

Paper-ID: VGI\_192801



## Beitrag zur graphischen und rechnerischen Lösung des Hansenschen Problemes

August Gabrielli

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **26** (1), S. 1–6

1928

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Gabrielli_VGI_192801,  
  Title = {Beitrag zur graphischen und rechnerischen L{"o}sung des Hansenschen  
    Problemes},  
  Author = {Gabrielli, August},  
  Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {1--6},  
  Number = {1},  
  Year = {1928},  
  Volume = {26}  
}
```



# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

ORGAN  
des  
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.

Redaktion:

Hofrat Prof. Dr. Ing., Dr. techn. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. K. Lego.

---

Nr. 1.                      Baden bei Wien, im Februar 1928.                      XXVI. Jahrg.

---

## Beitrag zur graphischen und rechnerischen Lösung des Hansenschen Problemcs.

Von Ing. Aug. GABRIELLI.

Gegeben sind zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  durch ihre ebenen Koordinaten; zu suchen ist die Lage eines Punktes  $P$  unter der Voraussetzung, daß eine Aufstellung in den gegebenen Punkten unmöglich oder zu zeitraubend wäre, beide jedoch von  $P$  aus sichtbar sind (Kirchtürme, Schornsteine, Blitzableiter, schwer zugängliche Bergspitzen usw.).

### I. Graphische Lösung mit dem Meßtische.

Die gegebenen Punkte sind in einem verjüngten Verhältnisse auf dem Meßtischblatte aufgetragen. Über dem zu bestimmenden Punkte  $P$  wird ein Signal errichtet. Zur Lagenbestimmung von  $P$  ist die Einschaltung eines Hilfspunktes erforderlich, für dessen Auswahl drei Bedingungen entscheidend sind: die Raumfrage des Tisches, Sicht auf die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  und günstige Dreiecksschnitte.

Ist ein entsprechender Platz im Gelände gefunden, so wird der Tisch daselbst aufgestellt, horizontalisiert, die Kippregel in  $\overline{P_2 P_1}$  angelegt und nach  $P_1$  (in der Natur) orientiert; hierauf wird die Kippregel um  $P_2$  nach  $P$  verschwenkt und der Rayon  $\overline{P_2 H_0}$  gezogen. Der hiedurch aufgetragene Winkel  $P_1 P_2 H_0$  ist daher gleich dem Winkel  $P_1 P_0 P = w_3$ . Nach Ablotung des Punktes  $P_2$  und Markierung desselben wird nun der Punkt  $P_1$  des Tisches über dieser Marke zentriert, mit der an  $\overline{P_1 P_2}$  angelegten Kippregel nach  $P_2$  (in der Natur) orientiert, die Kippregel um  $P_1$  nach  $P$  verschwenkt und der Rayon  $\overline{P_1 H_0}$  gezogen, wodurch der Winkel  $P_2 P_0 P$  auf  $P_2 P_1 H_0 = w_4$  übertragen wird. Der Schnittpunkt der beiden gezogenen Rayone ergibt den Konstruktionshilfspunkt  $H_0$  (sogen. Collinscher Punkt für den Rückwärtseinschnitt nach Bohnenberger und Bessel).

Nun wird an Stelle der Marke ein Signal aufgestellt, der Tisch nach  $P$  übertragen und daselbst derselbe Vorgang wiederholt wie im Punkte  $P_0$ , wobei jedoch bereits bei der ersten Tischaufstellung grob zu zentrieren sein wird. Der Schnitt der beiden gezogenen Rayone ergibt den Konstruktionshilfspunkt  $H$ .

Nach Anlegung der Kippregel in  $\overline{H_0H}$  und Orientierung des Tisches nach  $P_0$  wird die grobe Lage des Punktes  $P$  durch Rückwärtseinschnitt über die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  erhalten, worauf nach neuerlicher Zentrierung des Tisches dieser Vorgang sorgfältig zu wiederholen ist. Der Schnittpunkt der im Rückwärtseinschnitt gezogenen Rayone ergibt den gesuchten Punkt  $P$ , der bei genauer Arbeitsausführung auf der Geraden Verbindungslinie von  $\overline{H_0H}$  liegen muß.

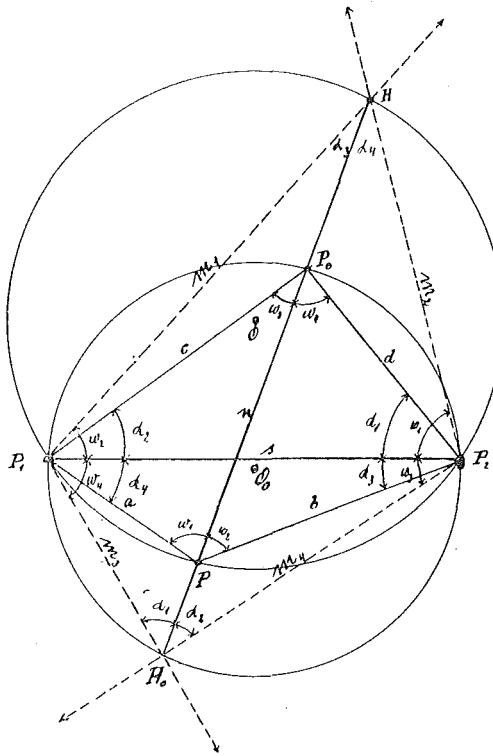
Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion.

Durch die gegebenen Punkte  $P_1$  und  $P_2$  und die Konstruktionshilfspunkte  $H_0$  und  $H$  sind die beiden Kreise mit den Mittelpunkten  $O_0$  und  $O$  gegeben.

Im Kreise  $O_0$  entspricht die Sehne  $\overline{P_2H_0}$  dem von  $P_1$  aufgetragenen Sehnwinkel  $w_4$ , die Sehne  $\overline{P_1H_0}$  dem Sehnwinkel  $w_3$ ; ebenso im Kreise  $O$  der Sehne  $\overline{P_2H}$  der Sehnwinkel  $w_2$  und der Sehne  $\overline{P_1H}$  der Sehnwinkel  $w_1$ .

Die Verbindungslinie  $\overline{H_0H}$  schneidet den Kreis  $O_0$  im Punkte  $P_0$ , den Kreis  $O$  im Punkte  $P$ .

Da nun im Kreise  $O_0$



1.  $\sphericalangle P_1P_0H_0 = \sphericalangle P_1P_2H_0$  über der Sehne  $\overline{P_1H_0}$  gleich ist dem  $\sphericalangle P_1P_0P = w_3$
  2.  $\sphericalangle P_2P_0H_0 = \sphericalangle P_2P_1H_0$  „ „ „  $\overline{P_2H_0}$  „ „ „  $\sphericalangle P_2P_0P = w_4$
- und im Kreise  $O$

3.  $\sphericalangle P_1PH = \sphericalangle P_1P_2H$  über der Sehne  $\overline{P_1H}$  gleich ist dem  $\sphericalangle P_1PP_0 = w_1$   
 4.  $\sphericalangle P_2PH = \sphericalangle P_2P_1H$  „ „ „  $\overline{P_2H}$  „ „ „  $\sphericalangle P_2PP_0 = w_2$   
 so ist damit der Beweis für die Richtigkeit der konstruktiven Ausführung erbracht.

## II. Rechnerische Lösung.

An die Stelle des Meßtisches tritt das Winkelinstrument, es wurden im Hilfspunkte  $P_0$  die Winkel  $w_3$  und  $w_4$ , im Punkte  $P$  die Winkel  $w_1$  und  $w_2$  gemessen.

Für die koordinatenmäßige Bestimmung des Punktes  $P$  ist die Auflösung des  $\triangle P_1P_2P$  nach Seiten und Winkeln erforderlich.

Wie aus der Konstruktion hervorgeht, ist der Winkel  $PP_1P_2 = \alpha_4$  als Peripheriewinkel über der Sehne  $P_2P$  im Kreise  $O$  gleich dem Winkel  $PHP_2$  und der Winkel  $PP_2P_1 = \alpha_3$  über der Sehne  $P_1P$  im Kreise  $O$  gleich dem Winkel  $PHP_1$ ; es erübrigt sich daher nur die  $\triangle H_0HP_1$  und  $H_0HP_2$  nach den Winkeln aufzulösen, um zu dem gewünschten Ergebnisse zu gelangen.

### Rechnungsgang:

$$\begin{aligned}
 1. \quad \triangle P_1P_2H \dots\dots m_1 &= \frac{s \cdot \sin w_1}{\sin(w_1 + w_2)}; \quad m_2 = \frac{s \cdot \sin w_2}{\sin(w_1 + w_2)}; \\
 \triangle P_1P_2H_0 \dots\dots m_3 &= \frac{s \cdot \sin w_3}{\sin(w_3 + w_4)}; \quad m_4 = \frac{s \cdot \sin w_4}{\sin(w_3 + w_4)}; \\
 2. \quad \triangle HH_0P \dots\dots \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} &= 90 - \frac{w_2 + w_4}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2} = \frac{m_1 - m_3}{m_1 + m_3} \times \\
 &\quad \times \operatorname{cotg} \frac{w_2 + w_4}{2} \\
 \triangle HH_0P_0 \dots\dots \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2} &= 90 - \frac{w_1 + w_3}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha_2 - \alpha_4}{2} = \frac{m_2 - m_4}{m_2 + m_4} \times \\
 &\quad \times \operatorname{cotg} \frac{w_1 + w_3}{2}
 \end{aligned}$$

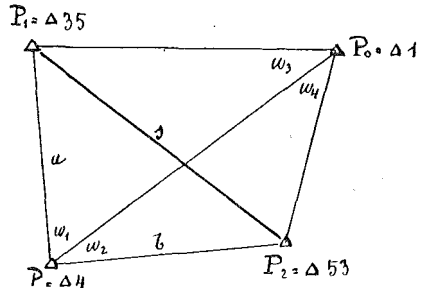
daraus ergeben sich die Winkel  $\alpha_1$   $\alpha_2$   $\alpha_3$  und  $\alpha_4$

$$3. \quad \triangle P_1P_2P \dots\dots \overline{P_1P} = a = \frac{s \cdot \sin \alpha_3}{\sin(w_1 + w_2)}; \quad P_2P = b = \frac{s \cdot \sin \alpha_4}{\sin(w_1 + w_2)},$$

worauf

4. zur eigentlichen Berechnung der Koordinaten des Punktes  $P$  übergegangen werden kann.

Es sei hier im folgenden dieser Rechnungsgang an einem praktischen Beispiele gezeigt, wobei zur Vergleichung der Endresultate die Bestimmung des  $\triangle 4 = P$  aus der Polygonalinstruktion unter gewissen Modifikationen gewählt wird; als gegebene Punkte:  $\triangle 35$  und  $\triangle 53$ , als Hilfspunkt  $\triangle 1 = P_0$ .



$$P_1 = \triangle 35 \dots \dots y = - 17.398'38; \quad x = - 112.069'97$$

$$P_2 = \triangle 53 \dots \dots y = - 18.834'69; \quad x = - 111.643'56$$

Aus M. VIII:  $\overline{\text{Südwinkel}} \triangle 35 \triangle 53 = \sigma_{12} = 286^\circ 32' 06''$ ;  $\sigma_{21} = 106^\circ 32' 06''$

Aus M. VIII:  $\triangle 35 \triangle 53 = s$ ;  $\log s = 3.175\ 5899$ .

Gemessen:

$w_1 = 72^\circ 01' 27''$	$w_3 = 33^\circ 48' 25''$	$w_1 + w_3 = 105^\circ 49' 52''$	$\frac{w_1 + w_3}{2} = 52^\circ 54' 56''$
$w_2 = 30^\circ 54' 13''$	$w_4 = 49^\circ 53' 15''$	$w_2 + w_4 = 80^\circ 47' 28''$	$\frac{w_2 + w_4}{2} = 40^\circ 23' 44''$
$w_1 + w_2 = 102^\circ 55' 40''$	$w_3 + w_4 = 83^\circ 41' 40''$	$90 - \frac{w_1 + w_3}{2} = 37^\circ 05' 04''$	$90 - \frac{w_2 + w_4}{2} = 49^\circ 36' 16''$

1 a)

$\log s\ 3.1755899$	$m_1 = 1462'20$
$\log \sin (w_1 + w_3)\ 9.9888500$	
$\text{Diff. } 3.1867399$	$m_2 = 789'52$
$\log \sin w_1\ 9.9782658$	
$\log \sin w_2\ 9.7106211$	$m_1 + m_2 = 2300'91$
$\log m_1\ 3.1650057$	
$\log m_2\ 2.8973610$	$m_1 - m_2 = 623'49$

b)

$m_3 = 838'71$	$\log s\ 3.1755899$
	$\log \sin (w_3 + w_4)\ 9.9973647$
$m_4 = 1152'82$	$\text{Diff. } 3.1782852$
	$\log \sin w_3\ 9.7453842$
$m_3 + m_4 = 1942'34$	$\log \sin w_4\ 9.8835370$
	$\log m_3\ 2.9236094$
$m_3 - m_4 = -363'30$	$\log m_4\ 3.0617622$

2 a)

$\log (m_1 - m_3)\ 2.7948295$	$\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2} = 17^\circ 39' 50''$
$\log \cot g \frac{w_2 + w_4}{2}\ 0.070\ 1047$	
$\text{Sme } 2.864\ 9342$	$\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} = 49^\circ 36' 16''$
$\log (m_1 + m_3)\ 3.361\ 8996$	$\alpha_1 = 67^\circ 16' 06''$
$\log \text{tg } \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2}\ 9.5030346$	$\alpha_3 = 31^\circ 56' 26''$

b)

$\frac{\alpha_2 - \alpha_4}{2} = -8^\circ 02' 50''$	$\log (m_2 - m_4)\ 2.5602654n$
	$\log \cot g \frac{w_1 + w_3}{2}\ 9.8784456$
$\frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2} = 37^\circ 05' 04''$	$\text{Sme } 2.4387110$
$\alpha_2 = 29^\circ 02' 14''$	$\log (m_2 + m_4)\ 3.2883253$
$\alpha_4 = 45^\circ 07' 54''$	$\log \text{tg } \frac{\alpha_2 - \alpha_4}{2}\ 9.1503858n$

Probe:  $(w_1 + w_2) + \alpha_3 + \alpha_4$  soll gleich 0 sein;  $(102^\circ 55' 40'') + 31^\circ 56' 26'' + 45^\circ 07' 54'' - 180^\circ 0' 0''$

3

$\log \text{Diff } (1a)$	$3.186\ 7399$
$\log \sin \alpha_3$	$9.723\ 4878$
$\log \sin \alpha_4$	$9.850\ 4807$
$\log \text{Diff} + \log \sin \alpha_3 = \log a = 2.910\ 2277$	$\log \text{Diff} + \log \sin \alpha_4 = \log b = 3.037\ 2206$

4

<p style="text-align: center;"><math>286^\circ 32' 06''</math></p> <p>Südwinkel <math>\overline{P_1 P} = \sigma_{12} + \alpha_4</math>; <math>+ 45^\circ 7' 54''</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\sigma = 331^\circ 40' 00''</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\log \sin \sigma\ 9.676\ 3281</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\log a\ 2.910\ 2277</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\log \cos \sigma\ 9.944\ 5821</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\log dy\ 2.586\ 5558</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\log dx\ 2.854\ 8098</math></p> <p><math>P_1 \dots y = - 17.398'38; \quad x = - 112.069'97</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\underline{dy = - 385'97; \quad dx = + 715'83}</math></p> <p><math>P \dots y = - 17.784'35; \quad x = - 111.354'14</math></p>	<p style="text-align: center;"><math>106^\circ 32' 06''</math></p> <p>Südwinkel <math>\overline{P_2 P} = \sigma_{21} - \alpha_3</math>; <math>- 31^\circ 56' 26''</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\sigma = 74^\circ 35' 40''</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\log \sin \sigma\ 9.984\ 1084</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\log b\ 3.037\ 2206</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\log \cos \sigma\ 9.424\ 3092</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\log dy\ 3.021\ 3290</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\log dx\ 2.461\ 5298</math></p> <p><math>P_2 \dots y = - 18.834'69; \quad x = - 111.643'56</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\underline{dy = + 1015'34 \quad dx = + 289'42}</math></p> <p><math>P \dots y = - 17.784'35 \quad x = - 111.354'14</math></p>
--	---

$$P \dots Y = - 17.784'35; \quad X = - 111.354'14$$

Die Nichtübereinstimmung der Koordinaten um 0.03 *m* bzw. 0.02 *m* ist darauf zurückzuführen, daß der Punkt  $\triangle 4$  der Instruktion eben in einem anderen Zusammenhange bestimmt wurde, und seine Koordinaten bereits ausgeglichene Werte darstellen.

Das Hansensche Problem läßt natürlich eine ganze Reihe anderer mittelbarer und unmittelbarer Auflösungen zu; im weiteren sei nur auf zwei Lösungen hingewiesen, die ebenfalls rasch und sicher zum Ziele führen.

Viele Praktiker wenden bei der Auflösung den Grundsatz an, daß die Bestimmung der Winkel  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  in den gegebenen Punkten  $P_1$  und  $P_2$  unabhängig von der Seitenlänge  $\overline{P_1 P_2} = s$  erfolgen kann. Der Rechnungsgang ist in dieser Hinsicht folgender:

Die Länge der Strecke  $\overline{PP_0} = n$  wird beliebig, beispielsweise mit 1 angenommen, sodann die beiden Dreiecke  $PP_1P_0$  und  $PP_2P_0$  unter Zuhilfnahme des Sinussatzes zur Auflösung gebracht, wodurch eine naturgemäß fingierte Länge der Seiten (*a*) (*b*) erhalten wird.

$$(a) = \frac{\sin w_3}{\sin (w_1 + w_3)}; \quad (b) = \frac{\sin w_4}{\sin (w_2 + w_4)}$$

Aus der weiteren Auflösung des Dreieckes  $P_1P_2P$  ergibt die Anwendung der Neperischen Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_3 - \alpha_4}{2} = \frac{a - b}{a + b} \times \operatorname{cotg} \frac{w_1 + w_2}{2}; \quad \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} = 90 - \frac{w_1 + w_2}{2}$$

die Winkelwerte von  $\alpha_3$  und  $\alpha_4$ .

Nun kann zur Bestimmung der wirklichen Werte von *a* und *b* geschritten werden, die aus dem Dreiecke  $P_1P_2P$ , in welchem die Seite  $\overline{P_1P_2} = s$  und sämtliche Winkel bekannt sind, gewonnen werden, und in weiterer Folge zur Koordinatenberechnung selbst.

Die folgende Auflösung sei nur der Vollständigkeit halber hier aufgenommen, obwohl sie als allgemein bekannt vorausgesetzt werden muß.

$$1. \text{ Im Dreiecke } P_1P_2P \dots \operatorname{tg} \frac{\alpha_3 - \alpha_4}{2} = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{cotg} \frac{w_1 + w_2}{2}$$

In dieser Gleichung können (*a* - *b*) und (*a* + *b*) durch bekannte Größen ersetzt werden.

$$2. \text{ Im Dreiecke } PP_1P_0 \dots a = \frac{n \cdot \sin w_3}{\sin (w_1 + w_3)};$$

$$\text{im Dreiecke } PP_2P_0 \dots b = \frac{n \cdot \sin w_4}{\sin (w_2 + w_4)};$$

es wird daher

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\frac{\sin w_3}{\sin (w_1 + w_3)} - \frac{\sin w_4}{\sin (w_2 + w_4)}}{\frac{\sin w_3}{\sin (w_1 + w_3)} + \frac{\sin w_4}{\sin (w_2 + w_4)}};$$

um diesen Ausdruck logarithmisch brauchbar zu machen, wird

$$\dots \frac{\sin w_3}{\sin (w_1 + w_3)} = \operatorname{tg} \epsilon \text{ und } \frac{\sin w_4}{\sin (w_2 + w_4)} = \operatorname{tg} \xi$$

gesetzt, wodurch

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon - \operatorname{tg} \xi}{\operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{tg} \xi} = \frac{\sin(\varepsilon - \xi)}{\sin(\varepsilon + \xi)}$$

wird; dies in die Gleichung 1 eingesetzt gibt:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_3 - \alpha_4}{2} = \frac{\sin(\varepsilon - \xi)}{\sin(\varepsilon + \xi)} \operatorname{cotg} \frac{w_1 + w_2}{2}; \quad \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} = 90 - \frac{w_1 + w_2}{2}$$

woraus die Winkel  $\alpha_3$  und  $\alpha_4$ , hierauf die Seiten  $a$  und  $b$  und endlich die Koordinaten des Punktes  $P$  selbst abgeleitet werden können.

Ich habe es schon immer als Unrecht empfunden, daß seitens der Landmesser dem Hansenschen Probleme speziell in Hinsicht auf die Punkteinschaltung nicht jene Beachtung geschenkt wird, die es infolge seiner zeitsparenden und exakten Lösung für sich in Anspruch nehmen kann. Die Möglichkeit seiner Verwendung zur Lösung geodätischer Aufgaben ist sehr mannigfaltig, nicht nur in bezug auf die Ausführung von Kleintriangulierungen, sondern und insbesondere in den Gebieten mit spärlichen und unverlässlichen Anbindepunkten. Gerade in solchen Gebieten, wo vielfach Bussolenzüge mit optischer Distanzmessung zur Anwendung gelangen, wäre es wünschenswert sich solcherart von der ursprünglichen, nicht immer einwandfreien, Mappendarstellung der näheren Umgebung möglichst unabhängig zu machen, um auf diese Weise auf die allmähliche Verbesserung der Katastralmappen hinwirken zu können.

## Über die Umformung von Fehlergleichungen.

Von S. Wellisch.

Bekanntlich darf man von dem einem Ausgleichungsproblem zugrunde gelegten System von Fehlergleichungen einzelne Gleichungen nicht mit einer beliebigen Zahl multiplizieren oder durch eine solche dividieren ohne zugleich die Gewichtsverhältnisse gegenüber den unverändert gebliebenen Gleichungen zu regeln. Hingegen unterliegt es keinem Anstande, alle Fehlergleichungen in der gleichen Weise umzugestalten, da dann eine Veränderung der Gewichtsverhältnisse nicht eintritt.

Angenommen, es soll aus einem österreichischen Werke ein nach der Methode der kleinsten Quadrate behandeltes, die Volkswirtschaft betreffendes Problem, dessen Fehlergleichungen die Form haben:

$$ax + by + cz + \dots - S \text{ (Schilling)} = v_S$$

in ein französisches und ein reichsdeutsches Werk übernommen werden. Bedienen sich hiebei die fremden Autoren, zum besseren Verständnis ihrer Leser, der eigenen Landeswährung, so muß der Franzose die Fehlergleichungen mit der Währungsrelation  $1 S = m \text{ fcs}$ , der Deutsche mit der Relation  $1 S = n \text{ Rmk.}$  multiplizieren. Die Fehlergleichungen haben dann die Form:

$$\text{Österreich: } ax + by + cz + \dots - S = v_S \text{ (Schilling)}$$

$$\text{Frankreich: } Ax + By + Cz + \dots - F = v_F \text{ (Francs)}$$

$$\text{Deutschland: } \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z + \dots - M = v_M \text{ (Mark),}$$