nach VI und VII die Teilungen der drei Skalen berechnet, die drei Parallelen in den Normalabständen $d = \pm\,55\,mm$ bzw. $21{\cdot}08\,mm$ von der oben erwähnten nicht gezeichneten Mittellinie geführt, die berechneten Intervalle aufgetragen und entsprechend mit a, l und $\triangle L$ beziffert, so ist das Nomogramm gebrauchsfähig.

Beispiel: Unter der Annahme $l = 95\,mm$, $a = 5{\cdot}3$ Partes werden diese Punkte auf der l- und a-Skala gesucht, durch eine Gerade, Indexlinie genannt, verbunden, dann kann beim Schnittpunkte derselben mit der $\triangle L$-Skala die gesuchte Lattenkorrektion mit $0{\cdot}62\,mm$ abgelesen werden.

Anmerkung. Einige Versuche mittels der beiden beschriebenen Hilfsmittel zur Bestimmung von $\triangle L$ haben ergeben, daß das Nomogramm betreffs der zu erzielenden Genauigkeit dem Diagramm nicht nachsteht.