Paper-ID: VGI_192907

Abgekürzte Methoden zur Berechnung des mittleren Fehlers

Siegmund Wellisch [1]

[1] *Senatsrat i. R., Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **27** (3), S. 37–40

1929

BibTeX:

```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_192907,
Title = {Abgek{\"u}rzte Methoden zur Berechnung des mittleren Fehlers},
Author = {Wellisch, Siegmund},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {37--40},
Number = {3},
Year = {1929},
Volume = {27}
}
```

schen Sondernetze, für sich, wobei der geodätische Wert des Laplaceschen Punktes sowie der Basiswert festzuhalten ist. Dies ist eine rein geodätische Ausgleichung.

Das praktische Ergebnis des ganzen Verfahrens ist, daß alle möglichen Kontrollen für die Bestimmung der Grundpfeiler des Kartenwerkes verwendet worden sind und daß wir dadurch erreichen, daß überall die Abweichungen zwischen den Werten der Karte bezüglich Breite, Länge und Azimut von den tatsächlichen durch astronomische Beobachtung erhaltenen Werten so klein wie überhaupt möglich werden.

Abgekürzte Methoden zur Berechnung des mittleren Fehlers.

Von Senatsrat Ing. SIEGMUND WELLISCH.

1. Das Differenzverfahren.

Wählt man als Ausgangspunkt bei Berechnung des Argumentdurchschnittes oder arithmetischen Mittels A anstatt des gewöhnlich angenommenen Wertes Null denjenigen Wert L der vorliegenden Beobachtungen l, der dem gesuchten Mittelwert am nächsten zu liegen scheint, so stellt das arithmetische Mittel aller Abweichungen $a = l - L$, also

$$b = \frac{[p\,a]}{n}$$

die an L noch anzubringende Differenz oder Verbesserung dar, welche notwendig ist, um A zu erhalten, denn es ist

$$A = L + b.$$

Ist das Beobachtungsmaterial in Klassen mit gleichen Spielräumen eingeteilt, wie dies in meiner Abhandlung über „Praktische Untersuchungen in der Ausgleichungsrechnung“ (Österr. Zeitschr. f. Verm. 1928, S. 71) des nähern ausgeführt wurde, dann werden die Differenzen oder Abweichungen a der Argumentwerte vom Ausgangswerte Vielfache des Klassenspielraumes sein und es werden daher nur kleine runde Zahlen bei den sonst durch die Vielstelligkeit der Faktoren beschwerlichen und unbequemen Multiplizierungen, Quadrierungen und Summierungen auftreten. Aus den drei Gleichungen für die

Abweichung der Beobachtung vom Ausgangspunkt . . . . $a = l - L$
Abweichung des arithm. Mittels vom Ausgangspunkt . . . . . $b = A - L$
Abweichung der Beobachtung vom arithm. Mittel . . . . $v = l - A$
ergibt sich die Beziehung . . . . $a = v + b.$
Durch Quadrierung erhält man . . . . $a^2 = v^2 + 2\,vb + b^2$,
die Summierung aller Einzelbeträge ergibt $[p\,aa] = [p\,vv] + 2\,b\,[p\,v] + b^2[p]$.
Beachtet man, daß $[pv] = 0$ und $[p] = n$ ist, so liefert die Division durch $n - 1$ die Gleichung

$$\frac{[paa]}{n-1} = \frac{[p\,vv]}{n-1} + \frac{n}{n-1}\,b^2.$$

Sohin lautet die Formel für den mittleren Fehler:

$$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{[p\,a\,a]}{n-1} - \frac{n\,b^2}{n-1}}.$$

Als Beispiel diene eine von A. R. Clarke aufgestellte Reihe von 40 mikroskopischen Bestimmungen der Lage eines Teilstriches auf einem Maßstab. Die mit gleicher Genauigkeit angestellten Beobachtungen l in Einheiten von 0·000 001 Yard = 0·91 Mikrons sind nachstehend ihrer Größe nach geordnet nebst deren Abweichungen v vom arithmetischen Mittel zusammengestellt.

l	v	l	v	l	v	l	v	l	v
2·28	+ 1·65	3·11	+ 0·82	3·78	+ 0·15	4·18	− 0·25	4·65	− 0·72
2·48	+ 1·45	3·22	+ 0·71	3·78	+ 0·15	4·21	− 0·28	4·76	− 0·83
2·64	+ 1·29	3·26	+ 0·67	3·91	+ 0·02	4·43	− 0·50	4·84	− 0·91
2·66	+ 1·27	3·27	+ 0·66	3·95	− 0·02	4·43	− 0·50	5·08	− 1·15
2·75	+ 1·18	3·28	+ 0·65	3·98	− 0·05	4·45	− 0·52	5·21	− 1·28
2·81	+ 1·12	3·43	+ 0·50	4·08	− 0·15	4·49	− 0·56	5·23	− 1·30
2·95	+ 0·98	3·68	+ 0·25	4·10	− 0·17	4·51	− 0·58	5·48	− 1·55
2·98	+ 0·95	3·76	+ 0·17	4·15	− 0·22	4·59	− 0·66	6·35	− 2·42

Es ist nach der in des Verfassers „Ausgleichungsrechnung“ (1. Bd. S. 124) weitläufig durchgeführten Berechnungsart

das arithmetische Mittel . . . . $A =$ 3·93
die Summe der Fehlerquadrate . . . . $[vv] =$ 32·5268
der mittlere Fehler . . . . $m =$ 0·913

Teilt man die 40 Argumente in $k = 9$ Klassen mit den Spielräumen $i = 0·5$ Einheiten ein, so stellt sich die Rechnung mit dem Ausgangswerte $L = 4·25$ wie folgt:

Spielräume	Klassenmittel l	$l - L = a$	Anzahl der l: absolut p	Anzahl der l: reduziert p'	Anzahl der l: reduziert p''	$p'\,a$	aa	$p''\,aa$
2·0 − 2·5	2·25	− 2·0	2	1	3	− 2·0	4·00	12·0
2·5 − 3·0	2·75	− 1·5	6	6	6	− 9·0	2·25	13·5
3·0 − 3·5	3·25	− 1·0	6	2	10	− 2·0	1·00	10·0
3·5 − 4·0	3·75	− 0·5	7	2	12	− 1·0	0·25	3·0
4·0 − 4·5	4·25	0	9			− 14·0		38·5
4·5 − 5·0	4·75	+ 0·5	5					
5·0 − 5·5	5·25	+ 1·0	4					
5·5 − 6·0	5·75	+ 1·5	0					
6·0 − 6·5	6·25	+ 2·0	1					
			40					

Die in den einzelnen Klassen vorkommenden Anzahlen p werden für die Berechnung von A durch algebraische Vereinigung der gleichlautenden, in bezug auf $a = 0$ symmetrisch angeordneten Abweichungen, für die Berechnung von m durch deren absolute Vereinigung zu p' bzw. p'' reduziert und damit die Summen

$$[p'\,a] = -\,14·0 \quad \text{und} \quad [p''\,aa] = 38·5$$

gebildet. Sodann erhält man $b = -14{\cdot}0 : 40 = -0{\cdot}35$

$$\begin{aligned} L &= 4{\cdot}25 \\ L + b = A &= \underline{\overline{3{\cdot}90}} \end{aligned}$$

bloß um 0·03 kleiner als der genaue Wert $A = 3{\cdot}93$,

ferner
$$m = \sqrt{\frac{38{\cdot}50}{39} - \frac{40}{39} \cdot 0{\cdot}35^2} = \pm\, 0{\cdot}928$$

und mit Berücksichtigung der S h e p p a r d schen Klassenkorrektion $0{\cdot}5^2 : 12 = 0{\cdot}021$ (vgl. Österr. Zeitschr. f. Verm. S. 73): $m = \pm\, 0{\cdot}917$, einen bloß um 0·004 oder kaum 0·5% zu großen Wert.

Dieses vereinfachte Rechenverfahren, welches dann zur vollen Auswirkung gelangt, wenn die Beobachtungsreihe viele Klassen, etwa zwanzig, umfaßt, läßt auch eine bei Multiplikationen und Summationen vieler Zahlen notwendige Kontrolle mit großer Sicherheit zu. Diese von dem Astronomen C. V. L. C h a r l i e r*) eingeführte Probe besteht in der Wiederholung der Rechnung mit einem neuen Ausgangspunkt, der am einfachsten um bloß einen Klassenspielraum kleiner angenommen wird, als der für die Hauptrechnung benützte Ausgangswert.

2. Das Summenverfahren.

Ist das aus n Argumenten l bestehende Beobachtungsmaterial in k Klassen mit den Spielräumen i gruppiert und bildet man aus den Anzahlen p_1, p_2, p_3, ... p_k der Klassenargumente l_1, l_2, l_3, ... l_k nacheinander die e r s t e n Summen:

$$\begin{aligned} s_1' &= p_1 \\ s_2' &= s_1' + p_2 \\ s_3' &= s_2' + p_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \text{bis } s'_{k-2} &= s'_{k-3} + p_{k-2} \end{aligned}$$

und aus den ersten Summen in ähnlicher Weise die z w e i t e n Summen:

$$\begin{aligned} s_1'' &= s_1' \\ s_2'' &= s_1'' + s_2' \\ s_3'' &= s_2'' + s_3' \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \text{bis } s''_{k-3} &= s''_{k-4} + s'_{k-3}, \end{aligned}$$

so erhält man zwei Summenreihen, worin jede Zahl gleich ist der über ihr befindlichen vermehrt um die links neben ihr stehende. Durch bloße Addition entstanden, lassen diese Teilsummen und die daraus gebildeten Gesamtsummen

$$S' = [s'] \text{ und } S'' = [s'']$$

mit den Kontrollen $s'_{k-2} + p_{k-1} + p_k = n$ und $s''_{k-3} + s'_{k-2} = S'$ eine mechanische Ermittlung des arithmetischen Mittels A und des mittleren Fehlers m auf sehr einfache Weise zu. Es ist nämlich mit Berufung auf die von E. C z u b e r

*) „Researches into the Theory of Probability." Lund, 1906.
„Grundfragen af den matematiska Statistiken." Lund, 1910.

in seiner „Wahrscheinlichkeitsrechnung", 1908, 1. Bd., 3. Teil, gebrachte Theorie mit einer kleinen Abänderung:

$$A = l_k - (S' + n - p_k) \cdot \frac{i}{n}$$

$$m^2 = (2\,S'' + 3\,S' + n) \cdot \frac{i^2}{n} - (l_k - A)^2.$$

Nr.	l	p	s'	s''
1	2·25	2	2	2
2	2·75	6	8	10
3	3·25	6	14	24
4	3·75	7	21	45
5	4·25	9	30	75
6	4·75	5	35	110
7	5·25	4	39	266
8	5·75	0	149	S''
9	6·25	1	S'	
	$n =$	40		

In Anwendung auf das Beispiel von Clarke bringen wir zunächst die vorbereitenden Rechnungen in obenstehender Tabelle. Damit erhält man für $n = 40$, $k = 9$, $i = 0{\cdot}5$, $l_9 = 6{\cdot}25$, $p_9 = 1$, $p_8 = 0$, $s'_7 = 39$, $s_6'' = 110$, $S' = 149$ und $S'' = 266$ mit den Kontrollrechnungen:

$$39 + 0 + 1 = 40 = n$$
$$110 + 39 = 149 = S'$$

folgende Ergebnisse:

$$A = 6{\cdot}25 - (149 + 40 - 1) \cdot \frac{0{\cdot}5}{40} = 3{\cdot}90 \text{ wie oben unter 1),}$$

$$m^2 = (532 + 447 + 40) \cdot \frac{0{\cdot}25}{40} - (6{\cdot}25 - 3{\cdot}90)^2$$

$$m = \pm\, 0{\cdot}920,$$

nur um 0·007 größer als der genaue Wert 0·913 und um 0·003 größer als der sub 1) erhaltene Wert von 0·917.

Der Doppelbild-Tachymeter der Fa. Kern in Aarau.

Von Vermessungsrat Ing. A. Leixner.

Der Neuvermessungsabteilung für Steiermark wurde im Juni 1928 für die Neuaufnahme von Donawitz ein Doppelbild-Tachymeter der Fa. Kern in Aarau (Schweiz) zugewiesen.

Das Gemeindegebiet von Donawitz (796 Bp, 2020 Gp, 1932 ha) hat, abgesehen von einem kleinen ebenen Teil an der Mur und dem verbauten Gebiet (mit dem großen Hüttenwerk), zum weitaus größten Teil ausgesprochenen Gebirgscharakter. Murufer ⌖ 520 — ⌖ 1345 Himbergereck.

Der größte Teil der Gemeinde ist steilaufragender, in viele Besitze geteilter Wald, also ein Gebiet, in dem die polygonale Methode durch die vielen Winkel-