Paper-ID: VGI_192710

Vektorische Darstellung der Theorie des Polarplanimeters

Lothar von Schrutka [1]

[1] *o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **25** (5), S. 73–76

1927

BibTEX:

```
@ARTICLE{Schrutka_VGI_192710,
Title =  {Vektorische Darstellung der Theorie des Polarplanimeters},
Author =  {von Schrutka, Lothar},
Journal =  {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages =  {73--76},
Number =  {5},
Year =  {1927},
Volume =  {25}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.

Redaktion:
Hofrat Prof. Dr. Ing., Dr. techn. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. K. Lego.

Nr. 5. Baden bei Wien, im Oktober 1927. XXV. Jahrg.

Vektorische Darstellung der Theorie des Polarplanimeters.

Von Dr. Lothar v. SCHRUTKA, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien.

1. Vorbemerkung. Immer mehr wird in der reinen und in der angewandten Mathematik der Vorteil, den die vektorische Denk- und Schreibweise bietet, erkannt und ausgenützt. Als einen Beitrag hiezu will ich in den folgenden Zeilen eine kurze und einfache Darstellung der Theorie des Polarplanimeters auseinandersetzen.

Die Theorie des Polarplanimeters in der bisher üblichen Form findet sich in den Werken über Vermessungskunde (z. B. Hartner-Doležal, Hand- und Lehrbuch der niederen Geodäsie, 10. Auflage, I. Band, § 77, Nr. 647, 648; Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, II. Band, 7. Auflage, § 36 und 39), in den Werken über mathematische Instrumente (z. B. Galle, Mathematische Instrumente (Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher 15), Nr. 36, 37; Willers, Mathematische Instrumente (Sammlung Göschen 922), ferner in dem Aufsatz von Amsler über mechanische Integrationen im „Katalog mathematischer Modelle“, München 1892, endlich in manchen Lehrbüchern der höheren Mathematik. Für die Geschichte der Erfindung des Polarplanimeters und den Anteil der Österreicher Miller Ritter von Hauenfels und Stadler ist die Schrift Doležal, Planimeterstudien wichtig.

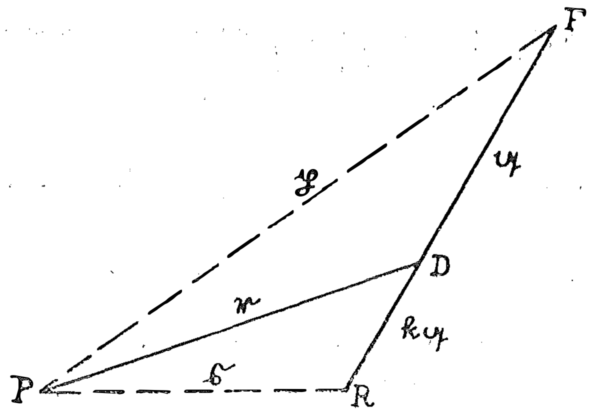
2. Grundformel. Es sei in beistehender Abbildung P der Pol, F der Fahrstift, D der Drehpunkt, R die Rolle des Planimeters. Es ist also PD der Polarm, DF der Fahrarm, DR der Rollenarm. Es mögen nun die Vektoren

$$PD = \mathfrak{r}, \quad DF = \mathfrak{q} \quad \text{und} \quad RD = k\mathfrak{q},$$

eingeführt werden. k ist eine skalare Konstante, die bei einem Planimeter oder wenigstens bei einer bestimmten Einstellung unveränderlich ist. Ferner werde noch

$$PF = \mathfrak{r} + \mathfrak{q} = \mathfrak{p} \quad \text{und} \quad PR = \mathfrak{r} - k\mathfrak{q} = \mathfrak{s}$$

gesetzt.



Die Ablesung an der Rolle mißt den Wert von

$$\mathfrak{q} \times d\mathfrak{s} = \mathfrak{q} \times (d\mathfrak{r} - k d\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} \times d\mathfrak{r} - k\mathfrak{q} \times d\mathfrak{q},$$

der Projektion der Verschiebung der Rolle $d\mathfrak{s}$ auf die Richtung senkrecht zu ihrer Drehaxe, oder senkrecht zu $\mathfrak{q}$. Hiebei macht es keinen wesentlichen Unterschied, ob das Vektorprodukt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ zweier Vektoren der Zeichenebene $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ im Sinne der räumlichen Vektorrechnung als ein auf dieser Ebene senkrecht stehender Vektor, oder im Sinne der ebenen Vektorrechnung als ein Skalar aufgefaßt wird; dieser Skalar tritt ja bei der ersten Auffassung einfach als Koeffizient beim Normaleinheitsvektor der Zeichenebene auf.

Beschreibt nun der Fahrstift eine Kurve Γ, so zeigt die Differenz der Rollenablesungen den Wert des Kurvenintegrals

$$\int_\Gamma \mathfrak{q} \times d\mathfrak{s} = \int_\Gamma \mathfrak{q} \times d\mathfrak{r} - k\int_\Gamma \mathfrak{q} \times d\mathfrak{q},$$

erstreckt über die Kurve Γ, an.

Anderseits gibt der Ausdruck $\frac{1}{2}\mathfrak{p} \times d\mathfrak{p}$ bis auf Glieder höherer Ordnung den Inhalt des Sektors zwischen der Verschiebung $d\mathfrak{p}$ von F und den beiden Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} + d\mathfrak{p}$ vom Pol aus an, daher bedeutet

$$\tfrac{1}{2}\int_\Gamma \mathfrak{p} \times d\mathfrak{p}$$

den vom Ortsvektor $\mathfrak{p}$ bei Durchlaufung des Kurvenstücks Γ überstrichenen Flächenraum mit Berücksichtigung des Bewegungssinnes und insbesondere für eine geschlossene Kurve den von dieser Fläche eingeschlossenen Flächenraum, und zwar positiv oder negativ, je nachdem das Innere der Fläche bei der Durchlaufung zur Linken oder zur Rechten liegt, ein sehr bekanntes Ergebnis der Vektorrechnung.

Führt man nun für $\mathfrak{p}$ den Wert $\mathfrak{r} + \mathfrak{q}$ ein, so zerfällt das Kurvenintegral in vier Bestandteile:

$$\tfrac{1}{2}\int_\Gamma \mathfrak{r} \times d\mathfrak{r} + \tfrac{1}{2}\int_\Gamma \mathfrak{r} \times d\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\int_\Gamma \mathfrak{q} \times d\mathfrak{r} + \tfrac{1}{2}\int_\Gamma \mathfrak{q} \times d\mathfrak{q}$$

Hienach ist nun der Unterschied zwischen der Rollenablesung und der überstrichenen Fläche

$$\tfrac{1}{2}\int_\Gamma \mathfrak{r} \times d\mathfrak{r} + (\tfrac{1}{2} + k)\int_\Gamma \mathfrak{q} \times d\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\int_\Gamma \mathfrak{r} \times d\mathfrak{q} - \tfrac{1}{2}\int_\Gamma \mathfrak{q} \times d\mathfrak{r}$$

Nach den Rechenregeln für das Vektorprodukt ist nun

$$\mathfrak{q} \times d\mathfrak{r} = - d\mathfrak{r} \times \mathfrak{q}$$

und die beiden Glieder

$$\tfrac{1}{2}\int_\Gamma \mathfrak{r} \times d\mathfrak{q} \quad \text{und} \quad -\tfrac{1}{2}\int_\Gamma \mathfrak{q} \times d\mathfrak{r}$$

lassen sich zu

$$\tfrac{1}{2}\int_\Gamma d\,(\mathfrak{r} \times \mathfrak{q})$$

zusammenfassen. Demnach kann der Unterschied zwischen Rollenablesung und überstrichener Fläche in die Form

$$\tfrac{1}{2}\int_\Gamma \mathfrak{r} \times d\mathfrak{r} + (\tfrac{1}{2} + k)\int_\Gamma \mathfrak{q} \times d\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\int_\Gamma d\,(\mathfrak{r} \times \mathfrak{q})$$

gesetzt werden.

Wird jetzt eine geschlossene Kurve Γ vorausgesetzt, so ist der letzte Summand sicherlich Null, weil es sich um das Integral eines vollständigen Differentials handelt, und es gilt der Wert

$$\tfrac{1}{2}\int_\Gamma \mathfrak{r} \times d\mathfrak{r} + (\tfrac{1}{2} + k)\int_\Gamma \mathfrak{q} \times d\mathfrak{q}$$

Die Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}$ beschreiben als Vektoren konstanter Länge Kreisbogen, und zwar ist der erste Kreisbogen tatsächlich der Weg des Drehpunktes D, während der zweite bei der Bewegung des Planimeters nicht selbst vorkommt, sondern erst durch Verlegung des Anfangspunktes von $\mathfrak{q}$ in einen festen Punkt zustandekäme. Also sind

$$\tfrac{1}{2}\int_\Gamma \mathfrak{r} \times d\mathfrak{r} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\int \mathfrak{q} \times d\mathfrak{q}$$

die von den Endpunkten der beiden Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}$ umfahrenen Flächenstücke.

Für die weitere Behandlung sind die beiden Fälle „Pol außen" und „Pol innen" zu trennen.

3. Der Fall „Pol außen". In diesem Falle wandern die Endpunkte von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}$ auf ihren Kreisbogen nur hin und her, die umfahrenen Flächen sind daher 0, und die Rollenablesung stimmt mit der vom Fahrstift umfahrenen Fläche überein.

4. Der Fall „Pol innen". In diesem Falle beschreiben die Endpunkte von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}$ je einen vollen Kreisumfang, die Flächen der beiden Kreise sind $\mathfrak{r}^2\pi$ und $\mathfrak{q}^2\pi$ und der Unterschied zwischen Rollenablesung und umfahrener Fläche beträgt

$$\mathfrak{r}^2\pi + (1 + 2\,k)\,\mathfrak{q}^2\pi.$$

Man kann hiefür $C^2\pi$ setzen, worin

$$C = \sqrt{\mathfrak{r}^2 + (1 + 2\,k)\,\mathfrak{q}^2}$$

der Halbmesser eines gewissen Kreises, des „Grundkreises" ist. Dieser Halbmesser ist, wie eine einfache Rechnung zeigt, gleich dem Abstand des Fahrstifts vom Pol, $|\mathfrak{p}|$, für eine bestimmte Stellung des Planimeters, nämlich die, bei der die Rollenebene durch den Pol geht. In der Tat ist unter dieser Voraussetzung

$$\mathfrak{s} \, . \, \mathfrak{q} = 0, \quad \mathfrak{r}\mathfrak{q} - k\mathfrak{q}^2 = 0, \quad \mathfrak{r}\mathfrak{q} = k\mathfrak{q}^2,$$

daher

$$|\mathfrak{p}|^2 = \mathfrak{p}^2 = (\mathfrak{r} + \mathfrak{q})^2 = \mathfrak{r}^2 + 2\,\mathfrak{r}\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^2 = \mathfrak{r}^2 + (2\,k + 1)\,\mathfrak{q}^2 = C^2.$$

Wien, 3. April 1927.

Die Bestimmung der Richtungskoeffizienten nach der Methode der Tangentendifferenzen.

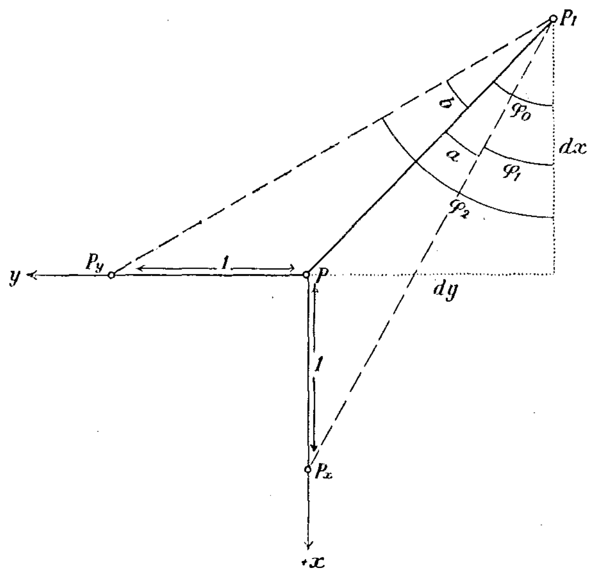
Von Hofrat Ing. Artur MORPURGO, Graz.

Bei der Ausgleichung eines größeren trigonometrischen Netzes entfällt ein namhafter Teil der Arbeit auf die für die strenge Rechnung erforderlichen Vorbereitungen, als: Ableitung der vorläufigen Koordinaten der zu bestimmenden Punkte, Ermittlung der vorläufigen Südwinkel und der Richtungskoeffizienten.

Bei dem Bestreben, die strenge Rechnung so einfach als möglich zu gestalten, um die Näherungsverfahren zugunsten der Methode der kleinsten Quadrate verdrängen zu können, dürfen auch die genannten Vorarbeiten nicht übersehen werden.

Eine einfache Art, die Koordinaten eines Punktes aus dem Schnitte zweier Richtungen zu bestimmen, habe ich bereits in meiner Abhandlung „Die Fluchtmethode" besprochen.

Wie dort, sollen auch bei der Ableitung der Richtungskoeffizienten die Grundsätze als Richtschnur dienen: Die Rechnung soll mit Ausschluß der Seitenlängen und mit Benützung der Rechenmaschine erfolgen.



In der obenstehenden Figur soll der Punkt P_1 als feststehend, P als veränderlich angenommen werden. Die Unterschiede in den Koordinaten beider Punkte seien dy und dx.