Paper-ID: VGI_192807

Über die Exzentrizität der Alhidade

Friedrich Bastl [1]

[1] *Vermessungsoberkommissär im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **26** (3), S. 35–43

1928

BibTEX:


```
@ARTICLE{Bastl_VGI_192807,
Title = {{\"U}ber die Exzentrizit{\"a}t der Alhidade},
Author = {Bastl, Friedrich},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {35--43},
Number = {3},
Year = {1928},
Volume = {26}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.

Redaktion:

Hofrat Prof. Dr. Ing., techn. et mont. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. K. Lego.

Nr. 3. **Baden bei Wien, im Juli 1928.** **XXVI. Jahrg.**

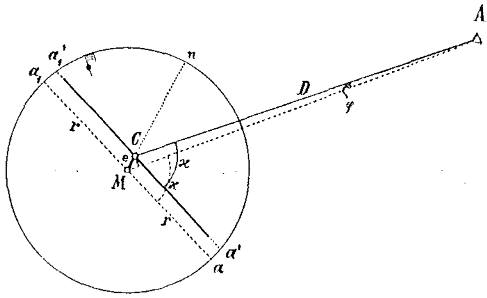
Über die Exzentrizität der Alhidade.

Von Ing. Dr. techn. Friedrich Bastl, Vermessungsoberkommissär im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen.

Abweichend von der in der Fachliteratur meist gebräuchlichen Untersuchung des Fehlereinflusses einer Exzentrizität der Alhidade auf einen Winkel, soll sich die folgende Studie mit dem Fehlereinfluß auf einzelne Richtungen befassen. Dies hat außer dem Vorteil größter Einfachheit und Anschaulichkeit auch den einer größeren Allgemeinheit für sich; denn, gelingt der Nachweis, daß durch Mittelbildung aus diametralen Ablesungen jede einzelne Richtung frei vom Exzentrizitätseinfluß erhalten wird, so ist damit die Fehlerfreiheit jeder beliebigen Funktion solcher Richtungen — also auch jedes Winkels — eo ipso gleichfalls ausgesprochen. Der entgegengesetzte Vorgang, aus der nachgewiesenen Fehlerfreiheit eines Winkels auf die ihn einschließenden Richtungen rückschließen zu wollen, wäre hingegen unzulässig; diese könnten vielmehr noch immer mit gleichgroßen und gleichgerichteten Fehlern behaftet sein, welche erst durch die Subtraktion wegfallen, ähnlich wie dies zum Beispiel beim Nivellieren aus der Mitte mit einem nicht berichtigten Instrumente der Fall ist.

Es sei M der Mittelpunkt des Teilkreises, C der Schnitt-(Durchstoß-)Punkt der Alhidadenachse mit der Zeichenebene, A ein anvisierter Zielpunkt. Die Ablesevorrichtungen, die meist nicht in der Visierebene liegen, seien gegen diese um den beliebigen, konstanten Winkel $\varkappa$ versetzt; die Strecke $a'_1 C a'$ stelle demgemäß die Alhidade, beziehungsweise präziser: die Ableselinie derselben, d. h. die Verbindungsgerade der Nullpunkte der beiden Ablesemittel vor. Diese Ablesemittel seien zunächst genau „diametral" vorausgesetzt, wobei sich der Begriff „diametral" naturgemäß nur auf den Drehpunkt C beziehen kann, da nur dieser Winkel konstant ist, während jener, dessen Scheitel in M liegt, sich je nach der Lage der Alhidade ändert. Die Exzentrizität ist durch ihre lineare Größe $CM = e$ und durch ihre Richtung (Ablesung: n) fixiert. Als Folge der Exzentrizität der Alhidade tritt zunächst im allgemeinen an beiden Ablesevorrichtungen a' und a'_1, die etwa als die üblichen versenkten Nonien gedacht seien, ein Klaffen ein, da die Alhidadenarme — um die Stelle n passieren zu können —

höchstens die Länge $r-e$ haben dürfen; dieses Klaffen tritt in der Figur wohl kraß hervor, kommt aber wegen der Kleinheit von e dem Beobachter praktisch kaum jemals zum Bewußtsein. Die Visierlinie (Ebene) ist, da bei dieser Untersuchung von dem gleichzeitigen Vorhandensein anderer Fehler (wie Exzentrizität des Fernrohres) abgesehen wird, durch die voll ausgezogene Gerade CA dargestellt. Wäre keine Exzentrizität vorhanden, dann würden die Visierlinie, beziehungsweise die Ableselinie der Alhidade mit den punktiert gezeichneten Geraden MA, beziehungsweise $a_1\,M\,a$ zusammenfallen.



Die beiden Visierlinien, die effektive und die ideelle, konvergieren gegen den Zielpunkt A unter dem sehr kleinen Winkel φ, den auch die voll gezeichnete und die punktierte Lage der Alhidade miteinander einschließen und mit dessen Größe wir uns zunächst befassen wollen. Der Winkel φ rechnet sich leicht aus:

$$\sin\varphi = \frac{e.\sin(a-\varkappa-n)}{D},$$

worin ohne wesentlichen Fehler statt a die gemachte Ablesung a' und $\sin\varphi = \widehat{\varphi}$ gesetzt werden kann; an einem gegebenen Instrument wird φ ein Maximum, wenn $\sin(a-\varkappa-n) = 1$ und D möglichst klein ist. Für $e = 0{\cdot}02$ *mm* und $D = 3000$ *mm* wird z. B.

$$\varphi''_{max} = 206265\,\frac{0{\cdot}02}{3000} = 1{\cdot}375''$$

Unter diesen besonders ungünstigen Annahmen ergibt sich ein Wert, der zwar an sich recht klein, doch mit stark vergrößerndem Fernrohr und Schraubenmikroskopen wahrnehmbar sein müßte. Dem gegenüber ist aber folgendes festzustellen: Bedingung für das wirkliche Zustandekommen einer Konvergenz der beiden Visierlinien gegen A ist, daß der lineare Visur-(Einstell-)Fehler in A klein gegenüber der Exzentrizität e sein muß. Daß diese Bedingung selbst bei Anwendung der feinsten Signalisierungsvorrichtungen (Zielscheiben, Signallichter, Marken, Miren, Zentrierspitzen usw.) kaum jemals erfüllbar ist, liegt auf der Hand. Da also der wirkliche, lineare Einstellfehler in A fast stets ein Vielfaches von e ist, ist die Wahrscheinlichkeit für eine Divergenz der beiden Visuren in der Richtung gegen A fast ebenso groß, wie für eine Konvergenz und es kann somit der stets — und zwar meist ganz beträchtlich — unterhalb des angularen Visurfehlers liegende Winkel φ unbedenklich vernachlässigt, also $\varphi = \emptyset$ gesetzt werden. Hiedurch wird auch: $a'_1\,a' \parallel a_1\,a$; da nun Bogen ein und desselben Kreises zwischen parallelen Sehnen einander gleich sind, ist:

$$\widehat{a_1\,a_1'} = \widehat{a'\,a} = \delta.$$

Um denselben Betrag, um den infolge der Exzentrizität a' gegenüber a zu klein ist, um denselben Betrag ist a_1' gegenüber a_1 zu groß oder umgekehrt, so daß das arithmetische Mittel $\frac{a' + a_1'}{2}$ der beiden diametralen Lesungen a' und a_1'

$$\frac{a' + a_1'}{2} = \frac{a - \delta + a_1 + \delta}{2} = \frac{a + a_1}{2}$$

frei vom Fehler der Exzentrizität der Alhidade ist.

Der an jeder Ablesevorrichtung auftretende Fehler δ rechnet sich strenge aus der Gleichung:

$$\delta = r. \operatorname{arc\,sin} \frac{e. \sin(a - n)}{r};$$

setzt man zur Vereinfachung den Winkel $a - n = \alpha$ und berücksichtigt, daß der Kleinheit von $\frac{\delta}{r}$ wegen, annähernd

$$\widehat{\delta} = \frac{\delta}{r} \doteq \sin\frac{\delta}{r}$$

gesetzt werden kann, so fällt in der oberen Gleichung der arcsin weg und man gelangt zu der bekannten Formel:

$$\widehat{\delta} = \frac{e. \sin\alpha}{r} \text{ oder in Sekunden: } \delta'' = 206265 \,.\, \frac{e \,.\, \sin\alpha}{r};$$

δ wird ein Maximum für $\alpha = 90^0$ (270^0), das heißt, wenn die Alhidade auf der Richtung der Exzentrizität normal steht und es ist beispielsweise für $e = 0{\cdot}02$ *mm* und $r = 70$ *mm*

$$\delta''_{max} = 206265 \frac{0{\cdot}02}{70} \doteq 59''$$

Als nächstes sei die Frage aufgeworfen, welcher Fehlerrest $\triangle$ infolge der Exzentrizität im arithmetischen Mittel verbleibt, wenn die beiden Ablesemittel nicht genau diametral angebracht sind. Es schließe das eine der beiden wie früher den Winkel α mit der Richtung von e ein, das andere hingegen im selben Moment den Winkel $\alpha + 180^0 + \varepsilon$.

$$\text{Dann ist: } a' = a - \rho'' \,.\, \frac{e \,.\, \sin\alpha}{r};$$

$$\text{und: } a_1' = a_1 - \rho'' \,.\, \frac{e \,.\, \sin(\alpha + 180^0 + \varepsilon)}{r};$$

(die Umkehr des Fehler-Vorzeichens besorgt von selbst der Sinus!). Aus den beiden Gleichungen folgt durch Bildung der halben Summe:

$$\frac{a' + a_1'}{2} = \frac{a + a_1}{2} - \rho'' \,.\, \frac{e}{2r} \,.\, [\sin(\alpha + 180^0 + \varepsilon) + \sin\alpha] \text{ oder:}$$

$$\frac{a' + a_1'}{2} - \frac{a + a_1}{2} = -\rho'' \frac{e}{r} \,.\, \sin\left(\alpha + 90^0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \,.\, \cos\left(90^0 + \frac{\varepsilon}{2}\right);$$

da nun die linke Seite dieser Gleichung den gesuchten Fehlerrest $\triangle$ des arithmetischen Mittels in Sekunden angibt, folgt:

$$\triangle'' = \rho'' \,.\, \frac{e}{r} \,.\, \sin\left(\alpha + 90^0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \,.\, \sin\frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Diese Gleichung gestattet jederzeit, zu irgendwie gegebenen Argumentwerten den Fehler $\triangle''$ zu berechnen. An einem bestimmten vorgegebenen Instrumente ist sowohl e als auch r und ε konstant und es hängt $\triangle$ nur mehr von α, also der Richtung der Alhidade, ab. Für $\alpha + 90^0 + \frac{\varepsilon}{2} = 0^0\,(180^0)$ oder $\alpha = -90^0 - \frac{\varepsilon}{2}$ $\left(\text{bzw. } \alpha = 90^0 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, das heißt für Ablesungen symmetrisch zur Lesung n, verschwindet $\triangle$ und erreicht andererseits für $\alpha + 90^0 + \frac{\varepsilon}{2} = 90^0\,(270^0)$ oder $\alpha = -\frac{\varepsilon}{2}$ $\left(\text{bzw. } \alpha = 180^0 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ seinen Maximalwert; es ist dann:

$$\triangle''_{max} = \rho'' \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin\frac{\varepsilon}{2}.$$

Man kann die Frage nun auch umgekehrt stellen: Wie groß darf die Abweichung ε von der Diametralität im Maximum sein, ohne daß der Fehler des Mittels einen tolerierten Betrag $\triangle''_{max}$ übersteigt?
Antwort erteilt die Gleichung:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{r \cdot \triangle''_{max}}{e \cdot \rho''}.$$

Ist beispielsweise wie früher $e = 0{\cdot}02$ *mm*, $r = 70$ *mm* und wird der tolerierte Fehler $\triangle''_{max} = 1' = 60''$ gewählt, so erhält man

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{70 \cdot 60}{0{\cdot}02 \cdot 206265} = 1{\cdot}018, \text{ somit } \varepsilon \text{ imaginär!}$$

Dies hat zu bedeuten, daß — bei was immer für einer gegenseitigen Lage der Ablesemittel — ein Fehler von einer vollen Minute im arithmetischen Mittel unter den angenommenen Verhältnissen niemals zu befürchten ist und es steht diese Tatsache auch mit dem früher berechneten Werte von δ im vollen Einklang; nachdem dort der Fehler an e i n e r Ablesevorrichtung im M a x i m u m mit 59″ gefunden wurde, jener an der zweiten daher jedenfalls kleiner ist, muß auch der Fehler des Mittels $\triangle_{max} < 59''$ sein.

Im nachfolgenden sei eine tabellarische Zusammenstellung der Rechnungsergebnisse für die praktisch in Betracht kommenden Fälle gegeben, wobei die lineare Exzentrizität e durchwegs mit 0·02 *mm* angenommen und der tolerierte Fehler $\triangle''_{max}$ bei Instrumenten mit Nonien oder Skalenmikroskopen mit der h a l b e n Angabe bzw. Schätzungseinheit, bei jenen mit Schraubenmikroskopen mit der g a n z e n Schätzungseinheit gewählt wurde. Aus der nebenstehenden Tabelle ist ersichtlich, daß besonders bei der verhältnismäßig g r o b e n Ablesevorrichtung der Nonien die Forderung nach g e n a u e r Einhaltung der Diametralität ziemlich hinfällig ist. Für die noch heute üblichen g r ö b e r e n Nonien (Angaben von 10″ bis 60″) gilt die überschlägige Regel, daß die Abweichung ε im Maximum ohne Schaden annähernd ebensoviele Grade betragen könnte als die Nonienangabe Sekunden. Bei Schraubenmikroskopen ist die Einhaltung der diametralen Lage von wesentlich größerer Bedeutung, insbesondere bei den winzigen Teilkreisen der Zeiss'schen und Wild'schen Theodolite. Doch ist selbst hier praktisch kein Anlaß zur Befürchtung eines diesbezüglichen Fehlers gegeben, da an allen von den feinmechanischen Werkstätten in den Verkehr gebrachten Instrumenten die Alhidaden-„Knickung" ε fast ausnahmslos weniger als 1 Minute, allerhöchstens 1 bis 2 Minuten beträgt. Soll ein Instrument bezüglich Alhidadenknickung untersucht werden, so gehe man von einer beliebigen Stellung der Alhidade aus und mache an der Ablesevorrichtung I die Lesung a_1 und an II die Lesung a_2; hierauf bringe man I genau auf die Lesung a_2 und mache nun an II die Ablesung a_3. Die Differenz $a_3 - a_1$ ergibt bereits den Betrag $2\,\varepsilon$. Zur Erhöhung der Genauigkeit kann dieses Repetitionsverfahren beliebig oft fortgesetzt werden (I auf a_3, bei II: a_4, dann I auf a_4, bei II: a_5 usw.) und man erhält auf diese Weise $2\,n\,\varepsilon$.

$$e = 0{\cdot}02\ mm$$

$\triangle''_{max}$	$r_{(mm)}$	ε_{max}	Anmerkung
30″	70	61° 14′	Nonien
15″	70	29° 30′	
10″	80	22° 22′	
5″	100	13° 56′	
1″	200	5° 34′	
3″	70	5° 50′	Skalenmikroskope
0·2″	40	0° 13′ 20″	Schraubenmikroskope
0·2″	120	0° 40′ 00″	
0·02″	250	0° 08′ 20″	

Bisher wurde der Nachweis erbracht, daß durch Bildung des arithmetischen Mittels aus diametralen Ablesungen jede einzelne Richtung frei vom Fehler der Exzentrizität der Alhidade erhalten wird und es liegt auf der Hand, daß in allen Fällen, in denen diametrale Ablesungen nicht zu erlangen sind — sei es, daß nur ein Bogen ausgeführt ist (Vertikalbogen kleiner Universalinstrumente, Spiegelsextant usw.) — sei es, daß der Kreis materiell wohl voll ausgeführt ist, aber die Teilung nicht durchläuft — eine Ausschaltung des Exzentrizitätsfehlers prinzipiell ausgeschlossen ist. Anders jedoch bei dem stets durchgeteilten Horizontalkreis kleiner Instrumente, die nur einen Nonius haben. Für die Elimination des Exzentrizitätsfehlers bedarf man nun freilich zweier Ablesungen an diametralen Stellen, doch ist es hiebei ganz irrelevant, auf welche Weise diese beiden Lesungen zustande gekommen sind, nämlich ob in einer und derselben Instrumentenlage an zwei gleichzeitig vorhandenen Ablesevorrichtungen oder ob nach Durchschlagen und Drehen an dem einzigen Ablesemittel. Die Beobachtung in beiden Kreislagen eliminiert somit stets auch den Exzentrizitätsfehler der Alhidade und stellt geradezu eine Universalmethode zur Beseitigung fast aller Instrumentalfehler dar. Diese Erkenntnis ist nun keineswegs neu, sondern findet sich — ohne ganz eingehende, ausführliche Begründung — unter anderem bereits in Jordans Handbuch der Vermessungskunde vor, findet aber im Instrumentenbau der ganzen Welt leider nicht die verdiente Auswirkung und scheint selbst Fachleuten nicht immer geläufig zu sein. Als Mittel zur Ausschaltung der Alhidadenexzentrizität ist die zweite (diametrale) Ablesevorrichtung somit jedenfalls überflüssig und entbehrlich, vom Standpunkte einer Erhöhung der Ablesegenauigkeit (im Verhältnisse $1:\sqrt{2}$) oder allfälliger Kontrolle bleibt sie nach wie vor begrüßenswert, doch schlägt der Verfasser vor, an allen Instrumenten, welche prinzipiell stets in beiden Kreislagen verwendet werden, was bei astronomischen Beobachtungen, Triangulierungen, Polygonisierungen usw. die Regel ist, die beiden Ablesevorrichtungen nicht unter 180°, sondern unter 90° gegeneinander zu versetzen. Man erzielt hiedurch den Vorteil, daß in einem einzigen Satze für jede Richtung bereits 4 Stellen des Limbus zur Ablesung benützt werden und dementsprechend die Anzahl der Sätze, die hauptsächlich zur Ausschaltung der Teilungsfehler beobachtet werden, und damit die ganze Feldarbeit auf die Hälfte vermindert werden könnte. Analog wäre bei 4 Ablesevorrichtungen eine Versetzung um je 45° angezeigt.

Kehrt man zu dem heute gebräuchlichen Prinzip der Elimination der Alhidadenexzentrizität in einer einzigen Kreislage zurück, so findet man außer den am häufigsten vorkommenden zwei diametralen Ablesemitteln an historischen und an großen astronomischen Instrumenten manchmal auch deren vier, unter je 90° gegen einander abstehend, vor. Da von diesen I und III, bzw. II und IV paarweise diametral sind und da

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\frac{a_1 + a_3}{2} + \frac{a_2 + a_4}{2}}{2},$$

worin die Teilmittel im Zähler bereits nachgewiesenermaßen frei vom Alhidadenexzentrizitätsfehler sind, gilt dies auch für das Gesamtmittel. Analoges trifft auch für 6, 8, 10 ..... $2n$ Ablesevorrichtungen zu, insoferne diese ein reguläres Polygon bilden oder wenigstens paarweise diametral stehen.

Es drängt sich nun die Frage auf, ob die Diametralität für unseren Zweck unerläßlich ist, oder ob sich dasselbe Ergebnis etwa auch mit einer ungeraden Anzahl von Ablesevorrichtungen erzielen läßt. Daß dies bei der Anzahl 1 — (in einer Kreislage!) — nicht zutrifft, bedarf keines Beweises. Im folgenden seien zunächst drei unter je 120° gegen einander versetzte Ablesevorrichtungen in ihrem Zusammenwirken untersucht. Es seien die Lesungen an den Ablesevorrichtungen: bei I ..... a_1', bei II ..... a_2' und bei III ..... a_3'; die korrespondierenden ideellen Lesungen — wenn keine Exzentrizität vorhanden wäre — seien: a_1, a_2 bzw. a_3. Der Richtungswinkel mit der Exzentrizität sei für I ..... α, für II ..... $\alpha + 120°$ und für III ..... $\alpha + 240°$. Es ist dann:

$$\left.\begin{aligned} a_1' &= a_1 - \rho'' \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin\alpha \\ a_2' &= a_2 - \rho'' \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin(\alpha + 120°) \\ a_3' &= a_3 - \rho'' \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin(\alpha + 240°) \end{aligned}\right\| + \text{ und dividiert durch } 3$$

$$\frac{a_1' + a_2' + a_3'}{3} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} - \rho'' \cdot \frac{e}{3r} \cdot [\sin\alpha + \sin(\alpha + 120°) + \sin(\alpha + 240°)]$$

oder:

$$\frac{a_1'+a_2'+a_3'}{3}-\frac{a_1+a_2+a_3}{3}=-\rho''.\frac{e}{3r}.[\sin\alpha+\sin\alpha.\cos 120^0+\cos\alpha.\sin 120^0+$$
$$+\sin\alpha\cos 240^0+\cos\alpha.\sin 240^0];$$

da die linke Seite wieder den Fehler $\triangle''$ des arithmetischen Mittels vorstellt, ist:

$$\triangle''=-\rho''.\frac{e}{3r}.[\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{3}.\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\sqrt{3}.\cos\alpha]=0.$$

Es findet somit durch drei um je 120⁰ abstehende Ablesevorrichtungen gleichfalls eine strenge Elimination des Exzentrizitätsfehlers der Alhidade bereits in e i n e r Kreislage statt.

Nunmehr soll noch untersucht werden, ob dies auch bei anderen — und bei welchen — ungeraden Anzahlen zutrifft. Wir setzen n im Vollkreis äquidistante Ablesevorrichtungen voraus und behalten analoge Bezeichnungsweise bei, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} a_1'=a_1-\rho''.\frac{e}{r}.\sin\alpha \\ a_2'=a_2-\rho''.\frac{e}{r}.\sin\left(\alpha+\frac{360^0}{n}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{n-1}=a_{n-1}-\rho''.\frac{e}{r}.\sin\left[\alpha+(n-2).\frac{360^0}{n}\right] \\ a'_n=a_n-\rho''.\frac{e}{r}.\sin\left[\alpha+(n-1).\frac{360^0}{n}\right] \end{array}\right\Vert \text{ addiert und durch } n \text{ dividiert:}$$

$$\frac{[a']}{n}-\frac{[a]}{n}=-\rho''.\frac{e}{nr}.\left\{\sin\alpha+\sin\left[\alpha+\frac{360^0}{n}\right]+\sin\left[\alpha+2\frac{360^0}{n}\right]+\dots+\right.$$
$$\left.+\sin\left[\alpha+(n-2)\frac{360^0}{n}\right]+\sin\left[\alpha+(n-1)\frac{360^0}{n}\right]\right\}$$

$$\triangle''=-\rho''.\frac{e}{n.r}.\left\Vert\begin{array}{l}\sin\alpha.\left[1+\cos\frac{360^0}{n}+\cos 2.\frac{360^0}{n}+\dots\dots+\right.\\ \qquad\left.+\cos(n-2)\frac{360^0}{n}+\cos(n-1)\frac{360^0}{n}\right]+\\ +\cos\alpha.\left[\sin\frac{360^0}{n}+\sin 2.\frac{360^0}{n}+\sin 3.\frac{360^0}{n}+\dots\dots+\right.\\ \left.+\sin(n-3)\frac{360^0}{n}+\sin(n-2)\frac{360^0}{n}+\sin(n-1)\frac{360^0}{n}\right]\end{array}\right\Vert$$

Was die Summe der S i n u s s e anbelangt, ist zu beachten, daß sich deren Argumente paarweise auf 360⁰ ergänzen, also je zwei Sinusse entgegengesetzt gleich sind und sich wegheben, so daß nur ein allfälliges Mittelglied übrigbleiben könnte; diesbezüglich ist zu beachten, daß der Fall: „n gerade" infolge der Diametralität längst erledigt ist und jetzt nur der Fall: „n ungerade" interessiert; dann ist aber $n-1$ und somit die Anzahl der Sinusglieder gerade, ein Mittelglied existiert nicht und die Sinussumme verschwindet. Hiemit vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\triangle''=-\rho''\frac{e.\sin\alpha}{n.r}.\left[\cos\frac{360^0}{n}+\cos 2.\frac{360^0}{n}+\cos 3.\frac{360^0}{n}+\dots\dots+\right.$$
$$\left.+\cos(n-2)\frac{360^0}{n}+\cos(n-1)\frac{360^0}{n}+\cos n\frac{360^0}{n}\right],$$

worin berücksichtigt ist, daß: $1 = \cos 360^0 = \cos n \cdot \frac{360^0}{n}$ ist.

Soll nun eine Elimination des Exzentrizitätsfehlers stattfinden, so muß auch für eine e n d l i c h e Exzentrizität e und für j e d e Lage α der Alhidade der Betrag $\triangle''$ verschwinden, also:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \cos k \cdot \frac{360^0}{n} = \emptyset \text{ sein.}$$

Dies ist unsere Bedingung in ihrer e r s t e n Form, dem a n a l y t i s c h e n Ausdruck. Eine Auflösung der komplizierten, transzendenten Gleichung explizite nach n und darauffolgende Determination, welche ungerade Zahlen die Gleichung befriedigen, ist ausgeschlossen. Glücklicherweise läßt sie noch andere Deutungen zu. Denkt man sich um den Ursprung eines ebenen, rechtwinkeligen Koordinatensystems einen Kreis mit dem Radius 1 gezeichnet und auf diesem die Orte unserer n Ablesevorrichtungen derart aufgetragen, daß eine in den Schnittpunkt des Kreises mit der positiven x-Achse zu liegen kommt, so erkennt man, daß die obige Bedingung gleichbedeutend ist mit:

$$x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n = \sum_1^n x = \emptyset \text{ oder in Worten:}$$

Die algebraische Summe der Abszissen aller Ableseorte muß gleich Null sein. Analog stellt die frühere Summe der Sinusse die algebraische O r d i n a t e n-summe vor und man erkennt in dieser g e o m e t r i s c h e n Deutung der Bedingung, daß die Sinussumme aus Gründen der Symmetrie bezüglich der x-Achse verschwinden mußte. Bezüglich der y-Achse besteht aber bei ungeradem n keine Symmetrie und es läßt daher auch die geometrische Bedingung $\Sigma x = \emptyset$ unmittelbar keine Entscheidung zu, bei welchen n-Ecken sie erfüllt ist.

In höchst eleganter Weise hingegen gibt die d r i t t e Fassung unserer Bedingung, die s t a t i s c h e Deutung, restlosen Aufschluß. Denkt man sich in jedem der n Eckpunkte je eine Kraft von der Größe 1 normal zur Zeichenebene angreifend, so stellt der Summenausdruck:

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + \ldots\ldots + 1 \cdot x_{n-1} + 1 \cdot x_n = \sum_1^n x$$

nichts anderes als das statische Moment des Kräftesystems bezüglich der y-Achse vor. Die x-Achse als Symmetrieachse ist eine Schwerlinie; außerdem besitzt das reguläre n-Eck noch $n - 1$ Symmetrieachsen, die zugleich Schwerlinien sind. Die Symmetrieachsen schneiden sich in einem Punkte, der beim regulären Polygon mit dem Mittelpunkt des Umkreises — also unserem Ursprung — zusammenfällt. Folglich ist der Ursprung Schwerpunkt des Kräftesystemes, die y-Achse auch eine Schwerlinie und als solche muß das auf sie bezogene statische Moment gleich Null sein.

J e d e s r e g u l ä r e Polygon erfüllt somit die verlangte Bedingung. Gleichzeitig gibt die statische Auslegung des Problemes ein Mittel zu weiterer Verallgemeinerung in die Hand. Denken wir uns n Ablesevorrichtungen in b e l i e b i g e r Verteilung auf einem Kreise angeordnet, so bilden sie ein allgemeines Sehnen-n-Eck, wobei n diesmal nach Belieben gerade oder ungerade sein soll. Der Zentriwinkel zwischen der mit 1 und der mit k bezeichneten Ablesevorrichtung sei ω_k; ω_1 — obwohl gleich Null — sei der Gleichförmigkeit halber mitverwendet; die übrige Bezeichnungsweise wie früher. Man gelangt durch eine ganz analoge Entwicklung zu:

$$\triangle'' = -\rho'' \cdot \frac{e}{n \cdot r} \cdot \left\{ \sin\alpha \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \cos\omega_k + \cos\alpha \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \sin\omega_k \cdot \right\}.$$

Soll eine Elimination des Exzentrizitätsfehlers stattfinden, so müssen die zwei Bedingungen erfüllt sein:

$$\sum_{1}^{n} \cos\omega_k = \emptyset \quad \text{und} \quad \sum_{1}^{n} \sin\omega_k = \emptyset.$$

Von den n Ablesevorrichtungen können $n - 2$ (mit gewissen Einschränkungen) beliebig geeignet gewählt werden (natürlich nicht etwa alle ganz nahe beieinander gehäuft!) und die restlichen zwei aus den obigen Bedingungen derart bestimmt werden, daß sie den Fehler der $n - 2$ gewählten kompensieren. Dies führt auf die goniometrische Bestimmungsgleichungen:

$$\cos x + \cos y = A$$
$$\sin x + \sin y = B,$$

worin x und y die beiden gesuchten Zentriwinkel sind.

Hiemit gelangt man zu dem allgemeinsten Satze:

„Fällt der Schwerpunkt des Systemes der gleich gewichtig gedachten Orte der Ablesevorrichtungen in die Drehachse, so findet eine Elimination des Exzentrizitätsfehlers der Alhidade bereits in einer Kreislage statt."

Beobachtungen über die Grundstückzusammenlegung in den Niederlanden.

Von Ing. Dr. HERMANN KALLBRUNNER, Agrar-Baurat.

Im allgemeinen ist die Kulturfläche in den Niederlanden vollkommen arrondiert. In der Regel, insbesonders im Westen und im Norden des Landes, also in den wohlhabenden Gegenden, liegen die Grundstücke rings um das Anwesen und werden geradelinig durch Straßen und Kanäle, selten durch Grenzen auf dem festen Lande begrenzt. Das neu gewonnene Land wird selbstverständlich nur in arrondierten und geradelinig begrenzten, von geradelinig geführten Straßen und Kanälen berührten bzw. durchzogenen Landgütern abgegeben. Auch die Teilungen von Gütern werden stets geradelinig vorgenommen, und zwar grundsätzlich so, daß die neu entstandenen Güter vollkommen arrondiert sind.

Im Süden und Osten des Königreiches, also in den ärmeren Gegenden, überwiegt die Gemenglage, ja sie erreicht vielfach Formen, die noch schlimmer sind wie die diesbezüglich schlechtesten Österreichs. Die Grundstückzerstückelung ist in den Gegenden auf dem Sandboden stärker wie auf dem Moorboden, denn der letztere muß, so wird diese Tatsache erklärt, mit Gespannen bearbeitet werden; der Sandboden kann aber auch mit der Schaufel umgestochen werden. Deshalb nimmt man Grundstückteilungen im Moorgebiet nur solange