Paper-ID: VGI_192704

Zur Ausgleichung der Polygonzüge

Döbritzsch [1]

[1] *Assistent der Landwirtschaftlichen Hochschule, Bonn*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **25** (2), S. 29–32

1927

BibTeX:


```
@ARTICLE{Doebritzsch_VGI_192704,
Title = {Zur Ausgleichung der Polygonz{\"u}ge},
Author = {D{\"o}britzsch, },
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {29--32},
Number = {2},
Year = {1927},
Volume = {25}
}
```

Die angedeutete Art der Konstruktion wird bei einer größeren Zahl partieller Vektoren ziemlich umständlich und daher auch ungenau. Bei 3, 4, 5 ... Vektoren hätte man z. B. für den einen Durchmesser E.. 3, 6, 10.. Summanden zu bilden. Man kommt rascher und genauer mit folgender Überlegung zum Ziele.

Sind $\pm A, \pm B, \pm C, \pm D$ ... die gegebenen mittleren partiellen Fehlervektoren, so ist die Zentralellipse definiert durch die Gleichung

$$A_x^2 + B_x^2 + C_x^2 + D_x^2 + \ldots = m_x^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

wenn A_z, B_x ... die Komponenten der Fehlervektoren in der (variablen) Richtung X bedeuten. Wir deuten nun zwei partielle Vektoren (z. B. $\pm A$ und $\pm C$) als konjugierte Durchmesser einer Ellipse und ersetzen diese wieder durch zwei andere konjugierte Durchmesser (z. B. $\pm \bar{A}, \pm \bar{C}$). Diese Konstruktion ist definiert durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} A_x^2 + C_x^2 = m_{x_{AC}}^2 & \text{(Zusammenfassung zu einer Ellipse)} \\ \bar{A}_x^2 + \bar{C}_x^2 = m_{x_{AC}}^2 & \text{(Zerlegung in zwei konjugierte Durchmesser)} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 2)$$

Wir können nun Gleichung 1) ohne etwas zu ändern, schreiben:

$$\bar{A}_x^2 + B_x^2 + \bar{C}_x^2 + D_x^2 + \ldots = m_x^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Die Vektoren $\pm \bar{A}, \pm \bar{C}$, die nach Gleichung 2) die Vektoren $\pm A, \pm C$ ersetzen können auf ∞^1 verschiedene Arten gewählt werden. (Hiebei braucht die Ellipse nicht gezeichnet zu werden!) Wir wählen $\bar{A}, \bar{C}$ so, daß $\bar{C}$ in die Richtung B fällt. Dann läßt sich

$$\bar{B}^2 = B^2 + \bar{C}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

als Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes konstruieren. Da

$$\bar{B}_x^2 = B_x^2 + \bar{C}_x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

ist, vereinfacht sich die Gleichung 1)

$$\bar{A}_x^2 + \bar{B}_x^2 + D_x^2 + \ldots = m_x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1a)$$

Indem wir also zwei partielle Vektoren nach Gleichung 2) durch zwei equivalente, d. h. dieselbe Ellipse definierende Vektoren derart ersetzen, daß einer der neuen Vektoren mit einem der gegebenen zusammenfällt, so daß diese geometrisch addiert werden können, vermindern wir die Zahl der Vektoren um eins. So fahren wir fort, bis schließlich zwei Vektoren als konjugierte Durchmesser der Zentralellipse übrig bleiben. (Durchgeführt in Fig. 5 mit den Vektoren $\pm A, \pm B, \pm C$.)

In den nächsten Abschnitten soll nun gezeigt werden, wie mit Hilfe von „Williot-Plänen" für bestimmte Messungsfehler der totale Fehlervektor und für mittlere Messungsfehler die partiellen Fehlervektoren und die Zentralellipse konstruiert werden können. (Fortsetzung folgt.)

Zur Ausgleichung der Polygonzüge.

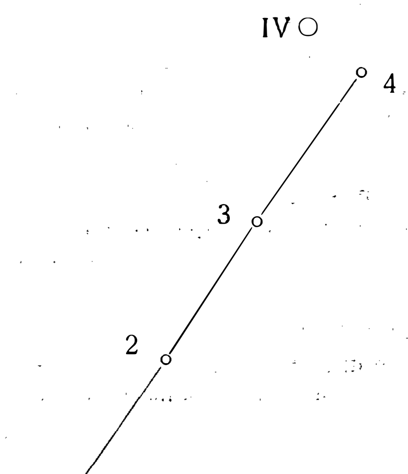
Von Landmesser Döbritzsch in Bonn, Assistent der Landwirtschaftlichen Hochschule.

Im Heft Nr. 6 des Jahrganges 1925, Seite 97—105 dieser Zeitschrift veröffentlichte Herr Ingenieur Leo Candido einen Aufsatz „Strenge Ausgleichung eines Polygonzuges", der einen Irrtum und daher auch Fehlschlüsse enthält, Herr Candido sagt, daß die strenge Ausgleichung eines Polygonzuges mit den drei Bedingungsgleichungen, bei der bekanntlich sämtliche Messungselemente gleichzeitig nach der Methode der kleinsten Quadrate verbessert werden, aufgelöst werden könne in eine stufenweise Ausgleichung derart, daß man zunächst die Verbesserungen der Brechungswinkel nur aus der Bedingungsgleichung für den Winkelabschluß errechnet, darauf den Zug mit den geänderten Brechungswinkeln berechnet und schließlich die Widersprüche im Koordinatenabschluß allein durch Änderung der Seiten tilgt. Er bezeichnet dieses Verfahren als vollständig äquivalent der strengen Ausgleichung mit der Begründung, daß die Fehler der Streckenmessung den Winkelabschluß nicht beeinflussen.

Hier liegt ein Trugschluß vor. Wenn wir z. B. bei dem beiderseitig angeschlossenen Zug auch von Fehlern der eventuell gegebenen trigonometrischen Anschlußpunkte absehen, dann gehen in den Winkelabschluß allerdings nur die Fehler der Winkelmessung ein, aber die Widersprüche des Koordinatenabschlusses sind bedingt durch Fehler der Strecken- **und** Winkelmessung. Zur Berechnung der Winkelkorrektionen müssen daher alle drei Bedingungsgleichungen dienen.

Wendet man jenes vorgeschlagene Verfahren auf stark gekrümmte Züge, wie in dem von Herrn Candido angeführten Beispiel, an, so wird sich im allgemeinen ein Resultat ergeben, nicht wesentlich verschieden von dem bei strenger Ausgleichung. Bei gestreckten Zügen hingegen — diese kommen gerade häufig in der Landmessung vor — ist es nicht immer, aber meistens gänzlich unbrauchbar.

Dies ergibt sich aus folgender Überlegung. Der mit nur abgeänderten Winkeln von Punkt I nach 4 berechnete Polygonzug I—2—3—4 sei vollständig



gestreckt, liege also auf einer Geraden. Punkt IV, auf dem der fehlerlose Zug abschließen müßte, liege nicht auf der Geraden I—4, sonst aber in beliebiger Nachbarschaft von Punkt 4. Jetzt ist es unmöglich, durch das von Herrn Candido empfohlene Verfahren Seitenverbesserungen zu errechnen, welche die Koordinatenwidersprüche zum Verschwinden bringen; denn jede Seitenänderung verschiebt den Punkt 4 nur auf der Geraden I—4, auf der IV nicht liegt.

Wenn nun ein Polygonzug auch nur ungefähr gestreckt verläuft, sind große Seitenänderungen nötig, um die Koordinatenwidersprüche zu beseitigen. Ein Zahlenbeispiel sei angeführt:

Seite	verbesserte Richtungswinkel			gemessene Strecken
	°	′	″	
(1—2)	60	41	08	351·16
(2—3)	65	33	00	362·75
(3—4)	71	51	57	349·54

Hieraus berechnet sich:

$$(y_4 - y_1) = +\,968{,}59; \quad (x_4 - x_1) = +\,430{\cdot}87$$
$$\text{Soll} = +\,968{,}74 \qquad \text{Soll} = +\,430{\cdot}61$$
$$\text{Widerspruch in } y = +\;\;0{,}15 \qquad \text{in } x = -\;\;0{\cdot}26$$

Bei Annahme gleicher Gewichte für die Seiten ergeben sich nach dem Vorschlage von Candido folgende Korrektionen:

Strecke (I—2): $-\,1{\cdot}43\,m$
„ (2—3): $-\,0{\cdot}12\,m$
„ (3—4): $+\,1{\cdot}58\,m$

Um Koordinatenwidersprüche von einigen *dm* zu beseitigen, sind Streckenänderungen über 1 *m* erforderlich. Damit ist die Unzulänglichkeit jener vorgeschlagenen Näherungsmethode genügend gekennzeichnet.

Zur Ausgleichung von Polygonzügen, die zwischen trigonometrische Festpunkte eingehängt werden, seien noch einige Bemerkungen erlaubt.

Die drei Abschlußdifferenzen in den Winkeln und Koordinatenunterschieden werden verursacht durch Fehler in den Messungselementen des Polygonzuges und durch die Fehler der gegebenen trigonometrischen Punkte. Letztere müssen wir bei Anlage des Polygonnetzes als gegeben hinnehmen, erstere können wir durch geeignete Messungsmethoden in bestimmten Grenzen halten. Wenn die Fehler der trigonometrischen Anschlußpunkte die Lage der einzelnen Polygonpunkte gegeneinander wenig beeinflussen sollen, so würden nicht zu kleine Zuglängen günstig sein. Dies wäre z. B. zu beachten, wenn vor der Anlage des Polygonnetzes zunächst weitere trigonometrische Punkte in das vorhandene Dreiecksnetz eingeschaltet werden müssen. Ist das vorhandene Dreiecksnetz mangelhaft, so werden wir die einzuschaltenden Punkte nicht zu dicht beieinander wählen. Die Polygonzüge selbst aber messen wir so genau, daß einfache Verteilung der auftretenden Widersprüche zulässig ist. Dies ist schon deswegen geboten, weil wir eine allgemein gültige Fehlertheorie der Polygonzüge nicht kennen und darum auch im allgemeinen keine Erhöhung der Güte durch Ausgleichungen erwarten dürfen. Selbst die strenge Ausgleichung wird meist nur eine formelle Beseitigung der Abschlußfehler sein. Halten wir die

Voraussetzungen für die Zweckmäßigkeit einer Ausgleichung für gegeben, dann sollten wir auch immer das strenge Verfahren anwenden. Für stark gekrümmte Züge mit guter Winkelmessung, aber relativ ungenauer Streckenermittlung ist vielleicht das von Vogler im Kalender für Vermessungswesen und Kulturtechnik, Jahrgang 1913, Beilage S. 64 beschriebene Verfahren angebracht, bei dem man die Einpassung des Zuges lediglich durch eine Koordinatentransformation mit gleichzeitiger Streckenreduktion vornimmt. Hierbei werden nur der An- und Abschlußwinkel sowie die Seiten geändert, während die übrigen Brechungswinkel ungeändert bleiben.

Zur Ausgleichung der Polygonzüge.

Antwort an Herrn Landmesser Döbritzsch.

Von Ing. Leo Candido.

Vor allem möchte ich darauf hinweisen, daß ich mit meinem Aufsatze zeigen wollte, daß die numerische Auflösung des von anderer Seite behandelten Problems der strengen Ausgleichung nicht so arg und umfangreich ist, als sie vielleicht dem ersten Blicke erscheint, daß sie vielmehr durch Anwendung der Tabelle der Koeffizienten a^2, ab und b^2 sowie tabellarische Anordnung der Rechnung ziemlich vereinfacht werden kann. Jede logarithmische Rechnung entfällt und lediglich der Rechenschieber findet Anwendung.

Es zeigt dies zur Genüge der wiederholte Hinweis auf das Fachschrifttum sowie das diesem entnommene Rechnungsbeispiel, dessen Ergebnisse hier wie dort praktisch vollkommen übereinstimmen.

Zu den Einwänden des Herrn Landmessers Döbritzsch bemerke ich: Es ist selbstverständlich vollkommen richtig, daß die Koordinatenabschlußfehler f_x und f_y abhängig sind von den Seiten- und den Winkelfehlern, wie sich durch Differenzieren der Ausdrücke für $\triangle y$ und $\triangle x$ leicht ergibt. Die Forderung, die Ausgleichung ungetrennt durchzuführen, ist daher im allgemeinen berechtigt.

Es ist aber zu bedenken, daß in der beanständeten getrennten Ausgleichung die Widersprüche f_y und f_x mittelst der ausgeglichenen Richtungswinkel berechnet wurden. Sehen wir vorläufig davon ab, ob diese Ausgleichung der Richtungswinkel für sich allein zu Recht besteht oder nicht, jedenfalls wird eines zutreffen: Sind die Polygonwinkel fehlerfrei und weist der damit berechnete Zug Widersprüche f_y und f_x auf, so sind diese dann nur hervorgerufen durch Fehler in den Seiten, sowie — darauf weist Herr Döbritzsch mit Recht hin — durch Fehler in den gegebenen Koordinaten des An- und Abschlußpunktes, falls der Zug zwischen solche eingeschaltet wurde. Da wir diese Punkte als gegebene Sollwerte hinnehmen müssen, ist in diesem Falle der gesamte Widerspruch f_y und f_x auf Konto der Seitenlängenfehler zu setzen. Eine strenge Ausgleichung hätte dann auf geschilderte Art durchgeführt zu werden.

Die beanständete Ausgleichung geht von dem Gedanken aus, daß die Winkelmessung verhältnismäßig scharf durchgeführt werden kann (siehe