Paper-ID: VGI_192813

Praktische Untersuchungen in der Ausgleichungsrechnung

Siegmund Wellisch [1]

[1] *Senatsrat i. R., Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **26** (5), S. 71–78

1928

BibTEX:

```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_192813,
Title = {Praktische Untersuchungen in der Ausgleichungsrechnung},
Author = {Wellisch, Siegmund},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {71--78},
Number = {5},
Year = {1928},
Volume = {26}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.

Redaktion:
Hofrat Prof. Dr. Ing., techn. et mont. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. K. Lego.

Nr. 5. Baden bei Wien, im Oktober 1928. XXVI. Jahrg.

Praktische Untersuchungen in der Ausgleichungsrechnung.

Von Senatsrat Ing. SIEGMUND WELLISCH.

1. Rechenerleichterung durch Klassengruppierung.

Um die Übereinstimmung des G a u ß schen Fehlergesetzes mit der Erfahrung zu überprüfen, hatte General A. F e r r e r o die Anregung gegeben, die Winkelschlußfehler der 2238 Dreiecke der italienischen Katastertriangulierung zu diesem Zwecke heranzuziehen, welcher Aufgabe Ing. F. G u a r d u c c i in der Zeitschrift „Rivista di topografia e catasto", Roma 1889, Vol. II, S. 1 bis 12, sich unterzog. Diesem Beispiele folgte auch W. T i n t e r, indem er die aus der Haupttriangulierung im ehemaligen Österreich-Ungarn hervorgehenden Schlußfehler der 1250 festgelegten Dreiecke in ähnlicher Weise bearbeitete, wobei der mittlere Fehler der Dreiecksabschlüsse nach dem ausführlichen, aber umständlichen Verfahren durch Summierung der einzeln gebildeten Fehlerquadrate und elementare Mittelung berechnet wurde.

Bei der Bearbeitung eines so umfangreichen Beobachtungsmateriales wird man aber gerne nach Rechenerleichterungen greifen, wenn hiedurch die Ergebnisse keine wesentlichen Veränderungen erleiden.

Nachstehend sei die von T i n t e r in den „Veröffentlichungen der k. k. österreichischen Kommission der Internationalen Erdmessung", Wien 1904, ausgeführte Fehlerrechnung mit Benützung eines vereinfachten Rechenverfahrens nochmals durchgerechnet. Die Schlußfehler der 1250 Dreiecke hier abzudrucken, muß mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum unterbleiben. In den „Veröffentlichungen des k. u. k. militär-geographischen Institutes" sind sie im I. Band, II. Abschnitt S. 125 bis 202, und im II. Band, II. Abschnitt, S. 105 bis 157, enthalten; in T i n t e r s Publikation füllen sie, übersichtlich zusammengestellt, volle s e c h s D r u c k s e i t e n. Einen noch viel größeren Raum würde die Wiedergabe der umständlichen Berechnung des mittleren Fehlers mit den ausführlichen Quadraten der zumeist vierzifferigen Zahlenwerte der Schlußfehler beanspruchen. Das hier vorgeführte vereinfachte Verfahren umfaßt aber bloß zwölf Zeilen, d. i. den hundertsten Teil des Raumes, und beansprucht demgemäß auch nur den hundertsten Teil an Zeit und Arbeit.

Nach diesem Verfahren werden zunächst sämtliche Dreiecksschlußfehler in Klassen gruppiert und der Größe nach geordnet, z. B. in 12 Klassen mit einem Spielraum von 0·5″. Unter den 1250 Dreiecken kommen dann vor:

287	Dreiecke	mit	Schlußfehlern	zwischen	0·0	und	0·5″,	im	Mittel	0·25″
288	„	„	„	„	0·5	„	1·0	„	„	0·75
220	„	„	„	„	1·0	„	1·5	„	„	1·25
183	„	„	„	„	1·5	„	2·0	„	„	1·75
135	„	„	„	„	2·0	„	2·5	„	„	2·25
85	„	„	„	„	2·5	„	3·0	„	„	2·75
26	„	„	„	„	3·0	„	3·5	„	„	3·25
14	„	„	„	„	3·5	„	4·0	„	„	3·75
7	„	„	„	„	4·0	„	4·5	„	„	4·25
3	„	„	„	„	4·5	„	5·0	„	„	4·75
1	„	„	„	„	5·0	„	5·5	„	„	5·25
1	„	„	„	„	8·0	„	8·5	„	„	8·25

Tabelle 1.

p	ε	$\varepsilon\varepsilon$	$p\,\varepsilon\varepsilon$
287	0·25	0·0625	17·9375
288	0·75	0·5625	162·0000
220	1·25	1·5625	343·7500
183	1·75	3·0625	560·4375
135	2·25	5·0625	683·4375
85	2·75	7·5625	642·8125
26	3·25	10·5625	274·6250
14	3·75	14·0625	196·8750
7	4·25	18·0625	126·4375
3	4·75	22·5625	67·6875
1	5·25	27·5625	27·5625
1	8·25	68·0625	68·0625
1250			3171·6250

Die Tabelle 1 enthält das gesamte Berechnungsmaterial in allen seinen Einzelheiten. Ermittelt man damit den mittleren Fehler für einen Dreiecksabschluß nach der üblichen Formel

$$m = \sqrt{\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{[p]}},$$

so ist der daraus erhaltene Wert gegenüber dem Sollbetrage zu groß, denn er wird nicht aus den unmittelbar gegebenen Fehlerargumenten, welche stets den kleinsten Wert liefern, sondern aus den in den Klassenmittelpunkten angenommenen Argumenten berechnet, welche sich so einstellen, wie wenn die Verteilung der Einzelwerte innerhalb einer Klasse gleichmäßig oder geradlinig erfolgen würde. Da aber die tatsächliche Verteilung der Gauß schen Fehlerkurve entsprechend vor sich geht, so häufen sich die Fehlerargumente in den Klassen unterhalb der den mittleren Fehler anzeigenden Wendepunkte an den gegen den Kurvengipfel zu gelegenen Seiten der Klassen, in den Klassen oberhalb der Wendepunkte aber umgekehrt an den anderen Seiten der Klassen stärker, wie dies besonders deutlich erkannt wird, wenn die gegebenen Klassen zu Doppelklassen vereinigt werden.

Durch die Annahme der Klassenmitten als Fehlerargumente erhält man also in den Gebieten unterhalb der Wendepunkte zu kleine, in den anderen Klassen zu große Werte, so daß zwar der Durchschnittswert oder das arithmetische Mittel aller Argumente zufolge des gegenseitigen Aufhebens der mit verschiedenen Vorzeichen versehenen Abweichungen dadurch keine nennenswerte Veränderung erfährt; der mittlere Fehler aber, in dessen Berechnung die stets positiven Quadrate der Abweichungen eingehen, müssen stets zu groß ausfallen.

Je schmäler und zahlreicher die Klassen gehalten werden, desto geringer wird der dadurch herbeigeführte Fehler; sinkt die Anzahl der Klassen mit gleichzeitiger Zunahme ihrer Breiten oder Spielräume, so kann der Fehler so stark anwachsen, daß eine Korrektion notwendig erscheint.

Bei gleichmäßiger Verteilung der Schlußfehler innerhalb der Klassen würden die zur Quadratsumme gelieferten Anteile der beiden Klassenhälften je $\frac{p}{2}\varepsilon^2$, zusammen daher $p\,\varepsilon^2$ betragen. Bei der tatsächlich vorhandenen Ungleichmäßigkeit ihrer Verteilung betragen aber die Anteile der beiden Hälften einer im flachen Teile der Fehlerkurve gelegenen Klasse, wenn die Klassenspielräume oder Intervalle mit i bezeichnet werden, etwa

$$\frac{p_1}{2}\left(\varepsilon_1 - \frac{i}{4}\right)^2 + \frac{p_1}{2}\left(\varepsilon_1 + \frac{i}{4}\right)^2 = p_1\left(\varepsilon_1^2 + \frac{i^2}{16}\right),$$

einer im stärker gekrümmten Kurvenaste gelegenen Klasse hingegen

$$\frac{p_2}{2}\left(\varepsilon_2 - \frac{i}{3}\right)^2 + \frac{p_2}{2}\left(\varepsilon_2 + \frac{i}{3}\right)^2 = p_2\left(\varepsilon_2^2 + \frac{i^2}{9}\right).$$

Die mit dem Quadrate der Klassenspielräume zunehmende Korrektion der Fehlerquadrate beträgt im ersten Falle $\frac{i^2}{16}$, im zweiten Falle $\frac{i^2}{9}$. Für die Summe aller Korrektionen fand der englische Mathematiker W. F. Sheppard im Durchschnitt den Ausdruck

$$c = n\frac{i^2}{12};$$

es lautet demnach bei Unterteilung des Beobachtungsmateriales in Klassen die Formel für den mittleren Fehler:

$$m = \sqrt{\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n} - \frac{i^2}{12}}.$$

In unserem Beispiel ist $[p] = n = 1250$, $i = 0{\cdot}5''$, $[p\,\varepsilon\varepsilon] = 3171{\cdot}6250$,
somit ist . . . . $m = \pm\, 1{\cdot}5863''$
im Vergleiche mit dem Ergebnisse von Tinter . . $\pm\, 1{\cdot}5869''$
mit einem Unterschied von bloß . . . . $0{\cdot}0006''$

oder 0·04%, während ohne Anbringung der Klassen- oder Sheppard-Korrektion $m = \pm 1{\cdot}5929$, d. i. um 0·0060″, also um den zehnfachen Betrag zu groß, sich ergeben würde.

Vereinigt man je zwei Klassen der Tabelle 1 mit dem Spielraume 0·5″ zu neuen Doppelklassen mit dem Spielraume 1·0″, so wird die ohnehin schon sehr geringe Rechenarbeit noch um die Hälfte geringer und es ergibt sich dann laut Tabelle 2:

$$m = \sqrt{\frac{3220{\cdot}50}{1250} - \frac{1}{12}} = \pm 1{\cdot}5789'',$$

gegen das Resultat von Tinter um 0·0080″, d. i. um 0·5% zu klein. Bei einer noch weiteren Verminderung der Klassenanzahl durch Vereinigung je zweier Klassen der Tabelle 2 würde der mittlere Fehler bereits um etwa 3% fehlerhaft ausfallen. Darf also einerseits die Anzahl der Klassen nicht zu klein gewählt werden, so würde anderseits bei zu viel Klassen die Rechenerleichterung nicht mehr ins Gewicht fallen. Man wird daher im allgemeinen nicht unter 10 und nicht über 20 Klassen gehen.

Tabelle 2.

p	ε	$p\,\varepsilon\varepsilon$
575	0·5	143·75
403	1·5	906·75
220	2·5	1375·00
40	3·5	490·00
10	4·5	202·50
1	5·5	30·25
1	8·5	72·25
1250		3220·50

2. Eine wichtige Frage der Vermessungspraxis.

Der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels, als des wahrscheinlichsten Wertes der durch Beobachtungen zu ermittelnden Größe, ist bestimmt durch die Formel:

$$M = \frac{\sqrt{[\varepsilon\varepsilon]}}{n} = \frac{m}{\sqrt{n}},$$

das ist das Verhältnis des mittleren Fehlers m einer einzelnen Beobachtung zur Quadratwurzel der Anzahl n aller Beobachtungen. Die Genauigkeit des arithmetischen Mittels kann daher auf zweierlei Weise erhöht werden: einmal durch Verminderung des mittleren Fehlers der Einzelbeobachtungen, dann durch Vermehrung der Anzahl der Beobachtungen. Bei der anzustrebenden Ökonomie in der Vermessungspraxis tritt an den Observator die Frage heran, was zur Erhöhung der Genauigkeit der Messungsziele besser sei: zahlreiche Beobachtungen, wenn auch mit geringerer Genauigkeit, oder wenige Beobachtungen mit sehr hoher Genauigkeit?

Diese Aufgabe möge an dem Beispiel von W. Tinter untersucht werden, wo die Summe der unmittelbar gemessenen Dreieckswinkel durch ihren wahren Wert Null gegeben ist, wo die einzelnen Dreiecksabschlüsse ε also zugleich ihre wahren Fehler sind und deren arithmetisches Mittel die Abweichung von der Wahrheit darstellt und in Verbindung mit seinem mittleren Fehler als Maß für die Genauigkeit der ganzen Beobachtungsreihe angesehen werden kann. In diesem Beispiele werden $n = 1250$ Dreiecksabschlüsse mit einer Ableseschärfe von $i = 0{\cdot}001''$, also viele Beobachtungen mit hoher Genauigkeit herangezogen, ein Fall, der wohl die beste, wenn auch mühsamste und zeitraubendste Messungsart darstellt. Hier ist nach der Abhandlung von T i n t e r:

Summe der positiven Schlußfehler	$[+\varepsilon] = +\ 800{\cdot}433''$
Summe der negativen Schlußfehler	$[-\varepsilon] = -\ 800{\cdot}962$
Gesamtsumme der Schlußfehler	$[\lvert\varepsilon\rvert] = 1601{\cdot}395$
Algebraische Summe $[+\varepsilon] + [-\varepsilon] =$	$[\varepsilon] = -\ 0{\cdot}529$
Summe der Fehlerquadrate	$[\varepsilon\varepsilon] = 3148{\cdot}00\,36\,05$
sohin arithmetisches Mittel $A = \frac{[\varepsilon]}{n}$	$= -\ 0{\cdot}00\,04\,23$
mittlerer Fehler eines Dreiecksabschlusses $m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$	$= \pm\ 1{\cdot}5869$
mittlerer Fehler des arithm. Mittels $M = \frac{\sqrt{[\varepsilon\varepsilon]}}{n}$	$= \pm\ 0{\cdot}04489$

Werden sämtliche Dreiecksabschlüsse auf $0{\cdot}1''$ abgerundet, indem angenommen wird, daß die Winkel nicht auf drei, sondern bloß auf eine Dezimalstelle abgelesen worden seien, so liefert die Rechnung:

$$[+\varepsilon] = +\ 765{\cdot}7 \qquad [\varepsilon] = +\ 3{\cdot}9$$
$$[-\varepsilon] = -\ 761{\cdot}8 \qquad [\varepsilon\varepsilon] = 3154{\cdot}11$$
$$A = +\ 0{\cdot}00\,3120$$
$$m^* = \pm\ 1{\cdot}5885$$
$$M^* = \pm\ 0{\cdot}04493$$

oder nach Anbringung der S h e p p a r d schen Klassenkorrektion mit $i = 0{\cdot}1$:

$$m = \pm\ 1{\cdot}5882, \quad M = \pm\ 0{\cdot}04492.$$

Bei einer Ableseschärfe auf ganze Sekunden mit $i = 1$ erhält man:

$$[+\varepsilon] = +\ 788 \qquad [\varepsilon] = -\ 55$$
$$[-\varepsilon] = -\ 843 \qquad [\varepsilon\varepsilon] = 3309$$
$$A = -\ 0{\cdot}044000$$
$$m^* = \pm\ 1{\cdot}6270 \qquad m = \pm\ 1{\cdot}6012$$
$$M^* = \pm\ 0{\cdot}04602 \qquad M = \pm\ 0{\cdot}04529.$$

Übersichtlich zusammengestellt hat man:

T a b e l l e 3 für $n = 1250$.

i	A	m	M
$0{\cdot}001''$	$-\ 0{\cdot}00042$	$1{\cdot}5869$	$0{\cdot}04489$
$0{\cdot}1''$	$+\ 0{\cdot}00312$	$1{\cdot}5882$	$0{\cdot}04492$
$1''$	$-\ 0{\cdot}04400$	$1{\cdot}6012$	$0{\cdot}04529$

Man erkennt, daß bei gleicher Anzahl von Beobachtungen die Abnahme der Ableseschärfe das arithmetische Mittel von der Wahrheit zwar immer mehr entfernt, auf die mittleren Fehler jedoch keinen nennenswerten Einfluß übt.

Anders verhält es sich mit der Abnahme der Beobachtungsgenauigkeit bzw. deren Gewichte g und der Beobachtungsanzahl n. Verwendet man bei gleichbleibender Ableseschärfe von 0·001″ bloß 100 Dreiecksabschlüsse, so erhält man je nachdem sie von den besten, von den mittelsten oder (nach Ausscheidung des extrem großen Schlußfehlers von 8·159″, dem T i n t e r die Natur eines unvermeidlichen Fehlers nicht zuzuerkennen vermag) von den schlechtesten aller Fehler entnommen werden, folgende Ergebnisse:

a) Zwischen den Fehlergrenzen von 0·001″ bis 0·166″ mit dem Durchschnitt $e = \frac{[\varepsilon]}{100} = 0{\cdot}084''$:

$$[+\varepsilon] = +\,4{\cdot}624 \qquad [\varepsilon] = +\,0{\cdot}873$$
$$[-\varepsilon] = -\,3{\cdot}751 \qquad [\varepsilon\varepsilon] = 0{\cdot}916274$$
$$A = +\,0{\cdot}00873$$
$$m = \pm\,0{\cdot}0957$$
$$M = \pm\,0{\cdot}00957$$

b) Zwischen den Fehlergrenzen von 1·446″ bis 1·704″ mit $e = 1{\cdot}585''$:

$$[+\varepsilon] = +\,86{\cdot}890 \qquad [\varepsilon] = +\,15{\cdot}282$$
$$[-\varepsilon] = -\,71{\cdot}608 \qquad [\varepsilon\varepsilon] = 251{\cdot}781410$$
$$A = +\,0{\cdot}15282$$
$$m = \pm\,1{\cdot}5868$$
$$M = \pm\,0{\cdot}15868$$

c) Zwischen den Fehlergrenzen von 2·689″ bis 5·421″ mit $e = 3{\cdot}231''$:

$$[+\varepsilon] = +\,149{\cdot}633 \qquad [\varepsilon] = -\,23{\cdot}873$$
$$[-\varepsilon] = -\,173{\cdot}506 \qquad [\varepsilon\varepsilon] = 1075{\cdot}490927$$
$$A = -\,0{\cdot}23873$$
$$m = \pm\,3{\cdot}2795$$
$$M = \pm\,0{\cdot}32795.$$

Diese drei Fälle erscheinen einschließlich der Gewichte g in Tabelle 4 übersichtlich zusammengeschrieben.

T a b e l l e 4 für $n = 100$.

e	A	m	M	g
0·084″	+ 0·00873	0·0957	0·00957	1100
1·585	+ 0·15282	1·5868	0·15868	4
3·231	— 0·23873	3·2795	0·32795	1

Greift man aus der Mitte der nach der Größe der Schlußfehler geordneten Beobachtungsreihe gar nur 10 Dreiecksabschlüsse heraus, so erhält man bei nunmehr annähernd gleicher Beobachtungsgenauigkeit die in der letzten Zeile der Tabelle 5 angegebenen Resultate.

T a b e l l e 5.

n	A	m	M	G
1250	— 0·00042	1·5869	0·04489	125
100	+ 0·15282	1·5868	0·15868	10
10	— 0·32060	1·5844	0·50104	1

Man erkennt aus Tabelle 4, daß bei gleichbleibender Ableseschärfe i, aber bei Abnahme der Beobachtungsgenauigkeit bzw. der Beobachtungsgewichte g, sowohl A, als auch m und M ungünstiger ausfallen, und daß nach Tabelle 5 bei abnehmender Beobachtungsanzahl n, aber gleichbleibendem g, die Ergebnisse A und M bzw. G ungünstiger werden, die mittleren Fehler m aber selbstverständlich gleich bleiben müssen.

Auch bestätigt sich die schon empirisch gewonnene Tatsache, daß wenige Beobachtungen von hoher Genauigkeit einen besseren Erfolg versprechen und auch ökonomischer sich stellen, als viele Beobachtungen von geringerer Genauigkeit, und daß durch übermäßige Wiederholung der Messungen die Genauigkeit der Ergebnisse nicht mehr wesentlich gesteigert werden kann.

3. Überprüfung der Beziehung zwischen wahren und scheinbaren Fehlern.

Bezeichnet man die Abweichungen der Beobachtungen von ihrem wahren Werte oder die wahren Beobachtungsfehler mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$, die Abweichungen der Beobachtungen von ihrem arithmetischen Mittel oder die scheinbaren Beobachtungsfehler mit $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$, so besteht bekanntlich die Beziehung:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}.$$

Um diese Gleichung mit den Ergebnissen von wirklich ausgeführten Beobachtungen zu überprüfen, sei das oben benützte Beobachtungsmaterial von wahren Dreiecksabschlußfehlern herangezogen. Hier stellt das arithmetische Mittel

$$A = -0{\cdot}0004232$$

zugleich seinen wahren Fehler dar. Daher ist für irgend einen Schlußfehler:

$$v_i = \varepsilon_i - A,$$

und es entsteht daraus durch Summierung der Quadrate aller Schlußfehler die Gleichung:

$$[vv] = [\varepsilon\varepsilon] - 2A[\varepsilon] + nA^2 = [\varepsilon\varepsilon] - 2A\,.\,nA + nA^2$$
$$[vv] = [\varepsilon\varepsilon] - nA^2.$$

In unserem Beispiele ist $[\varepsilon\varepsilon] = 3148{\cdot}003605$, $nA^2 = 0{\cdot}000224$
daher $[vv] = 3148{\cdot}003381$, $m^2 = 2{\cdot}520419$,

somit lautet der mittlere Fehler

aus den wahren Schlußfehlern $\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \pm 1{\cdot}5869''$

aus den scheinbaren Schlußfehlern $\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm 1{\cdot}5876''$

mit einem Unterschied von $0{\cdot}0007''$,

also mit einer Übereinstimmung, wie sie bei der auf der Wahrscheinlichkeitstheorie gegründeten Relation *) nicht besser gefordert werden kann.

*) Vergl. des Verf. „Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung“ 1909, Bd. 1, § 25 u. 26.

Führt man eine analoge Untersuchung auf Grund des Verfahrens der Klassengruppierung durch, so liefert die Rechnung:

$$\begin{aligned}[p\varepsilon\varepsilon] &= 3171{\cdot}625000\\ -n\,A^2 &= -0{\cdot}000224\\ \hline [pvv] &= 3171{\cdot}624776\\ \frac{[pvv]}{1249} &= 2{\cdot}539547\\ -\frac{i^2}{12} &= -0{\cdot}020833\\ \hline m^2 &= 2{\cdot}518714\\ m &= \pm\ 1{\cdot}5870'',\end{aligned}$$

d. i. bloß um 0·0001″ größer als der Wert von T i n t e r: $\pm$ 1·5869″.

Sohin lauten die mittleren Fehler aus der

ausführlichen Methode mit den wahren Beob.-Fehlern: $\pm$ 1·5869″
ausführlichen Methode mit den scheinb. Beob.-Fehlern: $\pm$ 1·5876″
vereinfachten Methode mit den wahren Beob.-Fehlern: $\pm$ 1·5863″
vereinfachten Methode mit den scheinb. Beob.-Fehlern: $\pm$ 1·5870″

mit Differenzen von durchaus weniger als 0·05%.

Weitere aus der Anwendung der Klassengruppierung gewonnene Vereinfachungen bleiben einer zweiten Mitteilung vorbehalten.

Graphische Rechentafel (Nomogramm) für eine bei der geographischen Ortsbestimmung vorkommende Formel.

Von ALEXANDER FISCHER in Göding (Mähren).

In seinem vor einiger Zeit erschienenen Werkchen „Praktische Rechenbildkunde (Nomographie)“ gibt Fr. W e n n e r[1]) für den im Kollimationsglied

$$c = C \sec \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

enthaltenen Kollimationsfaktor

$$C = \frac{\sin z + \sin z'}{\sin (z + z')} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

ein Punktrechenbild, das aus einer Doppelparabel und einer geradlinigen Leiter besteht. (In obigen Formeln sind φ die geographische Breite, z die Zenitdistanz des Zeitsterns [südlich vom Zenit positiv, nördlich negativ], z' die Zenitdistanz des Polarsterns.)

Im folgenden möge auf Grund der Ergebnisse meiner jüngst erschienenen Arbeit[2]) für die Gleichung (a) ein Punkt-Linienrechenbild entworfen werden, das, da es die v i e r Veränderlichen c, φ, z, z' enthält, allgemeiner als jenes von

[1]) Aachener Verlags- und Druckerei-Gesellschaft 1926, S. 47.

[2]) „Über ein neues allgemeines Verfahren zum Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomogrammen), insbesondere von Fluchtlinientafeln“ in der Zeitschr. f. angewandte Math. u. Mech. 7 (1927), I. H. 3, II. H. 5; 8 (1928, III. H. 4. (Schluß folgt.)