Paper-ID: VGI_192407

Anpassung einer Neumessung an den Stand eines Operates älteren Ursprungs

Artur Morpurgo [1]

[1] *Hofrat i. R., Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **22** (4), S. 59–74

1924

BibTEX:

```
@ARTICLE{Morpurgo_VGI_192407,
Title = {Anpassung einer Neumessung an den Stand eines Operates {\"a}lteren
   Ursprungs},
Author = {Morpurgo, Artur},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {59--74},
Number = {4},
Year = {1924},
Volume = {22}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.

Redaktion: Hofrat Prof. Dr. Ing. h. c. E. Doležal und Oberstadtbaurat Ing. S. Wellisch.

Nr. 4. **Wien, im Dezember 1924.** **XXII. Jahrgang.**

Anpassung einer Neumessung an den Stand eines Operates älteren Ursprunges.

Von Hofrat i. R. Ing. Artur Morpurgo in Graz.

Bei Vermessungen, welche hauptsächlich zum Zwecke der Fortführung eines Operates älteren Ursprunges vorzunehmen sind, wird die Anwendung einer präz sen Aufnahmsmethode nur dann gerechtfertigt erscheinen, wenn bei der Abbildung des Aufnahmsobjektes die bei der Vermessung erzielte Genauigkeit verwertet werden kann.

Mit der bisher üblichen gefühlsmäßigen Angleichung der Vermessungsergebnisse an den mangelhaften Grundplan ist naturgemäß eine Deformation der Figur verbunden. Dieser Vorgang der Praxis ist unwissenschaftlich, unökonomisch und geeignet, jede genaue Aufnahme illusorisch zu machen.

Die zur Lösung dieser Frage in einzelnen Fällen angewendeten praktischen Regeln konnten einer näheren Untersuchung nicht standhalten, da mit einer solchen Einpassung stets die Ähnlichkeit der vermessenen Figur verloren ging oder — wie es bei dem vom Verfasser seinerzeit in Steiermark eingeführten Verfahren der Fall war — weil bei beibehaltener Konformität der Figur die Einwirkung der Verschiedenheit der Seitenlängen und die Vernachlässigung der Drehung des Systems als unerheblich angenommen worden war, wodurch sich ein unrichtiger Maßstab und eine falsche Lage für die abzubildende Figur gegenüber dem alten Stande ergeben müßte.

Diese praktischen Einpassungsmethoden waren der fast allgemein gepflogenen gefühlsmäßigen Angleichung gegenüber immerhin als ein guter Notbehelf zu werten, müssen jedoch einem einheitlichen, den wissenschaftlichen Grundsätzen voll entsprechendem Verfahren weichen.

Das gestellte Problem läuft auf die Frage hinaus, wie die den Beobachtungsergebnissen entsprechende Figur unter Beibehaltung ihrer Ähnlichkeit umzuformen i t, damit die beste Anschmiegung an das Grundoperat erzielt wird.

. . . .

Hieher gehört auch die Aufgabe der Angleichung zweier Dreiecksnetze verschiedener Genauigkeit auf Grund der Koordinaten gemeinsamer Punkte.

Hiebei wird für den Fall, daß die Genauigkeit des Grundoperates jener der Neumessung nicht gleichkommt, eine Abänderung der Ausgangspunkte im mindergenauen Operate berechtigt erscheinen.

Weiters kommt dieses Problem auch dann in Betracht, wenn in ein Blatt ohne, oder ohne verläßliche Randeinteilung, auf welchem genügend koordinatenmäßig gegebene Punkte dargestellt sind, ein rechtwinkliges Liniennetz einzuzeichnen ist.

Dieser Frage kommt z. B. bei der Kriegsvermessung, wo jede Aufnahmssektion mit einem Planquadratnetz zu versehen ist, eine größere Bedeutung zu.

Im Systeme I seien die gemeinsamen Punkte $a, b, c \ldots$ durch die auf Grund der Neumessung abgeleiteten Koordinaten gegeben, während im zu ergänzenden Operate die korrespondierenden Punkte $A, B, C \ldots$ auf das System II bezogen sind bzw. bezogen werden.

Die Koordinaten der Punkte $A, B, C \ldots$ sollen mit Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate derart verbessert werden, daß die ausgeglichenen Werte folgenden Bedingungen entsprechen:

1. Die den verbesserten Koordinaten entsprechende Figur $A', B', C' \ldots$ muß der Figur $a, b, c \ldots$ ähnlich sein und
2. muß die Summe der Quadrate der Abstände $AA', BB', CC' \ldots$ ein Minimum sein.

Es wird also der wahrscheinlichste Wert für die Umformungskonstanten, und zwar für den Drehungswinkel α, für die Maßstabverzerrung k und für das Maß der parallelen Verschiebung dy und dx zu ermitteln sein.

Durch den Vergleich des Südwinkels und der Länge einer Seite in einem System mit den zugehörigen Stücken im anderen System können die Näherungswerte für α und k abgeleitet werden.

Auf Grund der Ausgleichung sind die Verbesserungen $d\alpha$ und dk sowie die Werte für dy und dx zu bestimmen.

Die endgültigen Koordinaten der gemeinsamen Ausgangspunkte für das System II werden sein:

$$y_1\mathrm{II} = dk\,(y_1'' + c_1\,d\alpha) + dy$$
$$x_1\mathrm{II} = dk\,(x_1'' + d_1\,d\alpha) + dx$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wobei $y_1''\, x_1''$, $y_2''\, x_2'' \ldots$ die vorläufig für das System II transformierten Koordinaten der Punkte $a, b, c \ldots$ sind.

$c_1, d_1 \ldots$ sind Koeffizienten, welche das Maß der Änderung des Endpunktes einer Seite von der Länge s und dem Südwinkel φ in der y- bzw. x-Richtung angeben, wenn die Seite im Anfangspunkt um $+ 1''$ gedreht wird.

$$c_1 = s_1 \cos\varphi_1 \sin 1'', \quad d_1 = - s_1 \sin\varphi_1 \sin 1''.$$

Die nach dem Ausgleiche verbleibenden Fehler sind:

$$v_1 = y_1' - y_1\mathrm{II} = y_1' - y_1''\,dk - c_1\,d\alpha\,dk - dy$$
$$v_2 = \qquad x_1' - x_1''\,dk - d_1\,d\alpha\,dk - dx$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wobei $y_1', x_1' \ldots$ die Koordinaten der Punkte $A, B, C \ldots$ im System II sind.

Dieses sonst mit Einführung von Näherungswerten übliche Verfahren soll hier nicht weiter verfolgt werden, weil dasselbe schon infolge der Notwendigkeit einer zweimaligen Umformung der im System I gegebenen Koordinaten und der Errechnung der Verschiebungskoeffizienten c und d zu umständlich erscheint.

Wesentlich einfacher wird das Verfahren, wenn die Verwandlungskonstanten direkt aus den Koordinaten der den beiden Systemen gemeinsamen Punkte abgeleitet werden.

Auf Grund der bekannten Umwandlungsformeln müssen die endgültigen Koordinaten für die Punkte $a, b, c \ldots$ im Systeme II heißen:

$$Y_1 = y_1 k \cos\alpha + x_1 k \sin\alpha + dy$$
$$X_1 = x_1 k \cos\alpha - y_1 k \sin\alpha + dx$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$y_1 x_1 \ldots$ sind die Koordinaten der Punkte $a, b, c \ldots$ im Systeme I, während die Koordinaten der Punkte $A, B, C \ldots$ im Systeme II mit $y_1', x_1' \ldots$ bezeichnet werden sollen.

Die nach der Ausgleichung verbleibenden Fehler sind:

$$v_1 = y_1' - Y_1 = y_1' - y_1 k \cos\alpha - x_1 k \sin\alpha - dy$$
$$v_2 = x_1' - X_1 = x_1' - x_1 k \cos\alpha + y_1 k \sin\alpha - dx$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

für $k \cos\alpha = a$, für $k \sin\alpha = b$ gesetzt, erhalten wir die Fehlergleichungen:

$$v_1 = y_1' - ay_1 - bx_1 - dy$$
$$v_2 = x_1' - ax_1 + by_1 - dx$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_1^2 = y_1'^2 + a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 + dy^2 - 2a\, y_1 y_1' - 2b\, y_1' x_1 - 2y_1' dy + 2a\, b\, y_1 x_1 + 2a\, y_1 dy + 2b\, x_1 dy$$
$$v_2^2 = x_1'^2 + a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2 + dx^2 - 2a\, x_1 x_1' + 2b\, y_1 x_1' - 2x_1' dx - 2a\, b\, y_1 x_1 + 2a\, x_1 dx - 2b\, y_1 dx$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[v^2] = [y'^2 + x'^2] + a^2 [y^2 + x^2] + b^2 [y^2 + x^2] + n\, d y^2 + n\, dx^2 - 2a [y y' + x x'] + 2b [y x' - y' x] - 2 [y'] dy - 2 [x'] dx + 2a [y] dy + 2a [x] dx + 2b [x] dy - 2b [y] dx$$

Hieraus ergeben sich für die gesuchten Konstanten die Gleichungen:

$$2\,a [y^2 + x^2] - 2 [y y' + x x'] + 2 [y] dy + 2 [x] dx = 0 \quad \ldots\ldots \quad 1)$$
$$2\,b [y^2 + x^2] + 2 [y x' - y' x] + 2 [x] dy - 2 [y] dx = 0 \quad \ldots\ldots \quad 2)$$
$$2\,n\, dy - 2 [y'] + 2\,a [y] + 2\,b [x] = 0 \quad \ldots\ldots \quad 3)$$
$$2\,n\, dx - 2 [x'] + 2\,a [x] - 2\,b [y] = 0 \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

$$d\,y = \frac{[y'] - a [y] - b [x]}{n} \quad 5)$$

$$dx = \frac{[x'] - a[x] + b[y]}{n} \quad 6)$$

$$a[y] + b[x] = [Y']$$
$$a[x] - b[y] = [X']$$

Y_1', X_1' ... sind die auf Grund der ermittelten Konstanten α und k transformierten Koordinaten y_1 x_1 ... der Punkte a, b, c ...

Mithin:
$$dy = \frac{[y'] - [Y']}{n} \quad 7)$$
und
$$dx = \frac{[x'] - [X']}{n} \quad 8)$$

Aus 1, 5 und 6 ergibt sich

$$a = \frac{n[yy' + xx'] - [y][y'] - [x][x']}{n[yy + xx] - [y][y] - [x][x]} \quad 9)$$

$$b = \frac{n[yx' - y'x] - [x][y'] + [y][x']}{n[yy + xx] - [y][y] - [x][x]} \quad 10)$$

Hiemit ist die Aufgabe gelöst.

Die Fehlergleichungen haben gelautet:

$$v_{y_1} = y_1' - a\,y_1 - b\,x_1 - dy, \qquad v_{x_1} = x_1' - a\,x_1 + b\,y_1 - dx$$
$$v_{y_2} = y_2' - a\,y_2 - b\,x_2 - dy, \qquad v_{x_2} = x_2' - a\,x_2 + b\,y_2 - dx$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[v_y] = [y'] - a[y] - b[x] - n\,dy, \qquad [v_x] = [x'] - a[x] + b[y] - n\,dx$$

Daraus ergibt sich $[v_y] = 0$ und $[v_x] = 0$.

Werden die in beiden Systemen gegebenen Koordinaten so reduziert, daß $[y]$, $[y']$, $[x]$ und $[x']$ Null werden, so erhalten wir aus 9) und 10):

$$k \cos\alpha = \frac{[y_r\,y_r' + x_r\,x_r']}{[y_r\,y_r + x_r\,x_r]} \quad 11)$$

$$k \sin\alpha = \frac{[y_r'\,x_r - y_r\,x_r']}{[y_r\,y_r + x_r\,x_r]} \quad 12)$$

Durch diese einfache Reduktion erhalten wir für die gesuchten Größen einfache Ausdrücke, gleichzeitig werden die Produkte kleiner.

Sind die beiderlei Koordinaten der gemeinsamen Punkte von vornherein auf dasselbe System bezogen, so kann eine weitere Vereinfachung platzgreifen, indem wir setzen:

$$y_{1r}' - y_{1r} = w_{y1} \qquad x_{1r}' - x_{1r} = w_{x1}$$
$$y_{2r}' - y_{2r} = w_{y2} \qquad x_{2r}' - x_{2r} = w_{x2}$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

In diesem Falle erhalten wir:

$$k \cos\alpha = 1 + \frac{[y_r\,w_y + x_r\,w_x]}{[y_r\,y_r + x_r\,x_r]} \quad \text{und}$$

$$k \sin\alpha = \frac{[x_r\,w_y - y_r\,w_x]}{[y_r\,y_r + x_r\,x_r]}$$

Der Vorteil liegt in diesem Falle darin, daß es auf die Genauigkeit der Endresultate ohne Einfluß bleibt, wenn für die Faktorenbildung y, w_y, x, w_x, x, w_y und y, w_x bei den y_r und x_r die Dezimalstellen vernachlässigt werden, da w_y und w_x verhältnismäßig kleine Zahlen sind.

Um einen weiteren Weg zur Lösung der Aufgabe aufzuzeigen, soll noch ein vom Verfasser im Zuge seiner Versuche gefundenes Verfahren mit Anwendung des allgemeinen arithmetischen Mittels erwähnt werden, welches im Hinblicke auf die praktische Übereinstimmung seiner Ergebnisse mit denen nach der strengen Methode, von einigem Interesse erscheint.

In den durch die gemeinsamen Punkte beider Systeme gebildeten Polygonen $a, b, c \ldots$ und $A, B, C \ldots$ werden von allen möglichen Seitenverbindungen $ab, ac \ldots bc, bd \ldots$ und $AB, AC \ldots BC, BD \ldots$ die Seitenlängen $s_1, s_2 \ldots$ und $s_1', s_2' \ldots$ sowie die Südwinkel $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ und $\varphi_1', \varphi_2' \ldots$ gerechnet und für jede Seite die Verschwenkung $\alpha_1 = \varphi_1' - \varphi_1 \ldots$ und die Längenverzerrung $k_1 = \dfrac{s_1'}{s_1}, \ldots$ ermittelt.

Zur Bildung des arithmetischen Mittels zwischen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ und $k_1, k_2 \ldots$ setzen wir:

$$p_1 \alpha_1 = \alpha_1 s_1^2 \qquad\qquad p_1 k_1 = \frac{s_1'}{s_1} \cdot s_1^2 = s_1' s_1$$

$$p_2 \alpha_2 = \alpha_2 s_2^2 \qquad\qquad p_2 k_2 = \frac{s_2'}{s_2} \cdot s_2^2 = s_2' s_2$$

$$\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots$$

$$\alpha = \frac{[p\alpha]}{[p]} = \frac{[\alpha s^2]}{[s^2]} \quad \text{und} \quad k = \frac{[pk]}{[p]} = \frac{[s' s]}{[s^2]}.$$

Dieses Verfahren erfordert bei n gemeinsamen Punkten die Berechnung von $n\,(n-1)$ Südwinkel und Seitenlängen, weshalb es in dieser Form für den praktischen Gebrauch untauglich ist.

Die Punkte einer Figur $abc \ldots$ seien im System I durch die Koordinaten $y_1 x_1, y_2 x_2 \ldots$ gegeben.

Durch eine Drehung des Achsenkreuzes um α bei gleichzeitiger Maßstabverzerrung so, daß die Gleichung $\dfrac{s'}{s} = k$ besteht, erhalten wir im System II für die zugehörigen Punkte $A, B, C \ldots$ die Koordinaten $y_1' x_1', y_2' x_2' \ldots$

Wir setzen:

$$[y'] = k\,[y] \cos\alpha + k\,[x] \sin\alpha$$

und

$$[x'] = k\,[x] \cos\alpha - k\,[y] \sin\alpha$$

Daraus folgt:

$$\frac{[y']}{[x']} = \frac{[y] \cos\alpha + [x] \sin\alpha}{[x] \cos\alpha - [y] \sin\alpha}$$

oder

$$\frac{[y']}{[x']} = \frac{\dfrac{[y]}{[x]} \cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \dfrac{[y]}{[x]} \sin\alpha}, \quad \text{für } \frac{[y]}{[x]} = \operatorname{tg}\beta \text{ gesetzt,}$$

ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{[y']}{[x']} = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(\beta + \alpha)$$

Zur Bestimmung von k dient die Gleichung:

$$\frac{[y']}{[y]} = k\left(\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right) \text{ oder } k = \frac{[y']\sin\beta}{[y]\sin(\alpha+\beta)} = \frac{[x']\cos\beta}{[x]\cos(\alpha+\beta)}$$

Verbindet man den Koordinaten $[y]$ und $[x]$ bzw. $[y']$ und $[x']$ mit dem Nullpunkt, so erhält man eine gerade mit dem Südwinkel β bzw. $(\alpha + \beta)$ und von der Länge s bzw. s'.

Mechanisch gedeutet, kann diese Gerade als die Resultierende aller in O angreifenden Kräfte Oa, Ob, Oc ... bzw. OA, OB, OC ... angesehen werden.

$$s = \frac{[y]}{\sin\beta} = \frac{[x]}{\cos\beta} \text{ und } s' = \frac{[y']}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{[x']}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$\alpha = (\alpha + \beta) - \beta \text{ und } k = \frac{s'}{s}$$

Wenn die Figuren in beiden Systemen konform sind, so können diese Beziehungen zur Ableitung der Umwandlungskonstanten und allgemein als gute Kontrolle für die Richtigkeit der Transformation herangezogen werden.

Um diese Beziehungen auch für den durch die gestellte Aufgabe gegebenen Fall, daß die beiden Figuren nicht ähnlich sind, zur Ermittlung der wahrscheinlichsten Werte für die Transformationskonstanten dienstbar zu machen, beziehen wir zunächst die Figur abc ... bzw. ABC ... auf den Punkt a bzw. A als Nullpunkt und erhalten:

a	$y_1 - y_1$	$x_1 - x_1$		A	$y_1' - y_1'$	$x_1' - x_1'$
b	$y_2 - y_1$	$x_2 - x_1$		B	$y_2' - y_1'$	$x_2' - x_1'$
c	$y_3 - y_1$	$x_3 - x_1$		C	$y_3' - y_1'$	$x_3' - x_1'$
. . .	. . .	. . .		. . .	. . .	. . .
	$[y] - n\,y_1$	$[x] - n\,x_1$			$[y'] - n\,y_1'$	$[x'] - n\,x_1'$

Für die Resultierende der in a bzw. A angreifenden Kräfte ab, ac, ad ... bzw. AB, AC, AD ... ergibt sich die Richtung und Größe:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{[y] - n\,y_1}{[x] - n\,x_1} \qquad \operatorname{tg}\varphi_1' = \frac{[y'] - n\,y_1'}{[x'] - n\,x_1'}$$

$$s_1 = \frac{[y] - n\,y_1}{\sin\varphi_1} = \frac{[x] - n\,x_1}{\cos\varphi_1} \qquad s_1' = \frac{[y'] - n\,y_1'}{\sin\varphi_1'} = \frac{[x'] - n\,x_1'}{\cos\varphi_1'}$$

$$\alpha_1 = \varphi_1' - \varphi_1 \text{ und } k_1 = \frac{s_1'}{s}$$

In weiterer Folge werden sämtliche Punkte des Systems auf den Punkt b, sodann c, d ... bzw. B, C, D ..., bezogen, wodurch wir in jedem System n-Resultierende erhalten, welche sich im Schwerpunkte O der Figur abc ... bzw. ABC ... schneiden und durch O halbiert werden.

Zur Vereinfachung des Rechnungsvorganges werden alle Koordinaten so reduziert, daß $[y]$, $[x]$, $[y']$ und $[x']$ Null werden, wodurch sich für die Resultierende Oa bzw. OA die Beziehungen ergeben:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{y_{1r}}{x_{1r}} \qquad \operatorname{tg}\varphi_1' = \frac{y_{1r}'}{x_{1r}'}$$

$$\varphi_1{}' - \varphi_1 = \alpha_1 \qquad s_1 = \frac{n\, y_{1r}}{\sin \varphi_1} \qquad s_1{}' = \frac{n\, y_{1r}{}'}{\sin \varphi_1{}'}$$

$$k_1 = \frac{s_1{}'}{s_1} = \frac{y_1{}' \sin \varphi_1}{y_1 \sin \varphi_1{}'}$$

O ist der Ursprung und zugleich Schwerpunkt der Figur, $y_{1r}\, x_{1r} \ldots$ bzw. $y_{1r}{}'\, x_{1r}{}' \ldots$ sind die auf den Schwerpunkt der Figur reduzierten Koordinaten der Punkte $a, b, c \ldots$ bzw. $A, B, C \ldots$, α_1 ist der Winkel, den die Resultierenden Oa und OA einschließen.

Für die Resultierenden $Ob, Oc \ldots$ bzw. $OB, OC \ldots$ erhalten wir in analoger Weise:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{y_{2r}}{x_{2r}}, \qquad \operatorname{tg} \varphi_2{}' = \frac{y_{2r}{}'}{x_{2r}{}'}, \qquad \varphi_2{}' - \varphi_2 = \alpha_2, \qquad k_2 = \frac{s_2{}'}{s_2}$$

Wir erhalten auf diese Art n-Werte für α und k. Den ausgeglichenen Wert für α und k aus $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ bzw. $k_1, k_2 \ldots k_n$ ermitteln wir, indem wir zwischen diesen Einzelwerten das allgemeine arithmetische Mittel bilden:

$$\begin{array}{ll} p_1\, \alpha_1 = \alpha_1\, s_1{}^2 & \qquad p_1\, k_1 = k_1\, s_1{}^2 \\ p_2\, \alpha_2 = \alpha_2\, s_2{}^2 & \qquad p_2\, k_2 = k_2\, s_2{}^2 \\ \ldots\ldots\ldots & \qquad \ldots\ldots\ldots \\ \hline \alpha = \dfrac{[p\,\alpha]}{[p]} = \dfrac{[\alpha\, s^2]}{[s^2]} & \qquad k = \dfrac{[p\, k]}{[p]} = \dfrac{[k\, s^2]}{[s^2]} \end{array}$$

Für die Gewichte p genügt es, s auf zwei Dezimalstellen der Kilometer anzunehmen, wodurch die Frage, ob für p $yy + xx$, $y'y' + x'x'$ oder $yy' + xx'$ oder ss' einzuführen ist, aus praktischen Gründen entfällt.

Im nachfolgenden soll der Zusammenhang zwischen diesem Verfahren und der Methode der kleinsten Quadrate nachgewiesen werden.

Zu diesem Behufe werden die beiden Systeme so in Verbindung gebracht, daß deren Achsenkreuze sich decken, wodurch sich ein System ergibt:

Die Punkte werden folgende Koordinaten aufweisen:

$$\begin{array}{lll} a & y_{1r} & x_{1r} \\ b & y_{2r} & x_{2r} \\ c & y_{3r} & x_{3r} \\ \ldots & & \\ \ldots & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lll} A & y_{1r}{}' & x_{1r}{}' \\ B & y_{2r}{}' & x_{2r}{}' \\ C & y_{3r}{}' & x_{3r}{}' \\ \ldots & & \\ \ldots & & \end{array}$$

Die Seite $Oa = s_1$ wird mit der Seite $OA = s_1{}'$ den Winkel α_1 einschließen, die Seiten werden einander gegenüber eine Längenverzerrung $k_1 = \dfrac{s_1{}'}{s_1}$ aufweisen, wie schon früher erwähnt.

Wir beziehen nun die Punkte a und A auf die Seite Oa, d. h. wir drehen die Achsen um den Winkel $\varphi_1{}'$ und erhalten für a:

$$y_a{}'' = y_1 \cos \varphi_1 + x_1 \sin \varphi_1 = s_1$$
$$x_a{}'' = x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1 = 0$$

für A:

$$y_A{}'' = y_1{}' \cdot \frac{y_1}{s_1} + x_1{}' \frac{x_1}{s_1}$$

$$x_A{}'' = x_1{}' \cdot \frac{y_1}{s_1} - y_1{}' \frac{x_1}{s_1}$$

$k_1 \cos \alpha_1 = a_1$ und $k_1 \sin \alpha_1 = b_1$ gesetzt, folgt:

$$y_A'' = s_1 a_1 + 0 \quad \text{oder} \quad y_1' \frac{y_1}{s_1} + x_1' \frac{x_1}{s_1} = s_1 a_1$$

$$x_A'' = 0 - s_1 b_1 \qquad x_1' \frac{y_1}{s_1} - y_1' \frac{x_1}{s_1} = -s_1 b_1$$

$$a_1 = \frac{y_1 y_1' + x_1 x_1'}{s_1^2}, \qquad b_1 = \frac{y_1' x_1 - x_1' y_1}{s_1^2}$$

für die übrigen Punkte in analoger Weise:

$$a_2 = \frac{y_2 y_2' + x_2 x_2'}{s_2^2}, \qquad b_2 = \frac{y_2' x_2 - x_2' y_2}{s_2^2}$$

. . . .

$$p_1 a_1 = a_1 s_1^2 = y_1 y_1' + x_1 x_1'$$
$$p_2 a_2 = a_2 s_2^2 = y_2 y_2' + x_2 x_2'$$

. . . .

$$\frac{[p a]}{[p]} = a = \frac{[yy' + xx']}{[s^2]}$$

$$\frac{[p b]}{[p]} = b = \frac{[y'x - x'y]}{[s^2]}$$

Hiemit ist die Übereinstimmung zwischen beiden Verfahren hergestellt, wenn wir als unerheblich annehmen, daß wir in einem Falle die Mittelbildung für k und α mit dem Gewichte $p = s^2$, im letzteren Falle jedoch die Einzelwerte für a und b mit dem Gewichte s^2 mitteln.

Es ist nicht empfehlenswert, nach Ermittlung der Konstanten α und k die reduzierten Koordinaten umzuformen, da diese nach erfolgter Umformung nochmals reduziert werden müßten, es erscheint vorteilhafter, die ursprünglich im System I gegebenen Koordinaten umzuformen und die so erhaltenen Werte Y' und X' um $dy = \frac{[y] - [Y']}{n}$ bzw. $dx = \frac{[x'] - [X']}{n}$ zu verbessern.

In den am Schlusse folgenden Beispielen ist der Rechnungsvorgang für die verschiedenen Fälle veranschaulicht.

Zur besseren Übersicht wurde allen Beispielen die gleiche Punktlage zugrunde gelegt.

Was den speziellen Fall der Einpassung der Neuaufnahme eines größeren Grundkomplexes in eine Katastralmappe älteren Ursprunges betrifft, muß noch folgendes bemerkt werden:

In die Vermessung sind womöglich viele Ausgangspunkte einzubeziehen, deren relativ richtige Lage vor Beginn der Vermessung nach dem Grundplane zu überprüfen ist. Das ganze Aufnahmsgebiet ist mit einem Polygonzuge einzuschließen, bei größeren Arbeiten werden noch Zwischenzüge einzuschalten sein. Die ausgewählten festen Punkte sind so mit dem Polygonnetze in Verbindung zu bringen, daß deren Koordinaten auf eine einfache Art abgeleitet werden können.

Es ist zweckmäßig, die Aufnahme auf einen Gebietsstreifen des unverändert gebliebenen Teiles auszudehnen.

Der Papiereingang ist zur Vermeidung jeder Mehrarbeit, weder bei der Polygonzugsberechnung, noch bei der Auftragung zu berücksichtigen, da die Konstante k dem Einflusse desselben Rechnung trägt.

Nach Berechnung der Koordinaten sämtlicher Polygon- und Ausgangspunkte unter Annahme eines beliebigen Achsensystems werden die Koordinaten der auf der Mappe gegebenen Anschlußpunkte auf graphischem Wege ermittelt, wobei die Einzeichnung eines Achsenkreuzes nach freiem Ermessen erfolgen kann. Zur Erleichterung der graphischen Arbeiten wird es sich jedoch empfehlen, den Nullpunkt ungefähr in der Mitte des Aufnahmsgebietes anzunehmen.

Die Sektionsränder sollen — insbesonders bei Mappen älteren Ursprunges — für die Koordinatenbeziehung ganz außer acht gelassen werden.

Die rechnerisch und graphisch ermittelten Werte hinsichtlich der den beiden Systemen gemeinsamen Punkte werden sodann nach Beispiel 1 behandelt.

Erweisen sich nach Ableitung der endgültigen Koordinaten die verbleibenden Fehler v für einzelne Punkte als zu groß, so sind die betreffenden Punkte von der Ausgleichung auszuscheiden und das Verfahren ist zu wiederholen.

Die restlichen im Systeme I gegebenen Punkte, einschließlich der als nicht identisch befundenen Ausgangspunkte werden nun auf Grund der Umformungskonstanten auf das System II bezogen, worauf die Auftragung sämtlicher Punkte auf Grund des im Blatte bereits eingezeichneten Achsenkreuzes erfolgen kann. Auf Grund des Polygonnetzes ist nun das Detail aufzutragen.

Schließlich ist noch der Anschluß mit dem unverändert gebliebenen Teile herzustellen.

Handelt es sich um die Angleichung einer Neutriangulierung an ein älteres Dreiecksnetz, so werden zunächst die auch im alten Netze gegebenen Ausgangspunkte mit den Hauptnetzpunkten auf Grund der Winkelbeobachtungen zusammenhängend ausgeglichen, sodann die Einpassung wie im Beispiele 1 oder 3 vorgenommen und mit den umgeformten Koordinaten die Berechnung des trigonometrischen Netzes zu Ende geführt.

Im Beispiele 2 wird als Aufgabe die Einzeichnung eines Liniennetzes auf Grund der auf dem Blatte dargestellten und koordinatenmäßig gegebenen Punkte angenommen. Es wird genügen, die Eckpunkte eines das Blatt einschließenden Rechteckes zu rechnen, worauf die Einteilung z. B. von 100 zu 100 m längs der Rechteckseiten mit einem Abstande von 100 k vorzunehmen ist.

Beispiel 3 behandelt den möglichen Fall der Notwendigkeit der Übertragung einiger Punkte aus einem älteren Netze in ein solches jüngeren Ursprunges, wobei von der Annahme ausgegangen wird, daß die Winkelbeobachtungen hinsichtlich der zu übertragenden Punkte nicht vorliegen oder nicht berücksichtigt werden sollen.

Hier, sowie bei Beispiel 2 entfällt natürlich jede Abänderung der Ausgangspunkte.

Im Beispiele 4 wird schließlich eine Einpassung mit Anwendung des allgemeinen arithmetischen Mittels ersichtlich gemacht.

Beispiel 1.

Einpassung einer Neuvermessung an einen Plan älteren Ursprunges.

I.

Pkt.	Durch Rechnung ermittelt		Graphisch ermittelt		Reduzierte Koordinaten			
	y	x	y'	x'	y_r	x_r	y'_r	x'_r
1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	+ 969.78	− 445.47	+ 660.10	+ 14.90	− 120.27	− 546.79	+ 110.35	− 540.12
B	+ 1267.77	− 289.69	+ 867.60	+ 274.20	+ 177.72	− 391.01	+ 317.85	− 280.82
C	+ 1366.19	+ 224.33	+ 749.20	+ 775.20	+ 276.14	+ 123.01	+ 199.45	+ 220.18
D	+ 1467.58	+ 639.02	+ 676.20	+ 1186.40	+ 377.53	+ 537.70	+ 126.45	+ 631.38
E	+ 941.76	+ 541.14	+ 241.60	+ 892.90	− 148.29	+ 439.82	− 308.15	+ 337.88
F	+ 527.23	− 61.42	+ 103.80	+ 186.50	− 562.82	− 162.74	− 445.95	− 368.52
+	+ 6540·31	+ 1404.49	+ 3298.50	+ 3330.10	+ 831.39	+ 1100.54	+ 754.10	+ 1189.47
−	—	− 796.58	—	—	− 831.38	− 1100.53	− 754.10	− 1189.46
[ ]	+ 6540.31	+ 607.91	+ 3298.50	+ 3330.10	+ 0.01	+ 0.01	0.00	+ 0.01
: -n	− 1090.05	− 101.32	− 549.75	− 555.02				
101	+ 624.39	− 106.84						
102	+ 711.95	+ 3.46						
103	+ 863.72	+ 75.25						
[ ]	+ 2200.06	− 28.13						

II.

Pkt.	$y_r y'_r$	$x_r x'_r$	$y'_r x_r$	$y_r x'_r$	$y_r y_r$	$x_r x_r$
10	11	12	13	14	15	16
A	− 13.271.79	+ 295.332.21	− 60.338.28	+ 64.960.23	+ 14.464.87	+ 298.979.30
B	+ 56.488.30	+ 109.803.43	− 124.282.53	− 49.907.33	+ 31.584.40	+ 152.888.82
C	+ 55.076.12	+ 27.084.34	+ 24.534.34	+ 60.800.51	+ 76.25 .30	+ 15.131.46
D	+ 47.738.67	+ 339.493.03	+ 67.992.17	+ 238.364.89	+ 142.528.90	+ 289.121.29
E	+ 45.695.56	+ 148.606.38	− 135.530.53	− 50.104.23	+ 21.989.92	+ 193.441.63
F	+ 250.989.58	+ 59.972.94	+ 72.573.90	+ 207.410.43	+ 316.766.35	+ 26.484.31
+	+ 455.988.23		+ 165.099.41	+ 571.536.06		
−	− 13.271.79	—	− 320.151.34	− 100.011.56		
[ ]	+ 442.716.44	+ 980.292.33	− 155.051.93	+ 471.524.50	+ 603.587.74	+ 976.046.81
	$Z_1 =$	+ 1.423.008.77	$Z_2 =$	− 626.576.43	$N =$	+ 1.579.634.55
	$\log k \cos\alpha = \frac{Z_1}{N} = 9.954\ 6510$			$\log k \sin\alpha = \frac{Z_2}{N} = 9.598\ 4179\,n$		

IIIa.

Pkt.	log y	log x	log $yk\cos\alpha$	log $xk\sin\alpha$	$yk\cos\alpha$	$xk\sin\alpha$	Y'
17	18	19	20	21	22	23	24
A	2.986 6732	2.648 8185 n	2.941 3242	2.247 2364	+ 873.62	+ 176.70	+ 1050.32
B	3.103 0405	2.461 9335 n	3.057 6915	2.060 3514	+ 1142.07	+ 114.91	+ 1256.98
C	3.135 5113	2.350 8874	3.090 1623	1.949 3053 n	+ 1230.73	− 88.98	+ 1141.75
D	3.166 6019	2.805 5145	3.121 2529	2.403 9324 n	+ 1322.06	− 253.47	+ 1068.59
E	2.973 9402	2.733 3096	2.928 5912	2.331 7275 n	+ 848.38	− 214.64	+ 633.74
F	2.722 0001	1.788 3098 n	2.676 6511	1.386 7277	+ 474.95	+ 24.36	+ 499.31
						$[Y'] =$	+ 5650.69
						$[y'] =$	+ 3298.50
		$dy = [y'] - [Y'] : n = -\ 392.03$			$[y'] - [Y'] =$		− 2352.19
101	2.795 4559	2.028 7339 n	2.750 1069	1.627 1518	+ 562.48	+ 42.38	+ 604.86
102	2.852 4495	0.539 0761	2.807 1005	0.137 4940 n	+ 641.36	− 1.37	+ 639.99
103	2.936 3730	1.876 5065	2.891 0240	1.474 9244 n	+ 778.08	− 29.85	+ 748.23
[ ]	3.342 4346	1.449 1697 n	3.297 0856	1.047 5876	+ 1981.92	+ 11.16	+ 1993.08

III b.

Pkt.	log xk cos α	log yk sin α	xk cos α	yk sin α	X'
25	26	27	28	29	30
A	2.603 4695 n	2.585 0911 n	— 401.30	— 384.67	— 16.63
B	2.416 5845 n	2.701 4584 n	— 260.96	— 502.87	+ 241.91
C	2.305 5384	2.733 9292 n	+ 202.09	— 541.91	+ 744.00
D	2.760 1655	2.765 0198 n	+ 575.66	— 582.13	+ 1157.79
E	2.687 9606	2.572 3581 n	+ 487.48	— 373.56	+ 861.04
F	1.742 9608 n	2.320 4180 n	— 55.33	— 209.13	+ 153.80
				$[X'] =$	+ 3141.91
				$[x'] =$	+ 3330.10
	$dx = [x'] - [X'] : 6 = + 31.36$			$[x'] - [X'] =$	+ 188.19
101	1.983 3850 n	2.393 8738 n	— 96.25	— 247.66	+ 151.41
102	0.493 7271	2.450 8674 n	+ 3.12	— 282.40	+ 285.52
103	1.831 1575	2.534 7909 n	+ 67.79	— 342.60	+ 410.39
[ ]	1.403 8207 n	2.940 8525 n	— 25.34	— 872.67	+ 847.32

IV.

Pkt.	$Y = Y' + dy$	$v = y' - Y$	v^2	$X = X' + dx$	$v = x' - X$	v^2
31	32	33	34	35	36	37
A	+ 658.29	+ 1.81	3.28	+ 14.73	+ 0.17	0.03
B	+ 864.95	+ 2.65	7.02	+ 273.27	+ 0.93	0.86
C	+ 749.72	— 0.52	0.27	+ 775.36	— 0.16	0.03
D	+ 676.56	— 0.36	0.13	+ 1189.15	— 2.75	7.56
E	+ 241.71	— 0.11	0.01	+ 892.40	+ 0.50	0.25
F	+ 107.28	— 3.48	12.11	+ 185.16	+ 1.34	1.80
		+ 4.46	22.82		+ 2.94	10.53
		— 4.47			— 2.91	22.82
101	+ 212.83			+ 182.77	$[v^2] =$	33.35
102	+ 247.96			+ 316.88		
103	+ 356.20			+ 441.75		

Anmerkung: Die Kontrolle für die Richtigkeit der Transformation besteht darin, daß hinsichtlich der gemeinsamen Punkte ($A-F$) $[v] = 0$ sein muß, hinsichtlich der übrigen Punkte muß $[y]k \cos\alpha = [yk \cos\alpha]$, $[x]k \sin\alpha = [xk \sin\alpha]$, $[x]k \cos\alpha = [xk \cos\alpha]$ und $[y]k \sin\alpha = [yk \sin\alpha]$ sein.

Im Beispiele 3 ist die Richtigkeit der Endergebnisse auf eine andere Art kontrolliert.

Beispiel 2.

Einrechnung eines Planquadratnetzes in ein Blatt ohne Randteilung.

I.

Pkt.	Durch Rechnung ermittelt		Graphisch ermittelt		Reduzierte Koordinaten			
	y	x	y'	x'	y_r	x_r	y'_r	x'_r
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Aus Beispiel 1							
E_1	+ 1500.00	+ 700.00						
E_2	+ 1500.00	— 500.00						
E_3	+ 500.00	+ 700.00						
E_4	+ 500.00	— 500.00						
[ ]	+ 4000.00	+ 400.00						

II.

Aus Beispiel 1.

III a.

Pkt.	log y	log x	log yk cos α	log xk sin α	yk cos α	xk sin α	Y'
17	18	19	20	21	22	23	24
E_1	3.176 0913	2.845 0980	3.130 7423	2.443 5159 n	+ 1351.27	— 277.66	+ 1073.61
E_2	3.176 0913	2.698 9700 n	3.130 7423	2.2 7 3879	+ 1351.27	+ 198.33	+ 1549.60
E_3	2.6 8 9700	2.845 0980	2.653 6210	2.443 5159 n	+ 450.42	— 277.66	+ 172.76
E_4	2.698 9700	2.698 9700	2.653 6210	2.2 7 3879	+ 450.42	+ 198.33	+ 648.75
[ ]	3.602 0600	2.602 0600	3.556 7110	2.200 4779	+ 3603.39	— 158.66	+ 3444.72

III b.

Pkt.		log xk cos α	log yk sin α	xk cos α	yk sin α	X'
25		26	27	28	29	30
E_1		2.799 7490	2.774 5092 n	+ 630.59	— 594.99	+ 1225.58
E_2		2.653 6210 n	2.774 5092 n	— 450.42	— 594.99	+ 144.57
E_3		2.799 7490	2.297 3879 n	+ 630.59	— 198.33	+ 828.92
E_4		2.653 6210 n	2.297 3879 n	— 450.42	— 198.33	— 252.09
[ ]		2.556 7110	3.200 4779 n	+ 360.34	— 1586.64	+ 1946.98

IV.

Pkt.	$Y = Y' + dy$	$X = X' + dx$
31	32	33
E_1	+ 681.58	+ 1256.94
E_2	+ 1157.57	+ 175.93
E_3	— 219.27	+ 860.28
E_4	+ 256.72	— 220.73

V.

α		k	
log k cos α	9.954 6510	log k cos α	9.954 6510
log k sin α	9.598 4179 n	log cos α	9.961 5198
log tg α	9.643 7669 n	log k	9.993 1312
	— 23° 45′ 53″		
α	336° 14′ 07″	k =	0.98431

VI.

m	$m\,k$	m	$m\,k$	m	$m\,k$
100	98.43	600	590.59	1100	1082.73
200	196.86	700	689.02	1200	1181.16
300	295.29	800	787.45	1300	1279.59
400	393.72	900	885.88	1400	1378.02
500	492.16	1000	984.30	1500	1476.46

Beispiel 3.

Übertragung einzelner Punkte eines trig. Netzes in ein Netz anderen Systems.

I.

Pkt.	System I		System II		Reduzierte Koordinaten				w_y	w_x
	y	x	y'	x'	y_r	x_r	y'_r	x'_r		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	+ 659.08	+ 6.05	+ 660.10	+ 14.90	+ 109.33	− 549.08	+ 110.35	− 540.12	+ 1.02	+ 8.96
B	+ 869.48	+ 268.35	+ 867.60	+ 274.20	+ 319.73	− 286.78	+ 317.85	− 280.82	− 1.88	+ 5.96
C	+ 753.28	+ 778.65	+ 749.20	+ 775.20	+ 203.53	+ 223.52	+ 199.45	+ 220.18	− 4.08	− 3.34
D	+ 679.68	+ 1199.15	+ 676.20	+ 1186.40	+ 129.93	+ 644.02	+ 126.45	+ 631.38	− 3.48	− 12.64
E	+ 237.38	+ 898.45	+ 241.60	+ 892.90	− 312.37	+ 343.32	− 308.15	+ 337.88	+ 4.22	− 5.44
F	+ 99.58	+ 180.15	+ 103.80	+ 186.50	− 450.17	− 374.98	− 445.95	− 368.52	+ 4.22	+ 6.46
+	+ 3298.48	+ 3330.80	+ 3298.50	+ 3330.10					+ 9.46	+ 21.38
−	—	—	—	—					− 9.44	− 21.42
[ ]	+ 3298.48	+ 3330.80	+ 3298.50	+ 3330.10						
: *n*	− 549.75	− 555.13	− 549.75	− 555.02						
101	+ 206.78	+ 177.58								
102	+ 242.70	+ 313.76								
103	+ 352.89	+ 440.45								
	+ 802.37	+ 931.79								

II.*)

Pkt.	$x_r w_x$	$y_r w_y$	$x_r w_y$	$y_r w_x$	y^2	x^2
12	13	14	15	16	17	18
A	− 4928.00	+ 112.20	− 561.00	+ 985.60	12100	302500
B	− 1728.40	− 601.60	+ 545.20	+ 1907.20	102400	84100
C	− 734.80	− 816.00	− 897.69	− 668.00	40000	48400
D	− 8089.60	− 452.40	− 2227.20	− 1643.20	16900	409600
E	− 1849.60	− 1308.20	+ 1434.80	+ 1686.40	96100	115600
F	− 2390.20	− 1899.00	− 1561.40	− 2907.00	202500	136900
+	—	+ 112.20	+ 1980.00	+ 4579.20	+ 470000	+ 1097100
−	− 19720.60	− 5077.20	− 5247.20	− 5218.20	—	
[ ]	− 19720.60	− 4965.00	− 3267.20	− 639.00	+ 470000	+ 1097100
		− 19720.60	+ 639.00			470000
	$Z_1 =$	− 24685.60	$Z_2 =$	− 2628.20	$N =$	+ 1567100

$k \cos \alpha = 0{,}015752$ $\log k \cos \alpha = 9.9931010$ $k \sin \alpha = -0.0016771$ $\log k \sin \alpha = 7.2245617\, n$

IIIa.

Pkt.	log y	log x	log yk cos α	log xk sin α	yk cos α	xk sin α	y'
19	20	21	22	23	24	25	26
A	2.818 9381	0.781 7554	2.812 0391	8.006 3171 *n*	+ 648.69	− 0.01	+ 648.68
B	2.939 2596	2.428 7016	2.932 3606	9.653 2633 *n*	+ 855.78	− 0.45	+ 855.33
C	2.876 9564	2.891 3423	2.870 0574	0.115 9040 *n*	+ 741.41	− 1.31	+ 740.10
D	2.832 3045	3.078 8736	2.825 4055	0.303 4353 *n*	+ 668.97	− 2.01	+ 666.96
E	2.375 4441	2.953 4939	2.368 5451	0.178 0556 *n*	+ 233.64	− 1.51	+ 232.13
F	1.998 1721	2.255 6343	1.991 2731	9.480 1960 *n*	+ 98.01	− 0.30	+ 97.71
[ ]	3.518 3138	3.522 5486	3.511 4148	0.747 1103 *n*	+ 3246.50	− 5.59	+ 3240.91
						[y']	+ 3298.50
			$dy = 57.59 : 6 = +9.60$			[y'] − [Y']	+ 57.59
101	2.315 5085	2.249 3941	2.308 6095	9.473 9558 *n*	− 203.52	− 0.30	+ 203.22
102	2.385 0698	2.496 5976	2.378 1708	9.721 1593 *n*	+ 238.88	− 0.53	+ 238.35
103	2.547 6394	2.643 8966	2.540 7404	[illegible].868 4583 *n*	+ 347.33	− 0.74	+ 346.59

*) Bei der Bildung der Produkte wurden die Faktoren y_r und x_r auf Zehner abgerundet.

III b.

Pkt.	log xk cos α	log yk sin α	xk cos α	yk sin α	X'	
27	28	29	30	31	32	
A	0.774 8564	0.043 9998 n	+ 5.95	− 1.11	+ 7.06	
B	2.421 8026	0.163 8213 n	+ 264.12	− 1.46	+ 265.58	
C	2.884 4433	0.101 5181 n	+ 766.38	− 1.26	+ 767.64	
D	3.071 9746	0.056 8662 n	+ 1180.25	− 1.14	+ 1181.39	
E	2.946 5949	9.600 0058 n	+ 884.29	− 0.40	+ 884.69	
F	2.248 7353	9.222 7338 n	+ 177.31	− 0.17	+ 177.48	
[ ]	3.515 6496	0.742 8755 n	+ 3278.30	− 5.54	+ 3283.84	
				$[x'] =$	3330.10	
		$dx = + 46.26 : 6 = + 7.71$		$[x'] - [X']$	+ 46.26	
101	2.242 4951	9.540 0702 n	+ 174.78	− 0.35	+ 175.13	
102	2.489 6986	9.609 6315 n	+ 308.82	− 0.41	+ 309.23	
103	2.636 9976	9.772 2011 n	+ 433.51	− 0.59	+ 434.10	

IV.

Pkt.	$Y = Y' + dy$	$v = y' - Y$	v^2	$X = X' + dx$	$v = x' - X$	v^2
33	34	35	36	37	38	39
A	+ 658.28	+ 1.82	3.31	+ 14.77	+ 0.13	0.02
B	+ 864.93	+ 2.67	7.13	+ 273.29	+ 0.91	0.83
C	+ 749.70	− 0.50	0.25	+ 775.35	− 0.15	0.02
D	+ 676.56	− 0.36	0.13	+ 1189.10	− 2.70	7.29
E	+ 241.73	− 0.13	0.02	+ 892.40	+ 0.50	0.25
F	+ 107.31	− 3.51	12.32	+ 185.19	+ 1.31	1.72
		+ 4.49	23.16		+ 2.85	10.13
		+ 4.50			− 2.85	23.16
101	+ 212.82			+ 182.84	$[v^2] =$	33.29
102	+ 247.95			+ 316.94		
103	+ 356.19			+ 441.81		
$[Y]$	+ 4115.47		$[X]$	+ 4271.69		

V.

P r o b e

40

$[y] = + 4100.85$	log $[y]$ = 3.612 8739	
$[x] = + 4262.59$	log $[x]$ = 3.629 6737	9.857 7216
$[Y] - 9\,dy = + 4029.07$	log tg β = 9.983 2002	
$[X] - 9\,dx = 4202.30$	$\beta = 43^0\,53'\,32''$	log s = 3.771 9521
$[Y'] = [Y] - r\,.\,dy$		
$[X'] = [X] - r\,.\,dx$		
$r = 9$		

40

	log $[Y']$ = 3.605 2049	
	log $[X']$ = 3.623 4871	9.858 4333
	log tg $(\alpha + \beta)$ = 9.981 7178	
	$\alpha + \beta = 43^0\,47'\,40''$	log s' = 3.765 0538
	$\alpha = -\,5'\,52''$	
log sin α =	7.232 1173 n	
log $\frac{s'}{s}$ =	9.993 1017	log b = 7.225 2190 n
log cos α =	9.999 9994	log a = 9.993 1011

Wenn das Netz des Systems II eine größere Genauigkeit als jenes im Systeme I aufweist, bleiben die unter Rahmen ausgewiesenen Koordinaten der gemeinsamen Punkte A bis F unberücksichtigt. Die Ableitung dieser Koordinaten erfolgt nur zum Zwecke der Identifizierung.

Beispiel 4.

Beispiel 1 mit Anwendung des allgemeinen arithmetischen Mittels gelöst.

I.

Aus Beispiel 1.

II.

Seite	log y_{rn} log x_{rn} log tg ψ_n ψ_n	log sin ψ_n log cos ψ_n log s_n φ_n	log y'_{rn} log x'_{rn} log tg ψ'_n ψ'_n	log sin ψ'_n log cos ψ'_n log s'_n ψ'_n	$\alpha_n = \varphi'_n - \varphi_n$ lg k_n = lg s'_n — lg s_n k_n = s_n =
10	11	12	13	14	15
Oa, OA	2.080 1573 2.737 8206 9.342 3367 12° 24′ 18″	 9.989 7405 2.748 0801 192° 24′ 18″	2.042 7723 2.732 4903 9.310 2820 11° 32′ 49″	 9.991 1201 2.741 3702 168° 27′ 11″	α_1 = — 23° 57′ 07″ 9.993 2901 k_1 = 0.98467 s_1 = 0.56 *km*
Ob, OB	2.249 7363 2.592 1879 9.657 5484 *n* 24° 26′ 33″	 9.959 2212 2.632 9667 155° 33′ 27″	2.502 2222 2.448 4280 *n* 0.053 7942 *n* 48° 32′ 22″	 9.874 7205 2.627 5017 131° 27′ 38″	α_2 = — 24° 05′ 49″ 9.994 5350 k_2 = 0.98750 s_2 = 0.43 *km*
Oc, OC	2.441 1293 2.089 9404 0.351 1889 65° 59′ 20″	9.960 6927 2.480 4366 65° 59′ 20″	2.299 8340 2.342 7779 9.957 0561 42° 10′ 19″	 9.869 8964 2.472 8815 42° 10′ 19″	α_3 = — 23° 49′ 01″ 9.992 4449 k_3 = 0.98275 s_3 = 0.30 *km*
Od, OD	2.576 9515 2.730 5400 9.846 4115 35° 04′ 24″	 9.912 9748 2.817 5652 35° 04′ 24″	2.101 9188 2.800 2908 9.301 6280 11° 19′ 30″	 9.991 4605 2.808 8303 11° 19′ 30″	α_4 = — 23° 44′ 54″ 9.991 2651 k_4 = 0.98009 s_4 = 0.66 *km*
Oe, OE	2.171 1119 *n* 2.643 2750 9.527 8369 *n* 18° 37′ 55″	 9.976 6212 2.666 6538 341° 22′ 05″	2.488 7622 *n* 2.528 7625 9.959 9997 *n* 42° 21′ 55″	 9.868 5644 2.660 1981 317° 38′ 05″	α_5 = — 23° 44′ 00″ 9.993 5443 k_5 = 0.98525 s_5 = 0.46 *km*
Of, OF	2.750 3695 *n* 2.211 4943 *n* 0.538 8752 73° 52′ 22″	9.982 5639 2.767 8056 253° 52′ 22″	2.649 2862 *n* 2.566 4611 *n* 0.082 8251 50° 25′ 50″	9.886 9726 2.762 3136 230° 25′ 50″	α_6 = — 23° 26′ 32″ 9.994 5080 k_6 = 0.98743 s_6 = 0.59 *km*

III.

Pkt.	α_n			$\alpha_n - m$			$p_n = s^2_n$	$p_n(\alpha_n - m')$	$p_n\ k_n$	Probe			
	°	′	″	°	′	″				$\alpha - \alpha_n$	$p\ (\alpha - \alpha_n)$	$k - k_n$	$p\ (k - k_n)$
16	17			18			19	20	21	22	23	24	25
A	— 23	57	07	+	2	53	0.31	+ 53.63	0.305 2477	+ 683″	+ 211.73	— 38	— 11.78
B	— 24	05	49	—	5	49	0.18	— 62.82	0.177 7500	+ 1205″	+ 216.90	— 321	— 57.78
C	— 23	49	01	+	10	59	0.09	+ 59.31	0.088 4475	+ 197″	+ 17.73	+ 154	+ 13.86
D	— 23	44	54	+	15	06	0.44	+ 398.64	0.431 2396	— 50″	— 22.00	+ 420	+ 184.80
E	— 23	44	00	+	16	00	0.21	+ 201.60	0.206 9025	— 104″	— 21.84	— 96	— 20.16
F	— 23	26	32	+	33	28	0.35	+ 702.80	0.345 6005	— 1152″	— 403.20	— 314	— 109.90
m =	— 24	00	00				1.58	+ 1415.98	1.555 1878		+ 446.36		+ 198.66
+	+	14	16					— 62.82			— 447.04		— 199.62
α =	— 23	45	44					+ 1353.16	$k = \frac{[p_n k_n]}{[p]}$				
							:1.58	+ 856″					
							$\alpha - m$	+ 14′ 16″	0.98429				

log cos α 9.961 5281

log k 9.993 1231 log a = 9.954 6514

log sin α 9.605 2425 log b = 9.598 3656 *n*

IV a.

Pkt.	log y	log x	log ya	log xb	ya	xb	Y'
26	27	28	29	30	31	32	33
A			2.941 3246	2.247 1841	+ 873.62	+ 176.68	+ 1050.30
B			3.057 6920	2.060 2991	+ 1142.06	+ 114.89	+ 1256.95
C			3.090 1627	1.949 2530 n	+ 1230.73	− 88.97	+ 1141.76
D	Aus Beispiel 1 I a		3.121 2533	2.403 8801 n	+ 1322.07	− 253.44	+ 1068.63
E			2.928 5916	2.331 6752 n	+ 848.38	− 214.62	+ 633.76
F			2.676 6515	1.386 6754	+ 474.95	+ 24.36	+ 499.31
						$[Y'] =$	+ 5650.71
						$[y'] =$	+ 3298.50
						: 6	− 2352.21
						$dy =$	− 392.03
101			2.750 1073	1.627 0995	+ 562.48	+ 42.37	+ 604.85
102			2.807 1009	0.137 4417 n	+ 641.36	− 1.37	+ 639.99
103			2.891 0244	1.474 8721 n	+ 778.08	− 29.85	+ 748.23

IV b.

Pkt.			log xa	log yb	xa	yb	X'
34			35	36	37	38	39
A			2.603 4699 n	2.585 0388 n	− 401.30	− 384.63	− 16.67
B			2.416 5849 n	2.701 061 n	− 260.97	− 502.81	+ 241.84
C			2.305 5388	2.733 8769 n	+ 202.09	− 541.85	+ 743.94
D			2.760 1659	2.764 9675 n	+ 575.66	− 582.06	+ 1157.72
E			2.687 9610	2.572 3058 n	+ 487.99	− 373.51	+ 861.00
F			1.742 9612 n	2.320 3657 n	− 55.33	− 209.11	+ 153.78
						$[X'] =$	+ 3141.61
						$[x'] =$	+ 3330.10
						: 6	+ 188.49
						$dx =$	+ 31.41
101			1.983 3853 n	2.393 8215 n	− 96.25	− 247.64	+ 151.39
102			0.493 7275	2.450 8151 n	+ 3.12	− 282.37	+ 285.49
103			1.831 1579	2.534 7386 n	+ 67.79	− 342.56	+ 410.35

V.

Pkt.	$Y = Y' + dy$	$v = y' - Y$	v^2	$X = X' + dx$	$v = x' - X$	v^2
40	41	42	43	44	45	46
A	+ 658.27	+ 1.83	3.35	+ 14.74	+ 0.16	0.03
B	+ 864.92	+ 2.68	7.18	+ 273.25	+ 0.95	0.90
C	+ 749.73	− 0.53	0.28	+ 775.35	− 0.15	0.02
D	+ 676.60	− 0.40	0.16	+ 1189.13	− 2.73	7.45
E	+ 241.73	− 0.13	0.02	+ 892.41	+ 0.49	0.24
F	+ 107.28	− 3.48	12.11	+ 185.19	+ 1.31	1.72
		+ 4.51	23.10			10.36
		− 4.54				23.10
101	+ 212.82			+ 182.80	$[v^2]$	33.46
102	+ 247.96			+ 316.90		
103	+ 356.20			+ 441.76		
	+ 4115.51			+ 4271.53		

P r o b e

47

lg $[y]$ = 3.941 5297	9.999 0466	3.883 3082	9.947 7018
lg $[x]$ = 2.763 2632		9.600 8466	
1.178 2665	3.942 4831	0.282 4616	3.935 6064
$\beta = 86^0\ 12'\ 18''$		$\alpha + \beta = 62^0\ 26'\ 33''$	
		$\alpha = -23^0\ 45'\ 45''$	
		log k =	9.993 1233
$[Y] - 9\,dy$	+ 7643.78		
$[X] - 9\,dx$	+ 3988.84		