

Paper-ID: VGI_193002



Allgemeine mathematische Theorie der Umfahrungsplanimeter in vektor-analytischer Darstellung

Karl Ulbrich

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **28** (1, 2, 3, 4), S. 8–12, 33–36, 49–57, 75–79

1930

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Ulbrich_VGI_193002,  
  Title = {Allgemeine mathematische Theorie der Umfahrungsplanimeter in vektor-  
          analytischer Darstellung},  
  Author = {Ulbrich, Karl},  
  Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {8--12, 33--36, 49--57, 75--79},  
  Number = {1, 2, 3, 4},  
  Year = {1930},  
  Volume = {28}  
}
```



Allgemeine mathematische Theorie der Umfahrungsplanimeter in vektor-analytischer Darstellung.

Von Ing. Dr. techn. Karl Ulbrich.

I. Einleitende Bemerkungen.

Die Vektoranalysis, die in der Mathematik, Elektrotechnik und Physik zu einer ungeahnten Bedeutung gelangt ist, hat in der Geodäsie merkwürdigerweise noch wenig Anklang gefunden.

Wenn die vektorische Darstellungsart auch von A. Schreiber¹⁾ schon 1908 verwendet wurde, um das Rückwärtseinschneiden in dieser Weise darzustellen, so ist es leider doch wieder still darum geworden.

Erst in neuerer Zeit wurde durch die Arbeiten von K. Friedrich²⁾, E. Hammer³⁾, J. Jung⁴⁾, J. Müller⁵⁾, L. Schrutka⁶⁾ und besonders durch R. Schumann⁷⁾ gezeigt, daß die Vektorrechnung auch bei den Problemen der Geodäsie und der Ausgleichsrechnung mit großem Vorteil angewendet werden kann.

Trotz abfälliger Urteile über die Vektorrechnung, die merkwürdigerweise nur von rein mathematischer Seite gekommen sind (z. B. F. Klein), ist es ohne Zweifel, daß diese Darstellungsart in doppelter Hinsicht unleugbare Vorteile bietet.

a) In formaler Hinsicht: Die drei Raumkoordinaten werden durch einen Vektor zusammengefaßt, so daß man an Stelle von dreigliedrigen Ausdrücken bloß eingliedrige hat. Die Formeln reduzieren sich also auf ein Drittel, so daß sie bedeutend übersichtlicher werden. Das lästige Arbeiten mit drei Komponenten entfällt also, und wenn man dieselben aus irgend welchen Gründen ja einmal benötigt, so kann man sich diese ja immer leicht darstellen.

b) In logischer Hinsicht: Die Vektoren symbolisieren die Verhältnisse so, wie sie tatsächlich in der Natur auftreten. Bei Kräften war ja das Zerlegen in Komponenten bloß ein Mittel, um diese Kräfte rechnerisch zu beherrschen. In Wahrheit tritt ja bloß die Resultante allein auf, die man jetzt leicht durch einen Vektor darstellen kann. Beim vektor-analytischen Ausgleich tritt ein besonders markantes Beispiel in dieser Hinsicht auf. Jede Seitenänderung kann man ja in eine Streckung und in eine Querverschwenkung auflösen. Diese Zer-

¹⁾ A. Schreiber: Z. f. Vermessungswesen (Stuttgart), Band 37. S. 625. 1908. Das Pothenotische Problem in vektor-analytischer Behandlung.

²⁾ K. Friedrich: Neue Grundlagen und Anwendungen der Vektorrechnung, München und Berlin 1921.

³⁾ E. Hammer: Z. f. Vermessungswesen (Stuttgart), Band 51. S. 585. 1922. Vektorielle und Rechenschieber-Auflösung trigonometrischer Aufgaben.

⁴⁾ J. Jung: Über günstigste Gewichtsverteilung in Basisnetzen. Diss. 1924.

⁵⁾ J. Müller: Bayrische Z. f. Vermessungsw. S. 113. 1926. Das Rückwärtseinschneiden im Raume, behandelt nach der Vektormethode.

⁶⁾ L. Schrutka: Öst. Z. f. Verm. (Wien), 25. Jahrg. S. 73. 1927. Vektorische Darstellung der Theorie des Polarplanimeters.

⁷⁾ R. Schumann: Z. f. Vermessungswesen (Stuttgart), Band 55. S. 609. 1926. Vektor-analytischer Ausgleich geschlossener geodät. Figuren in der Ebene.

legung ist zwar willkürlich, charakterisiert die Verhältnisse aber sicher sehr gut. Trotzdem ist es aber entschieden bedeutend vorteilhafter, mit dem Fehlervektor selbst zu operieren, da er ja tatsächlich sofort und ohne Umwege die Punktverschiebung angibt.

In dieser Abhandlung will ich nun zeigen, wie man die „Theorie der Planimeter“ mit Hilfe von Vektoren in sehr knapper und trotzdem vollkommen strenger Weise ableiten kann. Wie weit überlegen diese Ableitungen den gebräuchlichen analytischen Beweisen sind, werde ich fallweise, soweit diese Beweise überhaupt schon einmal behandelt wurden, an Gegenüberstellungen zeigen.

II. Einführung in die Symbolik der verwendeten Vektoren.

Nachstehende Bemerkungen verfolgen den Zweck, die verwendeten Vektorsymbole eindeutig zu präzisieren. Dies ist um so mehr nötig, als die Vektoranalysis gleich der Photogrammetrie eine Wissenschaft ist, die sich noch in lebendigster Entwicklung befindet.

Infolgedessen ist man heutzutage genötigt, sich beim Studium jeder vektoranalytischen Abhandlung die Symbolik des betreffenden Verfassers zurechtzulegen. Dies ist allerdings nicht zu verwundern, da auch die Vorschläge der AEF, die ja Normen darstellen sollen, selbst noch mehrere Variationen enthalten.

Ich habe mich vorwiegend an die Bezeichnungsweise gehalten, wie sie mir von meinen Hochschulstudien her geläufig ist. Die Vektoren bezeichne ich mit kleinen deutschen Buchstaben und deren absolute Beträge, also deren Länge, mit den entsprechenden lateinischen Buchstaben.

Gegeben seien zwei Ortsvektoren r und s , die ich folgendermaßen bezeichne:

$$\left. \begin{aligned} r &= x_1 i + y_1 j + z_1 \mathfrak{k} \\ s &= x_2 i + y_2 j + z_2 \mathfrak{k} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 1)$$

In Gleichung 1) bedeuten x_1 y_1 z_1 und x_2 y_2 z_2 Cartesische Koordinaten und i j \mathfrak{k} die Einheitsvektoren in der xyz -Richtung. Das innere Produkt lautet:

$$(r \cdot s) = |r| \cdot |s| \cos \widehat{r s} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \dots \dots \dots 2)$$

Dieses Produkt stellt einen Skalar, also eine Zahl dar, wird aber im folgenden wenig auftreten.

Das äußere Produkt stellt eine Fläche dar. Deren Größe gibt Formel 3), das ist die Länge des auf der Fläche normalen Vektors. Die Rechenvorschrift zur Bildung des äußeren Produktes gibt die Formel 4).

$$|[rs]| = |r| \cdot |s| \sin \widehat{r s} \dots \dots \dots 3)$$

$$[rs] = \begin{vmatrix} i & j & \mathfrak{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \dots \dots \dots 4)$$

Da aber bei der Ableitung der Planimetertheorie bloß ebene Vektorrechnung betrieben wird, die \mathfrak{k} -Komponenten also Null sind, spezialisieren sich die Formeln wie folgt:

$$(\mathfrak{r} \mathfrak{s}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 \dots \dots \dots 5)$$

$$[\mathfrak{r} \mathfrak{s}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} \dots \dots \dots 6)$$

$$[\mathfrak{r} \mathfrak{s}] = \mathfrak{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \mathfrak{k} (x_1 y_2 - y_1 x_2) \dots \dots \dots 7)$$

Das äußere Produkt $[\mathfrak{r} \mathfrak{s}]$ stellt also einen Vektor dar, der senkrecht auf der Ebene $\mathfrak{r} \mathfrak{s}$ steht, und zwar so, daß ein rechtshändiges Koordinatensystem entsteht.

In der ebenen Vektorrechnung kann man $[\mathfrak{r} \mathfrak{s}]$ als einen Skalar auffassen, dessen Größe die Fläche des aus \mathfrak{r} und \mathfrak{s} gebildeten Parallelogramms darstellt. In dieser Abhandlung stellt sich das äußere Produkt so dar:

$$[\mathfrak{r} \mathfrak{s}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2 \dots \dots \dots 8)$$

Selbstverständlich ist hier nicht der Ort, um die in der Abhandlung verwendeten Sätze der Vektorrechnung zu beweisen. Ich werde aber dort, wo ich seltenere Formeln verwende, immer auf die Beweise in der entsprechenden Literatur hindeuten. Die vorstehenden Zeilen haben also den Zweck gehabt, die Unklarheit in den Bezeichnungen zu beseitigen, die ja der Hauptgrund für die Unbeliebtheit dieses Zweiges der Mathematik ist.

III. Strenge Ableitung der allgemeinen Planimetertheorie.

Es bewege sich ein Fahrarm AB (Fig. 1), dessen Spitze A eine geschlossene, zu planimetrierende Figur Γ umfährt und dessen Endpunkt B sich ständig auf einer zweiten Kurve, der sogenannten Leitkurve, bewegt. Der Stab soll vorläufig in jeder Richtung völlige Bewegungsfreiheit haben und erst später sollen gewisse Beschränkungen in der Bewegungsrichtung angenommen werden. Die Punkte A und B seien durch ihre Koordinaten in Bezug auf ein beliebig eingeführtes Cartesisches Koordinatensystem gegeben. Der Fahrarm, dessen Länge gleich der Distanz AB ist, sei durch den Vektor \mathfrak{a} definiert. Gelangt er nun durch eine infinitesimale Verschiebung in die Lage $A'B'$, so wird die Fläche $ABB'A'$ überstrichen und es ist jetzt die Aufgabe zu lösen, diese Fläche durch die auftretenden Vektoren zu bestimmen. Aus der Figur ersieht man, daß folgende Vektoren vorkommen:

a) Ortsvektoren

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{r} &= x_1 \mathfrak{i} + y_1 \mathfrak{j} \\ \mathfrak{s} &= x_2 \mathfrak{i} + y_2 \mathfrak{j} \\ \mathfrak{r} + d\mathfrak{r} &= (x_1 + dx_1)\mathfrak{i} + (y_1 + dy_1)\mathfrak{j} \\ \mathfrak{s} + d\mathfrak{s} &= (x_2 + dx_2)\mathfrak{i} + (y_2 + dy_2)\mathfrak{j} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 1)$$

b) Freie Vektoren

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= (x_1 - x_2)\mathbf{i} + (y_1 - y_2)\mathbf{j} \\ d\mathbf{r} &= dx_1 \mathbf{i} + dy_1 \mathbf{j} \\ d\mathbf{s} &= dx_2 \mathbf{i} + dy_2 \mathbf{j} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 2)$$

Anmerkung: Die Unterscheidung zwischen Orts- und freien Vektoren spielt hier allerdings keine wesentliche Rolle, wurde aber angeführt, da die in der Physik vorkommenden Vektoren nicht immer freie Vektoren sind.

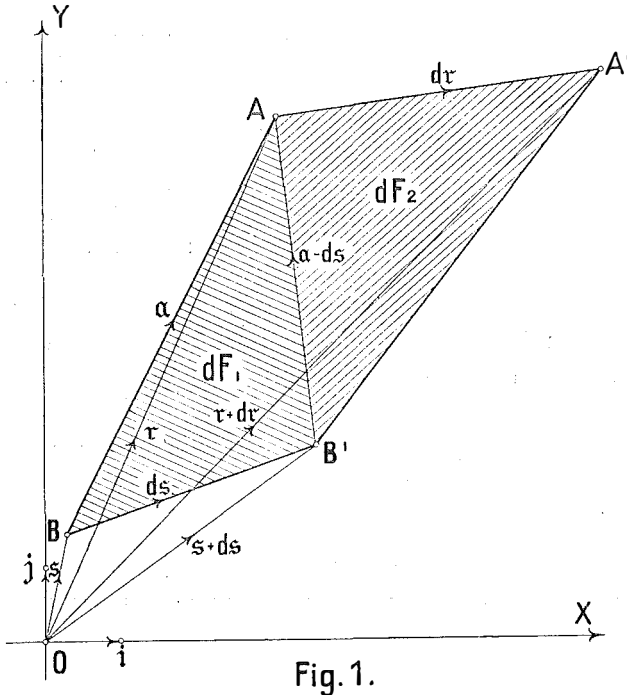


Fig. 1.

Die infinitesimale Fläche $ABB'A'$ zerlegt man sich bequem durch die Diagonale AB' in zwei Dreiecke, so daß folgende Relationen auftreten:

$$dF = ABB'A' \dots \dots \dots 3)$$

$$dF = ABB' + AB'A' \dots \dots \dots 4)$$

oder eine Abkürzung

$$dF = dF_1 + dF_2 \dots \dots \dots 5)$$

Diese Dreiecke kann man sich jetzt, wie im Abschnitt II ausgeführt, durch Vektorprodukte ausdrücken.

Dreieck ABB' :

$$dF_1 = \frac{1}{2} [ds \ a] \dots \dots \dots 6)$$

ferner ist:

$$s + a = r \dots \dots \dots 7)$$

$$a = r - s \dots \dots \dots 8)$$

$$dF_1 = \frac{1}{2} [ds, r - s] \dots \dots \dots 9)$$

$$dF_1 = \frac{1}{2} [ds \ r] - \frac{1}{2} [ds \ s] \dots \dots \dots 10)$$

Dreieck $AB'A'$:

$$dF_2 = \frac{1}{2} [d\alpha, a - d\alpha] \dots \dots \dots 11)$$

$$dF_2 = \frac{1}{2} [d\alpha, a] - \frac{1}{2} [d\alpha, d\alpha] \dots \dots \dots 12)$$

$$dF_2 = \frac{1}{2} [d\alpha, r - \alpha] - \frac{1}{2} [d\alpha, d\alpha] \dots \dots \dots 13)$$

$$dF_2 = \frac{1}{2} [d\alpha, r] - \frac{1}{2} [d\alpha, \alpha] - \frac{1}{2} [d\alpha, d\alpha] \dots \dots \dots 14)$$

$[d\alpha, d\alpha]$ ist klein von höherer Ordnung, kann also vernachlässigt werden. Außerdem kann man die Gleichung 14) umformen, so daß sie folgende Gestalt annimmt:

$$dF_2 = \frac{1}{2} [d\alpha, r] + \frac{1}{2} [\alpha, d\alpha] \dots \dots \dots 15)$$

$$dF = \frac{1}{2} [d\alpha, r] - \frac{1}{2} [d\alpha, \alpha] + \frac{1}{2} [d\alpha, r] + \frac{1}{2} [\alpha, d\alpha] \dots \dots \dots 16)$$

Nach einem Satz der Vektoranalysis besteht folgende Relation ⁸⁾:

$$[\alpha, d\alpha] + [d\alpha, r] = d[\alpha, r] \dots \dots \dots 17)$$

$$dF = \frac{1}{2} [d\alpha, r] - \frac{1}{2} [d\alpha, \alpha] + \frac{1}{2} d[\alpha, r] \dots \dots \dots 18)$$

Diese Gleichung stellt also das infinitesimale Flächenelement in vektorischer Form dar. Läßt man jetzt durch den Fahrstift A die geschlossene Kurve Γ umfahren, so muß man über Γ integrieren:

$$F = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [d\alpha, r] - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [d\alpha, \alpha] + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} d[\alpha, r] \dots \dots \dots 1)$$

Um diese Gleichung mit bekannten Ergebnissen vergleichen zu können, führen wir analog wie in Abschnitt II Gleichung 8) die Koordinatenkomponenten ein, so daß sich die Gleichung 1) wie folgt transformiert:

$$F = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \begin{vmatrix} dx_1 & dy_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \begin{vmatrix} dx_2 & dy_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} d \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \dots \dots \dots 19)$$

$$F = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (y_1 dx_1 - x_1 dy_1) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (y_2 dx_2 - x_2 dy_2) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} d(x_1 y_2 - x_2 y_1) \dots \dots \dots 20)$$

Dies ist aber dieselbe Gleichung, bloß mit anderer Bezeichnung, wie sie A. Galle ⁹⁾ auf Seite 75 nach einer trotz Weglassung von Zwischenrechnungen noch immer sehr langen und mühevollen Ableitung erhält. Schon daraus ersieht man, wie überlegen die Vektorrechnung gegenüber der analytischen Berechnung dasteht.

Anmerkung: Die Gleichung 1) könnte man auch direkt erhalten, indem man die gegebenen Werte direkt in die vektorische Flächenformel für Vierecke substituiert.

Fortsetzung folgt.

⁸⁾ Beweis siehe S. Valentiner, Vektoranalysis, Berlin und Leipzig 1923.
⁹⁾ A. Galle: Mathematische Instrumente. Leipzig und Berlin 1912.

Allgemeine mathematische Theorie der Umfahrungsplanimeter in vektor-analytischer Darstellung.

Von Ing. Dr. techn. Karl Ulbrich.

(Fortsetzung.)

IV. Diskussion der Gleichung I.

$$F = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [d\mathbf{r} \mathbf{r}] - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [d\mathbf{s} \mathbf{s}] + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} d[\mathbf{s} \mathbf{r}] \dots \dots \dots \text{I)}$$

Keht der Fahrarm wieder in seine ursprüngliche Lage zurück, so fällt das letzte Integral weg, da es das Integral eines vollständigen Differentials über eine geschlossene Kurve darstellt.

$$\int_{\Gamma} d[\mathbf{s} \mathbf{r}] = 0 \dots \dots \dots \text{I)}$$

Diese vorausgesetzte Eigenschaft ist bei den gebräuchlichen Umfahrungsplanimetern stets erfüllt, bloß beim Stangenplanimeter von M. Prytz ist dies nicht der Fall. Der Fahrstift *A* kommt bei diesem Instrument zwar wieder auf den gleichen Kurvenpunkt zurück, die Leitlinie ist jedoch dadurch, daß die Schneide bloß eine Bewegungsrichtung frei hat, ungeschlossen.

In diesem Falle hilft man sich mit der mathematischen Fiktion, daß man sich die Schneide aufgehoben und auf ihren Anfangspunkt zurückgedreht denkt, so daß also die Fläche, die die Schneide umfährt, künstlich geschlossen wird.

Durch diesen Kunstgriff ist man also in der Lage, die untenstehende Formel auf alle Planimeter anwenden zu können.

$$F = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [d\mathbf{r} \mathbf{r}] - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [d\mathbf{s} \mathbf{s}] \dots \dots \dots \text{II)}$$

Die Frage nach der Bedeutung dieser Ausdrücke läßt sich geometrisch in sehr schöner Weise behandeln.

F ist die vom Fahrarm *a* überstrichene Fläche. Wichtig sind die Voraussetzungen, wann diese Fläche positiv und wann sie negativ zu zählen ist. Es hat sich da bei allen Planimeterkonstruktionen eingebürgert, daß diejenigen Flächen, die vom Vektor *a* von links nach rechts überstrichen werden, als positiv und diejenigen, die im entgegengesetzten Bewegungssinn befahren werden, als negativ gelten.

Die beiden Integrale stellen sozusagen eine Komplanation in Polarkoordinaten dar¹⁰⁾, bei der sich ebenfalls, je nach der Bewegungsrichtung, positive und negative Sektoren ergeben. Das erste Integral stellt die zu planimetrierende Fläche *A* dar und das zweite Integral stellt die von der Leitkurve eingeschlossene Fläche *B* dar. (Siehe Fig. 2.)

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} [d\mathbf{r} \mathbf{r}] = 0-1-3-5-0 - 0-5-7-1-0 \dots \dots \dots \text{2)}$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} [d\mathbf{r} \mathbf{r}] = A \dots \dots \dots \text{3)}$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} [d\mathbf{s} \mathbf{s}] = 0-9-11-13-0 - 0-13-14-9-0 \dots \dots \dots \text{4)}$$

¹⁰⁾ Siehe L. Schrutka, Elemente der Höheren Mathematik, 4. Aufl. Wien 1924, Seite 194.

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} [ds \xi] = B \quad 5)$$

Kompliziertere Flächen zerlegt man sich durch Stützgerade, die in dem Falle die Tangenten an die Kurven von O aus sind, in einfache Sektoren, so daß die obigen Relationen immer Geltung haben. Die Gleichung II) hat also nach der geometrischen Interpretation folgende Gestalt:

$$F = A - B \quad \dots \dots \dots \text{III)}$$

Diese Gleichung stellt die Fundamentalgleichung für sämtliche Umfahrungsplanimeter dar.

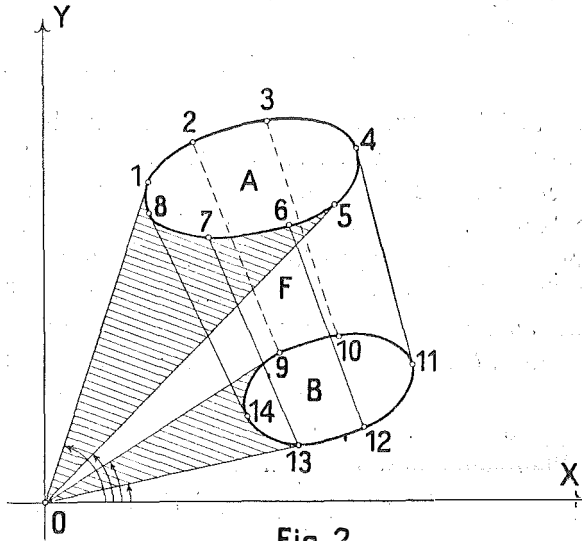


Fig. 2.

Diese Fundamentalformel leitete auch der Göttinger Mathematiker F. Klein ¹¹⁾ ab, indem er die infinitesimale Bewegung des Fahrarmes in 3 Elementarbewegungen zerlegt und die Elementarvierecke durch einen Integrationsprozeß aufsummiert. Dazu ist zu sagen, daß eben bei der vektor-analytischen Darstellung die künstliche Zerlegung in 3 Elementarbewegungen unnötig wird.

Bemerkenswert ist ferner, wie auch schon F. Klein erwähnt, daß die Planimeter die Flächeninhalte samt dem richtigen Vorzeichen ergeben. Das Möbius'sche Vorzeichenprinzip, das dieser Mathematiker zum ersten Male konsequent in die Geometrie eingeführt hat, wird durch diese höchst sinnreichen Instrumente automatisch durchgeführt. Dies ist sicherlich erstaunlich, wenn man bedenkt, daß bei sehr verschlungenen Kurven auch der geschulte Mathematiker Mühe haben wird, die Sache richtig zu treffen.

Diese wertvolle Eigenschaft der Planimeter ist aber nicht bloß von theoretischem Interesse, da solche Kurven auch in der Praxis zu planimetrieren sind. Es kommt vor, daß Kurven die Bezugachsen durchschneiden, so-

¹¹⁾ F. Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. 2. Band, Geometrie, 3. Aufl. Berlin 1925. S. 11 ff.

daß positive und negative Flächen entstehen, die man, ohne Teilflächen bestimmen zu müssen, in einem Zuge planimetrieren kann.

V Diskussion der Fundamentalgleichung.

$$F = A - B \dots\dots\dots \text{III)}$$

In dieser Gleichung stellt A die Fläche dar, die zu planimetrieren ist. Um die Gebrauchsformel zu erhalten, wird die Gleichung wie folgt umgeformt:

$$\underline{A = F + B} \dots\dots\dots \text{IV)}$$

Es können jetzt drei Fälle auftreten, die charakteristisch sind und den verschiedenen Planimetertypen ihr Gepräge geben:

a) $B = 0 \dots\dots\dots 1)$

b) $B = \text{const.} = B_c \dots\dots\dots 2)$

c) $B = \text{var.} = B_v \dots\dots\dots 3)$

ad a) In diesem Fall vereinfacht sich die Gebrauchsformel IV am meisten.

$$\underline{A = F} \dots\dots\dots \text{V)}$$

Dieser Fall tritt also dann ein, wenn man dafür Sorge trägt, daß die von der Leitlinie eingeschlossene Fläche gleich Null ist. Dies wird praktisch so durchgeführt, daß man den Endpunkt B zwangsweise so führt, daß er die Leitkurve einmal in positiver und einmal in negativer Richtung durchwandert. Zu jedem $+ ds$ tritt also immer ein entsprechendes $- ds$ auf, so daß sich die Flächen wegheben. Um die Diskussion vollständig zu geben, möchte ich noch bemerken, daß es theoretisch ohne weiteres möglich wäre, daß der Fahrarm dabei eine volle Umdrehung macht. Dies könnte man in der Praxis mit einem durchschlagbaren Polarplanimeter sicherlich in die Tat umsetzen. Als Leitkurven wählt man:

1. Einen Kreis.

Wenn der Kreismittelpunkt in O liegt, heißen diese Planimeter Polarplanimeter (Pol außen).

2. Eine Gerade.

Diese Planimeter heißen Linearplanimeter.

ad b) In diesem Fall lautet die Gebrauchsformel folgendermaßen:

$$\underline{A = F + B_c} \dots\dots\dots \text{VI)}$$

Dies ist ebenfalls eine bedeutende Vereinfachung der allgemeinen Formel. Als konstante Fläche wird aus leicht begreiflichen Gründen eine Kreisfläche verwendet.

Die Leitkurve ist also wieder, ebenso wie in a) 1., ein Kreis, der aber diesmal in einem vollen Umlauf umfahren wird. Auch hier möchte ich noch bemerken, daß es für die Theorie vollkommen belanglos ist, ob der Fahrarm bei der Kreisumfahrung eine volle Umdrehung um sich selbst beschreibt oder nicht. Dies hat bloß auf die Abwicklung der Integrierrolle Einfluß,

In diese Planimeterkategorie gehört das Polarplanimeter mit dem Pol innen.

ad c) In diesem Fall hat die Gebrauchsformel folgende Gestalt:

$$\underline{A = F + B_v} \dots\dots\dots \text{VII)}$$

Diese Formel weist überhaupt keine Vereinfachung auf. Sie ist also die umständlichste und, da man in diesem Falle auch die Größe der Restflächen B_v bestimmen muß, sicher auch die ungenaueste Formel. Nach diesem Prinzip arbeitet das schon in Abschnitt IV erwähnte Stangenplanimeter.

Wie man also leicht bemerkt, ist das Gemeinsame an allen drei Gebrauchsformeln, daß man auf jeden Fall die vom Fahrarm überstrichene Fläche F bestimmen muß. Die theoretischen Ableitungen und die Hilfsmittel dazu werden in den nächsten Abschnitten gegeben werden. (Fortsetzung folgt.)

Referate.

Dritter Internationaler Kongreß für Photogrammetrie, Zürich 1930.

Mit der Durchführung des III. Internationalen Kongresses, der vom 6. bis 10. September in Zürich abgehalten werden wird, wurde die Schweizerische Gesellschaft für Photogrammetrie betraut. Derselbe wird den Teilnehmern durch Vorträge und eine Ausstellung einen Überblick über die Anwendung der Photogrammetrie und über die Fortschritte im Instrumentenbau geben. In öffentlichen Diskussionen werden aktuelle Fragen behandelt und Klärung über die Vor- und Nachteile bestimmter Methoden und der hierbei verwendeten Instrumente geschaffen werden. Zu diesem Zwecke werden Kommissionen gebildet werden, von denen vorläufig solche für terrestrische Photogrammetrie, Luftphotogrammetrie, photographische Objektive, Verschlüsse, Reihenbildner, Platten, stereoskopische Röntgenaufnahmen, Gebäudephotogrammetrie und für Ausbildungsfragen vorgesehen sind.

Anläßlich des Kongresses wird der VII. Band des im Jahre 1908 unter der Redaktion von Hofrat Doležal von der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie gegründeten Internationalen Archives für Photogrammetrie erscheinen. Der Redaktionsausschuß wird aus den Herren Prof. F. Baeschlin, Prof. E. Doležal und Prof. E. Eggert bestehen. Der 1. Teil des VII. Archivbandes wird unmittelbar vor dem Kongreß erscheinen und Landesreferate über die photogrammetrischen Arbeiten in den einzelnen Staaten sowie auch wissenschaftliche Artikel, welche am Kongreß weder als Landes-, noch als Kommissions-Referate gehalten werden, bringen. Die Manuskripte hierfür sind bis längstens Mitte Mai dem geschäftsführenden Redakteur Prof. F. Baeschlin, Eidg. Techn. Hochschule in Zürich, einzusenden.

Im Anschluß an den photogrammetrischen Kongreß wird der Internationale Geometer-Kongreß stattfinden. Die Ausstellung für Photogrammetrie wird demzufolge mit derjenigen des Internationalen Geometer-Kongresses verbunden sein und dauert demzufolge vom 5. bis 14. September 1930. Das Arrangement der Ausstellung hat Herr Prof. Ed. Imhoff, Zürich, Eidg. Techn. Hochschule, übernommen, an den diesbezügliche Anfragen zu richten sind.

Anfragen bzw. Anmeldungen wegen Teilnahme an dem Kongreß sind an den Generalsekretär des Kongresses Herr Dr. Max Zeller, Zürich, Eidg. Techn. Hochschule, zu senden.

Für die Teilnahme am Kongreß werden sieben verschiedene Karten ausgegeben:

- | | |
|--|--------------|
| 1. Gesamtkarte, gültig für alle Veranstaltungen, inklusive Dampferfahrt, Bankett und Exkursionen | 60 Schw. Fr. |
| 2. Damenkarte, gültig für alle Veranstaltungen, inklusive Dampferfahrt und Bankett, mit Ausnahme der Exkursionen | 20 „ |
| 3. a) Kongreßkarte, gültig für alle Vorträge, die Diskussionen, die Dampferfahrt und die Ausstellung in Zürich | 25 „ |
| 3. b) Kongreßkarte, wie 3 a), jedoch ohne Dampferfahrt | 15 „ |
| 4. Bankettkarte | 15 „ |
| 5. Exkursionskarte nach Bern inklusive Bahnfahrt und Zwischenverpflegung | 15 „ |
| 6. Exkursionskarte nach Heerbrugg inklusive Bahnfahrt und Zwischenverpflegung | 15 „ |

gewinnt also den Eindruck, daß der Trienter Bergbau sich Jahrhunderte hindurch in völliger Getrenntheit von dieser Bergbaugruppe entwickelt haben muß. Dieser Schluß, der durch das Fehlen aller Ansätze von Meßkunst nahe gelegt wird, gewinnt noch etwas an Wahrscheinlichkeit, wenn man folgendes bedenkt: Wie schon erwähnt, half man sich noch 1208 im Trienter Bergbau mit dem „laborerium, ubi trahitur aqua“, man hatte also noch keinen Stolln. Unser „Actufus“ von 1213 war daher vermutlich der erste Stolln der Gegend. Unsere Urkunde von 1213 atmet den Geist treuherziger Ehrlichkeit. Man mutmaßt unwillkürlich folgenden Sachverhalt: Man hatte Stollnbauunternehmer gewonnen zur Bewältigung des Wassers in der Grube des Ritters von Gand. Ein Stollnhieb war ihnen zugestanden worden, und in gutem Glauben nahm man beiderseits an, daß die Stollnbauunternehmer am Stollnhieb gut verdienen würden. Aber sie arbeiteten in Wirklichkeit mit peinlichem Verlust und suchten sich schadlos zu halten, indem sie seitwärts dem Erz nachgingen und ihr Ziel, die Gand-Grube, aus dem Auge verloren. Daher der Streit, und man glaubt herauszufühlen, wie ehrlich-peinlich der Fall empfunden wurde, und wie man bemüht war, den Interessen der Stöllner nach Möglichkeit entgegenzukommen. Man kann daher kaum noch zweifeln, daß ohne alle Erfahrung der erste Versuch eines Stollnbauunternehmens vorlag.

Demgegenüber hat man im Schemnitzer Bergrecht schon Suchstolln und Erbstolln und einen sehr sorgfältig durchgebildeten Abschnitt „vom Recht des Erbstollns“. Also auch diese große Verschiedenheit drängt zu dem Schlusse, daß eine Jahrhunderte lange getrennte Entwicklung der Gebräuche des Bergbaus — hie Trienter Bergbau, hie böhmisch-ungarisch-sächsischer Bergbau — ohne gegenseitige Berührung stattgefunden haben muß.

Allgemeine mathematische Theorie der Umfahrungsplanimeter in vektor-analytischer Darstellung.

Von Ing. Dr. techn. Karl Ulbrich.

(Fortsetzung.)

VI. Strenge Ableitung der Größe der Fahrarmfläche.

Um das infinitesimale Flächenelement $ABB' A'$ (Fig. 3 und 4) zu überstreichen, denkt man sich die infinitesimale Bewegung des Fahrarmes aus einer Parallelverschiebung und einer nachfolgenden Drehung zusammengesetzt. Diese Zerlegung kann man auf zwei verschiedene Arten vornehmen:

- a) Man verschiebt zuerst den Stab parallel nach $A_1 B'$ und dreht dann um den Winkel $+d\varphi$ im Uhrzeigersinne bis zur Lage $A' B'$ (Fig. 3).
- b) Man verschiebt zuerst den Stab parallel nach $A' B_1$ und dreht dann um den Winkel $-d\varphi$ bis zur Lage $A' B'$ (Fig. 4).

Bei diesen Zerlegungen wird also immer zuerst ein Parallelogramm und dann ein Kreissector überstrichen, wobei auf die Vorzeichen dieser Flächen nach dem im Abschnitt IV bemerkten, gebührend Rücksicht zu nehmen ist.

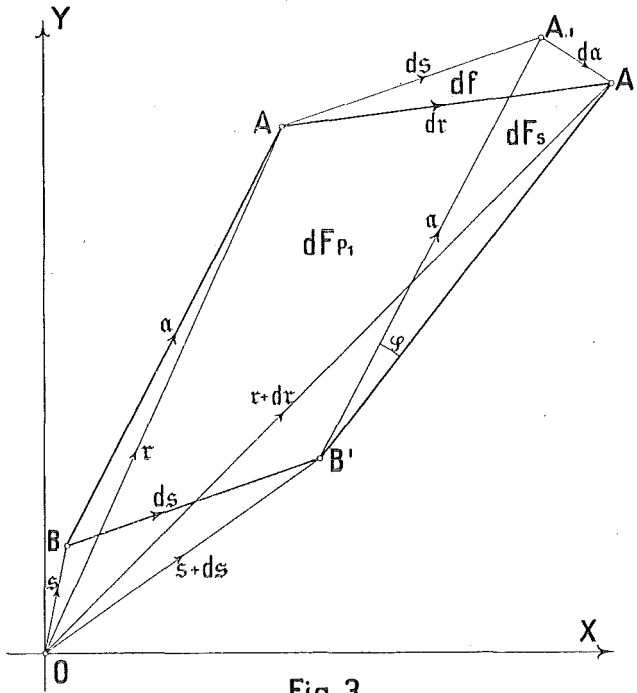


Fig. 3.

ad a) $dF = ABB'A_1 + A_1B'A' - AA'A_1 \dots 1)$
 $dF = dF_{p_1} + dF_s - df \dots 2)$

Die Fläche des Parallelogramms $ABB'A_1$ beträgt: $dF_{p_1} = [ds \alpha] \dots 3)$

Sektor $A_1B'A'$: Da der Fahrarm α ein Vektor von konstanter Länge $|\alpha|$ ist, so kann die differentiale Änderung $d\alpha$ nur normal zum Vektor α erfolgen ¹²⁾.

$$d\alpha \perp \alpha \dots 4)$$

Infolgedessen ist die Änderung A_1A' identisch mit $d\alpha$

$$dF_s = \frac{1}{2} [d\alpha \alpha] \dots 5)$$

Dreieck: $AA'A_1$: $df = \frac{1}{2} [d ds] \dots 6)$

Diese Dreiecksfläche kann man, da df klein von höherer Ordnung ist, vernachlässigen.

$$dF = [d \cdot \alpha] + \frac{1}{2} [d\alpha \alpha] - \frac{1}{2} [d\alpha ds] \dots 7)$$

$$F = \int_{\Gamma} [d \alpha] + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [d\alpha \alpha] \dots \text{VIII})$$

Um diese Formel mit schon bekannten Ergebnissen vergleichen zu können, wird sie mittels der Koordinatenkomponenten auf die analytische Form gebracht.

$$\alpha = (x_1 - x_2) i + (y_1 - y_2) j \dots 8)$$

$$d\alpha = d(x_1 - x_2) i + d(y_1 - y_2) j \dots 9)$$

¹²⁾ Beweise siehe J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung, 2. Aufl. Stuttgart 1926.

$$F = \int_{\Gamma} \left| \begin{matrix} dx_2 & dy_2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{matrix} \right| + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left| \begin{matrix} d(x_1 - x_2) & d(y_1 - y_2) \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{matrix} \right| \dots \dots \dots 10)$$

$$F = \int_{\Gamma} \{ (y_1 - y_2) dx_2 - (x_1 - x_2) dy_2 \} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \{ (y_1 - y_2) d(x_1 - x_2) - (x_1 - x_2) d(y_1 - y_2) \} \dots \dots \dots 11)$$

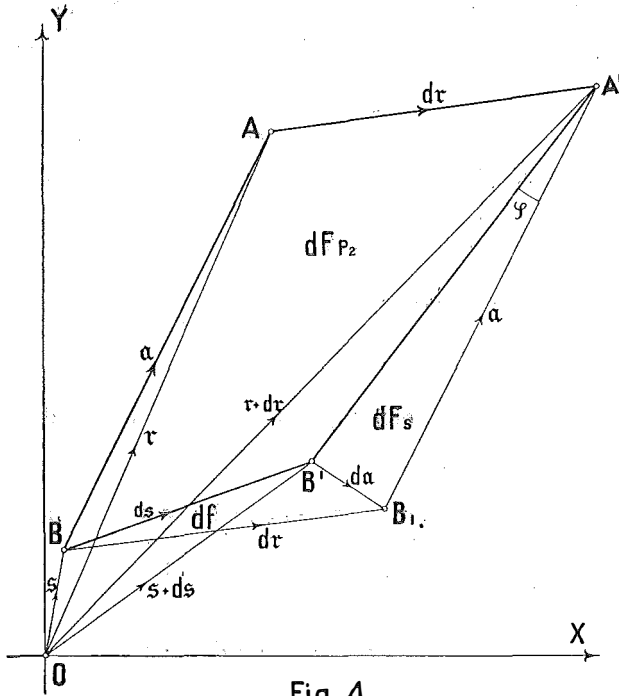


Fig. 4.

ad b) $dF = ABB_1A' - A'B_1B' - BB_1B' \dots \dots \dots 12)$

$$dF = dF_{P_2} - dF_S - df \dots \dots \dots 13)$$

Die Fläche des Parallelogramms ABB_1A' beträgt: $dF_{P_2} = [dr a] \dots \dots 14)$

Sektor $A'B_1B'$: Diese Fläche ist ebenso groß wie bei der ersten Zerlegung.

$$dF_S = \frac{1}{2} [da a] \dots \dots \dots 15)$$

Dreieck BB_1B' : $df = [dr ds]$ also dasselbe wie in Gleichung 6)

$$dF = [dr a] - \frac{1}{2} [da a] \dots \dots \dots 16)$$

$$F = \int_{\Gamma} [dr a] - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [da a] \dots \dots \dots IX)$$

Für Vergleichszwecke werden jetzt wieder die Koordinaten eingeführt, so daß diese Gleichung folgende Gestalt annimmt:

$$F = \int_{\Gamma} \left| \begin{matrix} dx_1 & dy_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{matrix} \right| - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left| \begin{matrix} d(x_1 - x_2) & d(y_1 - y_2) \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{matrix} \right| \dots \dots \dots 17)$$

$$F = \int_{\Gamma} \{ (y_1 - y_2) dx_1 - (x_1 - x_2) dy_1 \} - \\ - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \{ (y_1 - y_2) d(x_1 - x_2) - (x_1 - x_2) d(y_1 - y_2) \} \dots \dots \dots 18)$$

Die Gleichungen 11) und 17) sind identisch mit den Gleichungen, die C. Runge ¹³⁾ nach direkter analytischer Berechnung und darauffolgender umständlicher Umformung aufgestellt hat.

Jetzt ist noch der Beweis zu führen, daß die Gleichungen VIII) und IX), die ja dieselbe Fläche darstellen, identisch sind. Dies erreicht man auf folgende Weise:

$$r = s + a \dots \dots \dots 19)$$

$$dr = ds + da \dots \dots \dots 20)$$

Setzt man diesen Wert von Gleichung 20) in die Gleichung IX) ein, so erhält man:

$$F = \int_{\Gamma} [ds + da, a] - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [da a] \dots \dots \dots 21)$$

$$F = \int_{\Gamma} [ds a] + \int_{\Gamma} [da a] - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [da a] \dots \dots \dots 22)$$

$$F = \int_{\Gamma} [ds a] + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [da a] \dots \dots \dots 23)$$

Wie man also sieht, ist die Gleichung 23) identisch mit Gleichung VIII), was zu beweisen war.

VII. Diskussion der Gleichungen VIII und IX.

$$F = \int_{\Gamma} [ds a] + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [da a] \dots \dots \dots \text{VIII)}$$

$$F = \int_{\Gamma} [dr a] - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [da a] \dots \dots \dots \text{IX)}$$

Diese beiden Formeln sind so gestaltet, daß dem ersten Integral alle Parallelverschiebungen und dem zweiten Integral alle Verdrehungen des Fahrarms angelastet sind.

Beide Male denkt man sich die Bewegungen getrennt kontinuierlich aneinandergefügt, also in zwei große einheitliche Bewegungsvorgänge zerlegt, die in Wahrheit nicht vorkommen. Dies sind also bloß mathematische, aber auch sehr nützliche Fiktionen.

Bei der Diskussion des zweiten Gliedes $\frac{1}{2} \int_{\Gamma} [da a]$, das also bloß von den Verdrehungen des Fahrarms abhängig ist, können zwei, voneinander grundsätzlich getrennte Fälle auftreten.

a) Der Fahrarm kehrt, ohne eine ganze Umdrehung gemacht zu haben, in seine ursprüngliche Lage zurück.

b) Der Fahrarm kehrt nach einer vollen Umdrehung um sich selbst in seine Anfangslage zurück.

¹³⁾ C. Runge, Das Prytz-Stangenplanimeter. Z. f. Vermessungswesen (Stuttgart) Band 24. S. 321 ff. 1895.

ad a) Der Fahrarm schwingt um einen fix gedachten Punkt, wobei man sich die drehende Bewegung kontinuierlich zusammengesetzt denkt. In diesem Falle wird

$$\frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi} [da \alpha] = 0, \dots\dots\dots 1)$$

da ja die obere und untere Grenze dieses Integrals gleich ist. Geometrisch liegt die Sache so, daß der Kreis Sektor einmal im positiven und einmal im negativen Sinn überstrichen wird, so daß die Summe zu Null wird.

ad b) In diesem Fall beschreibt der Fahrarm um den fix gedachten Punkt einen Vollkreis mit dem Radius |a|. Das zweite Integral nimmt die folgende Form an:

$$\frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi + 2\pi} [da \alpha] = |a|^2 \pi \dots\dots\dots 2)$$

Werden jetzt die Gleichungen 1) und 2) in die Gleichungen VIII) und IX) substituiert, so erhalten wir zwei verschiedene Fälle, die jetzt getrennt behandelt werden müssen. (F₀ bedeutet Fläche ohne vollständige Umdrehung des Fahrarms.)

a)

$$F_0 = \int_{\Gamma} [ds \alpha] \dots\dots\dots \text{VIII a)}$$

$$F_0 = \int_{\Gamma} [dx \alpha] \dots\dots\dots \text{IX a)}$$

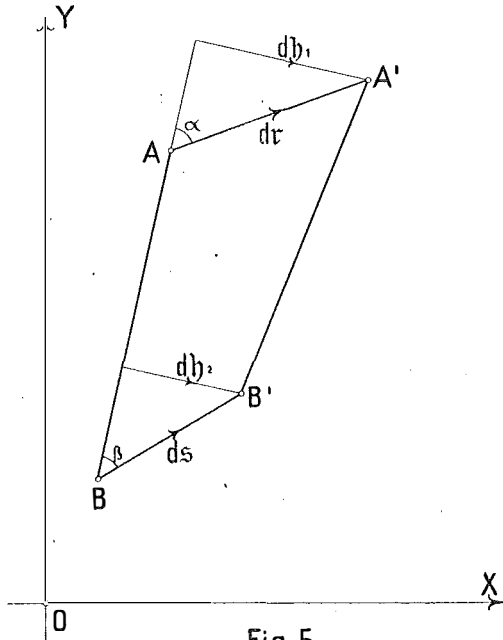


Fig. 5.

Man sieht also, daß die beiden Integrale einander gleich sind.

$$F_0 = \int_{\Gamma} [ds \alpha] = \int_{\Gamma} [dx \alpha] \dots\dots\dots 3)$$

$$F_0 = \int_{\Gamma} |ds| \cdot |\alpha| \sin \beta = \int_{\Gamma} |dx| \cdot |\alpha| \sin \alpha \dots \dots \dots 4)$$

$$F_0 = |\alpha| \int_{\Gamma} |ds| \sin \beta = |\alpha| \int_{\Gamma} |dx| \sin \alpha \dots \dots \dots 5)$$

Wie man aus Fig. 5 ersieht, kann in den Integralen dh_1 und dh_2 eingeführt werden, sodaß sich folgende Gleichung ergibt:

$$F_0 = |\alpha| \int_{\Gamma} |dh_2| = |\alpha| \int_{\Gamma} |dh_1| \dots \dots \dots 6)$$

In dieser Doppelgleichung 6) stellen $\int_{\Gamma} |dh_1|$ und $\int_{\Gamma} |dh_2|$ die Längen der beiden orthogonalen Trajektorien durch A und B in Bezug auf die verschiedenen Lagen des Fahrarms dar. Es ist aus dieser Gleichung auch ersichtlich, daß von den beiden Trajektorien durch A und B keine den Vorzug verdient, so daß ich weiterhin, ohne irgend welche Einschränkungen zu machen, mit folgender Formel X) allein operieren darf:

$$F_0 = |\alpha| \int_{\Gamma} |dh_2| \dots \dots \dots X)$$

F_M bedeutet Fläche mit vollständiger Umdrehung des Fahrarmes.

b) $F_M = \int_{\Gamma} [ds \alpha] + |\alpha|^2 \pi \dots \dots \dots VIII b)$

$$F_M = \int [dx \alpha] - |\alpha|^2 \pi \dots \dots \dots IX b)$$

Führt man in diesen beiden Gleichungen die Zerlegungen analog wie in den Gleichungen 4) bis 6) ein, so erhält man:

$$F_M = |\alpha| \int_{\Gamma} |dh_2| + |\alpha|^2 \pi \dots \dots \dots XI)$$

$$F_M = |\alpha| \int_{\Gamma} |dh_1| - |\alpha|^2 \pi \dots \dots \dots XII)$$

Wie man sieht, ist zur Bestimmung der Fahrarmfläche im Falle a) und b) die Ermittlung eines Linienintegrals nötig. Das Hilfsmittel dazu ist die Integrierrolle, deren Theorie später noch behandelt wird. Der Unterschied zwischen den Fällen a) und b) liegt darin, daß im Falle a) eine beliebige Trajektorie ausgemessen wird, während im Falle b) die jeweils durch die mathematische Theorie geforderte bestimmte Trajektorie rektifiziert werden muß.

Praktisch ist es jedoch meist nicht möglich, die Rolle am verlangten Punkt anzubringen. Da hilft man sich derart, daß man die Integrierrolle an einem passenden Punkt anbringt und sich die mathematische Relation zwischen der Trajektorie der Integrierrolle und der geforderten Trajektorie herstellt.

Dadurch ist es auch möglich, daß ich in Hinkunft bloß mit Formel X) und XI) weiter operiere, was ich ohne weiteres tun kann, da zwischen Formel XII) und XI) eine Trajektorienrelation besteht, so daß die Allgemeinheit der folgenden Betrachtungen auch weiterhin bestehen bleibt.

Schließlich möchte ich noch den allgemeinen Beweis für einen Sonderfall geben, bei dem man die Unterscheidung der Fälle a) und b) nicht nötig hat.

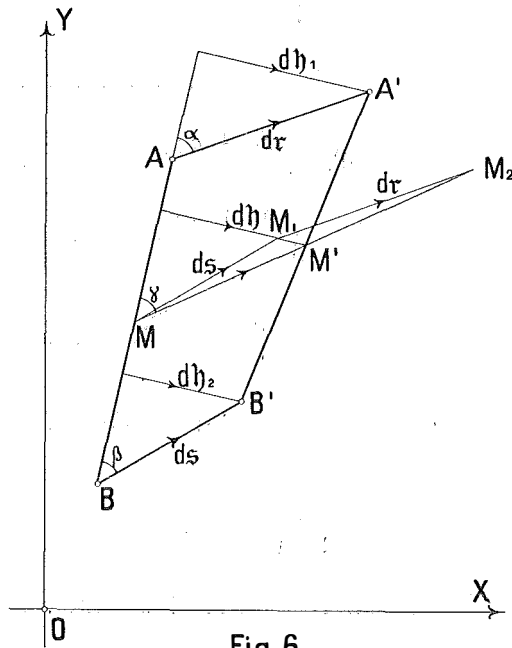


Fig. 6.

$$F = \int_{\Gamma} [ds \ a] + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [da \ a] \dots \dots \dots \text{VIII) } \left. \vphantom{\int_{\Gamma}} \right\} +$$

$$F = \int_{\Gamma} [dx \ a] - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [da \ a] \dots \dots \dots \text{IX) } \left. \vphantom{\int_{\Gamma}} \right\}$$

$$2 F = \int_{\Gamma} [ds \ a] + \int_{\Gamma} [dx \ a] \dots \dots \dots 7)$$

$$2 F = \int_{\Gamma} [ds + dx, a] \dots \dots \dots 8)$$

$$F = \int_{\Gamma} \left[\frac{ds + dx}{2} \ a \right] \dots \dots \dots 9)$$

Nach einem bekannten Satz der Vektorrechnung ist es aber gestattet, an Stelle der Hypothenuse die für das äußere Produkt gleich wirksame Kathete dh zu setzen, sodaß sich die Gleichung 9) wie folgt transformiert:

$$F = \int_{\Gamma} [dh, a] \dots \dots \dots \text{XIII)}$$

Diese Gleichung ist der mathematische Beweis dafür, daß die Abwicklung der Integrierrolle, die im Mittelpunkt des Fahrarmes angebracht ist, tatsächlich proportional der überstrichenen Fläche ist, ohne daß man auf volle Umdrehungen des Stabes um sich selbst zu achten hat. Dies ist sicher bemerkenswert, da diese Eigenschaft für andere Punkte des Stabes bloß bei besonderen Voraussetzungen Gültigkeit besitzt (Fig. 6).

VIII. Anwendung der Gleichung XIII auf die Kurvimetertheorie.

$$F = \int_{\Gamma} [d\mathfrak{h} \mathfrak{a}] \dots \dots \dots \text{XIII)}$$

$$d\mathfrak{h} = \frac{d\mathfrak{h}_1 + d\mathfrak{h}_2}{2} \dots \dots \dots 1)$$

$$F = \int_{\Gamma} \left[\frac{d\mathfrak{h}_1 + d\mathfrak{h}_2}{2} \cdot \mathfrak{a} \right] \dots \dots \dots 2)$$

$$\int_{\Gamma} [d\mathfrak{h} \mathfrak{a}] = \int_{\Gamma} \left[\frac{d\mathfrak{h}_1 + d\mathfrak{h}_2}{2} \cdot \mathfrak{a} \right] \dots \dots \dots 3)$$

$$\int_{\Gamma} [d\mathfrak{h} \mathfrak{a}] = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [d\mathfrak{h}_1 \mathfrak{a}] + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [d\mathfrak{h}_2 \mathfrak{a}] \dots \dots \dots 4)$$

$$\left. \begin{array}{l} d\mathfrak{h} \perp \mathfrak{a} \\ d\mathfrak{h}_1 \perp \mathfrak{a} \\ d\mathfrak{h}_2 \perp \mathfrak{a} \end{array} \right\} \dots \dots \dots 5)$$

$$\int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}| \cdot |\mathfrak{a}| \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_1| \cdot |\mathfrak{a}| \sin 90^\circ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_2| \cdot |\mathfrak{a}| \sin 90^\circ \dots 6)$$

$$|\mathfrak{a}| \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}| = \frac{1}{2} |\mathfrak{a}| \left\{ \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_1| + \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_2| \right\} \dots \dots \dots 7)$$

$$\int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}| = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_1| + \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_2| \right\} \dots \dots \dots \text{XIV)}$$

Dies ist die Grundformel der Kurvimetertheorie. Voraussetzung ist also, daß die zu rektifizierende Kurve mit dem Mittelpunkt des Stabes befahren wird und der Stab immer normal zur Kurve gehalten wird. Die beiden Integrale $\int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_1|$ und $\int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_2|$ werden mittels Meßrädchen ausgewertet und das arithmetische Mittel gibt die gesuchte Kurvenlänge.

Die Gleichung XIV) ist identisch mit der, die F. Willers¹⁴⁾ auf S. 57 speziell für Kurvimeter abgeleitet hat. Hier tritt sie bloß als Spezialfall der Planimetertheorie auf.

IX. Flächenformeln für alle Planimetertypen.

Um die Flächenformeln für die drei charakteristischen Planimetertypen zu erhalten, werden in die drei, im V. Abschnitt erhaltenen Gebrauchsformeln, jedesmal die im VII. Abschnitt erhaltenen Formeln X) und XI) eingesetzt. Im folgenden werden die drei Sonderfälle a) und b) und c) wieder getrennt behandelt werden.

ad a) $A = F \dots \dots \dots \text{V)}$

Jetzt können die zwei Unterfälle eintreten. Erstens „ohne volle Umdrehung“ des Stabes und zweitens „mit voller Umdrehung“ des Stabes. Beide

¹⁴⁾ F. Willers: Mathematische Instrumente. Berlin und Leipzig 1926.

Planimeter wären theoretisch und praktisch durchaus möglich. Allerdings kommt die zweite Planimetertypen in der Praxis doch nicht vor, obwohl diese Konstruktion mittels eines durchschlagbaren Instrumentes lösbar wäre.

1. Ohne volle Umdrehung des Stabes.

$$A_0 = F_0 \dots\dots\dots 1)$$

$$A_0 = |\alpha| \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_2| \dots\dots\dots \text{XV}$$

2. Mit voller Umdrehung des Stabes.

$$A_M = F_M \dots\dots\dots 2)$$

$$A_M = |\alpha| \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_2| + |\alpha|^2 \pi \dots\dots\dots \text{XVI}$$

ad b)

$$A = F + B_C \dots\dots\dots \text{VI)}$$

Auch hier sind die zwei Unterfälle zu unterscheiden. Hier hat der erste Fall bloß theoretisches Interesse, da er in der Praxis nicht angewendet wird. Bezüglich der konstanten Fläche B_C ist zu bemerken, daß meist eine Kreisfläche mit dem Radius $|t|$ gewählt wird, deren Mittelpunkt im Ursprung O liegt. Es bestehen also folgende Relationen:

$$B_C = |t|^2 \pi \dots\dots\dots 3)$$

$$A = F + |t|^2 \pi \dots\dots\dots 4)$$

1. Ohne volle Umdrehung des Stabes.

$$A_0 = F_0 + |t|^2 \pi \dots\dots\dots 5)$$

$$A_0 = |\alpha| \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_2| + |t|^2 \pi \dots\dots\dots \text{XVII}$$

2. Mit voller Umdrehung des Stabes.

$$A_M = F_M + |t|^2 \pi \dots\dots\dots 6)$$

$$A_M = |\alpha| \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_2| + |\alpha|^2 \pi + |t|^2 \pi \dots\dots\dots \text{XVIII}$$

ad c)

$$A = F + B_V \dots\dots\dots \text{VII)}$$

Dies ist der allgemeinste Fall, der in der Praxis nur wenig Bedeutung hat. Auch hier sind die beiden Unterfälle auseinander zu halten.

1. Ohne volle Umdrehung des Stabes.

$$A_0 = F_0 + B_V \dots\dots\dots 7)$$

$$A_0 = |\alpha| \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_2| + B_V \dots\dots\dots \text{XIX}$$

2. Mit voller Umdrehung des Stabes.

$$A_M = F_M + B_V \dots\dots\dots 8)$$

$$A_M = |\alpha| \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_2| + |\alpha|^2 \pi + B_V \dots\dots\dots \text{XX}$$

(Schluß folgt.)

faches, erstinstanzliches Verfahren für die laufende Berücksichtigung der Änderungen in der Kulturgattung eingeführt worden; die Berücksichtigung geänderter Ertragsfähigkeit blieb jedoch nach wie vor dem schwerfälligen und kostspieligen Gesetzeswege vorbehalten. Eine zweite, im Jahre 1910 fällige Revision hat nicht mehr stattgefunden und wurde auch vom Finanzministerium gelegentlich einer Interpellation abgelehnt. Bei diesem Stande ist es auch geblieben und es ist wohl mit gutem Grunde anzunehmen, daß sich, wie anderwärts, auch in der tschechoslowakischen Republik der Wunsch nach einer Überprüfung der Einschätzungen immer lauter und machtvoller geäußert hat und schließlich mit dem bloßen Hinweise auf die Güte des ursprünglichen Operates nicht mehr zum Verstummen gebracht werden konnte. (Schluß folgt.)

Allgemeine mathematische Theorie der Umfahrungsplanimeter in vektor-analytischer Darstellung.

Von Ing. Dr. techn. Karl Ulbrich.

(Schluß.)

X. Bestimmung der Linienintegrale und deren Relation mit der Ablesung an der Integrierrolle.

In diesem Abschnitte werden die im Abschnitte VII angekündigten Relationen zwischen den Trajektorien mathematisch durchgeführt. Wenn man annimmt, daß sich die Integrierrolle im Abstände $|b|$ von B befindet (siehe Fig. 7), bestehen folgende Beziehungen, wobei $d\eta$ die tatsächliche Ablesung an der Integrierrolle, $d\eta_2$ das Bogenelement der orthogonalen Trajektorie durch B und db die tangentielle Änderung von b darstellt.

$$|d\eta_2| - |db| = |d\eta| \dots \dots \dots 1)$$

$$\int |d\eta_2| = \int |d\eta| + \int |db| \dots \dots \dots 2)$$

Jetzt können wieder zwei Unterfälle eintreten. Erstens „ohne volle Umdrehung“ und zweitens „mit voller Umdrehung“ des Stabes.

1. Ohne volle Umdrehung des Stabes.

$$\int_{\Gamma} |db| = 0 \dots \dots \dots 3)$$

Da die obere und untere Grenze dieses bestimmten Integrals gleich ist, fällt dieser Ausdruck weg.

$$\underline{\int_{\Gamma} |d\eta_2| = \int_{\Gamma} |d\eta| \dots \dots \dots XXI)}$$

Diese Gleichung ist wichtig und besagt folgendes: Wenn der Fahrarm keine vollständige Umdrehung um sich selbst beschreibt, so ist bloß nötig, die Länge einer beliebig orthogonalen Trajektorie mittels der Integrierrolle zu bestimmen. Da in diesem Falle alle Trajektorien gleich lang sind, ist es gleichgültig, wo die Integrierrolle angebracht ist, wenn nur deren Achse parallel zum Fahrarm ist.

2. Mit voller Umdrehung des Stabes.

$$\int_{\Gamma} |d\mathfrak{b}| = 2\pi |\mathfrak{b}| \dots\dots\dots 4)$$

Diese Gleichung besteht, weil \mathfrak{b} ein Vektor von konstanter Länge ist, weshalb seine Änderung bloß in tangentialer Richtung erfolgen kann. Bei voller Umdrehung wird dann der Kreis mit dem Radius $|\mathfrak{b}|$ beschrieben. Die Gleichung 2) nimmt jetzt folgende Gestalt an:

$$\int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_2| = \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}| + 2\pi |\mathfrak{b}| \dots\dots\dots \text{XXII})$$

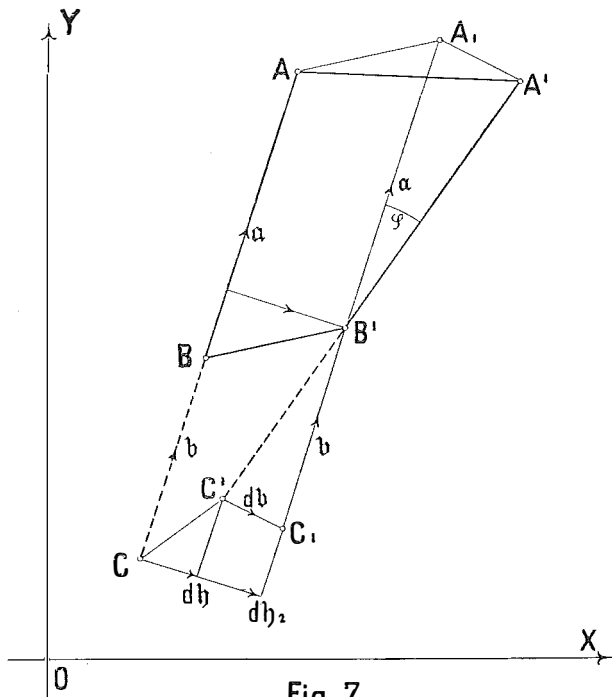


Fig. 7.

Mit diesen Gleichungen ist der aufbauende Formelapparat geschaffen und man kann jetzt zur Aufstellung der Schlußformeln und deren Diskussion gehen, wobei ich die im V. Abschnitt angegebenen drei, durch die von der Leitlinie eingeschlossenen Flächen unterschiedenen Planimetertypen getrennt behandeln werde.

XI. Planimeter, deren Leitfläche verschwindet.

In die Gleichungen XV) und XVI) müssen jetzt die Gleichungen XXI) und XXII) eingeführt werden, um die Schlußformeln zu erhalten.

1. Ohne volle Umdrehung des Stabes.

$$A_0 = |\alpha| \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_2| \dots\dots\dots \text{XV)}$$

$$\int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}_2| = \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}| \dots\dots\dots \text{XXI)}$$

$$A_0 = |\alpha| \int_{\Gamma} |d\mathfrak{h}| \dots\dots\dots \text{XXIII)}$$



Dies ist die wichtige und in der Praxis die am häufigsten verwendete Schlußformel. Nach diesem Prinzip arbeiten die meisten Planimeter, die sich zumeist nur durch die Form der Leitkurve und durch die Art der Integrationsvorrichtung und deren Anordnung unterscheiden. Für jede dieser verschiedenen Planimetertypen ist die mathematische Theorie besonders abgeleitet worden und selbstverständlich ist die obige Schlußformel das jedesmalige Resultat gewesen.

Nachstehend gebe ich nun eine Zusammenstellung der Umfahrungsplanimeter, die nach obigem Prinzip arbeiten, mit Angabe ihrer wichtigsten konstruktiven Merkmale, die für die in dieser Abhandlung gegebenen mathematischen Theorie von Belang sind.

Name des Planimeters	Leitkurve	Leitfläche	Integrier- vorrichtung	Anmerkung
Polarplanimeter	Kreis	$B = 0$		Rolle läuft auf dem Papier
Miller-Amsler	(Radius $ t_1 $)	(Bei Pol innen)	Integrier- rolle	Achse ist \parallel zum Fahrarm
Linearplanimeter	Gerade	$B \neq 0$		Rolle läuft auf einer Scheibe
Coradi Wetli-Starke	(Radius ∞)		Integrier- rolle	Achse ist \perp zum Fahrarm
Kugelroll- planimeter	Gerade	$B = 0$	Zylindrische Integrier- rolle	Rolle wälzt sich auf einer Kugel
Coradi	(Radius ∞)			Achse ist \parallel zum Fahrarm

2. Mit voller Umdrehung des Stabes.

$$A_M = |a| \int_{\Gamma} |dh_2| + |a|^2 \pi \dots \dots \dots \text{XVI)}$$

$$\int_{\Gamma} |dh_2| = \int_{\Gamma} |dh| + 2\pi |b| \dots \dots \dots \text{XXII)}$$

$$A_M = |a| \int_{\Gamma} |dh| + |a|^2 \pi + 2 |a| \cdot |b| \pi \dots \dots \text{XXIV)}$$

Planimeter, die nach dieser Formel arbeiten, sind bis jetzt in der Praxis nicht verwendet worden, könnten aber, wie schon früher erwähnt, nach Art der durchschlagbaren Coradi-Polarplanimeter ohne weiteres realisiert werden.

XII. Planimeter mit konstanter Leitfläche.

Jetzt müssen die Gleichungen XXI) und XXII) in die Gleichungen XVII) und XVIII) substituiert werden, um die Schlußformeln zu erhalten. Selbstverständlich muß man auch hier die beiden folgenden Untergruppen getrennt behandeln.

1. Ohne volle Umdrehung des Stabes.

$$A_0 = |a| \int_{\Gamma} |dh_2| + |t|^2 \pi \dots \dots \dots \text{XVII)}$$

$$\int_{\Gamma} |dh_2| = \int_{\Gamma} |dh| \dots \dots \dots \text{XXI)}$$

$$A_0 = |a| \int_{\Gamma} |dh| + |t|^2 \pi \dots \dots \dots \text{XXV)}$$

Dieser Fall hat bloß theoretisches Interesse; es ist aber sicherlich nicht ausgeschlossen, daß ein Instrument nach diesem Prinzip konstruiert werden könnte.

2. Mit voller Umdrehung des Stabes.

$$A_M = |a| \int_{\Gamma} |dh_2| + |a|^2 \pi + |t|^2 \pi \dots \dots \text{XVIII)}$$

$$\int_{\Gamma} |dh_2| = \int_{\Gamma} |dh| + 2|b|\pi \dots \dots \dots \text{XXII)}$$

$$A_M = |a| \int_{\Gamma} |dh| + |a|^2 \Pi + 2|a| \cdot |b|\pi + |t|^2 \pi \dots \dots \text{XXVI)}$$

Dies ist die wohlbekannte Formel für das Polarplanimeter bei Pol innen, die von E. Doležal¹⁵⁾ auf Seite 1074 ff. für dieses Instrument abgeleitet wurde. Man ersieht daraus auch sofort die additionelle Konstante.

$$K = \{ |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |t|^2 \} \pi \dots \dots \dots \text{II,}$$

die ja die Fläche des Grundkreises darstellt. Diesen Grundkreis darf man natürlich nicht mit der Fläche des Leitkreises verwechseln. Diese beiden Kreise unterscheiden sich stets um eine Konstante.

Der Grundkreis ist ja, wie man ohne weiteres aus der Formel ersieht, die Fläche, bei der die Integrierrolle konstant die Lesung Null gibt.

XIII. Planimeter mit variabler Leitfläche.

Dies ist der allgemeinste, auch alles vorhergehende umfassende Fall, der sich, wie folgt, darstellt, wobei die Gleichungen XIX) und XX) mit den Gleichungen XXI) und XXII) in Verbindung gebracht werden.

1. Ohne volle Umdrehung des Stabes.

$$A_0 = |a| \int_{\Gamma} |dh_2| + B_V \dots \dots \dots \text{XIX)}$$

$$\int_{\Gamma} |dh_2| = \int_{\Gamma} |dh| \dots \dots \dots \text{XXI)}$$

$$A_0 = |a| \int_{\Gamma} |dh| + B_V \dots \dots \dots \text{XXVII)}$$

2. Mit voller Umdrehung des Stabes.

$$A_M = |a| \int_{\Gamma} |dh_2| + |a|^2 \pi + B_V \dots \dots \dots \text{XX)}$$

$$\int_{\Gamma} |dh_2| = \int_{\Gamma} |dh| + 2|b|\pi \dots \dots \dots \text{XXII)}$$

$$A_M = |a| \int_{\Gamma} |dh| + 2|a| \cdot |b|\pi + B_V \dots \dots \text{XXVIII)}$$

¹⁵⁾ E. Doležal: Hand- und Lehrbuch der Niederen Geodäsie, I. Band.

Auf diesen Formeln basiert das Stangenplanimeter von H. Prytz. Das Integral $\int_T |dh|$ wird, da an der Schneide keine Meßvorrichtung vorhanden ist, durch direkte Messung mit einem Maßstab gefunden, wobei man das Integral, das die Summe der Querverschwenkungen darstellt, einfach durch eine Gerade approximiert. Die Leitfläche oder, wie sie Haman ¹⁶⁾ nennt, Restfläche B_V ist meist sehr klein, so daß man sie, da das Instrument ohnehin bloß eine geringe Genauigkeit besitzt, zumeist vernachlässigen kann. Ist dies einmal ausnahmsweise nicht der Fall, so muß auch die Restfläche B_V umfahren werden und es entsteht eine neue, sicherlich viel kleinere Restfläche B'_V , die man bestimmt vernachlässigen kann. Dieses Instrument arbeitet also nach dem Prinzip der Iteration, welches beim Auflösen von Gleichungen in der Mathematik ja oft auch schneller zum Ziele führt als der strenge theoretische Weg.

XIV. S c h l u ß b e m e r k u n g e n .

Das wesentliche dieser Abhandlung ist also, daß es mir gelungen ist, eine allgemeine mathematische Theorie der Planimeter zu geben, in die sich alle Planimetertypen ohne jeden künstlichen Zwang organisch einordnen.

An Versuchen dazu hat es ja bekanntlich nicht gefehlt. Ich will hier bloß einige Lösungen auf diesem Gebiete erwähnen.

Jordan gibt in seinem Handbuche ¹⁷⁾ eine allgemeine Planimetertheorie, die aber leider weniger mit mathematischen Hilfsmitteln, sondern mehr durch anschauliche Beweise vorgeführt wird, so daß es unsicher ist, ob die abgeleiteten Formeln nicht nur für den bestimmten speziellen Fall oder auch im allgemeinen Fall Gültigkeit haben.

Einen anderen eigenen Weg ging J. Groeneveld in der Zeitschrift für Instrumentenkunde Berlin 1927 in der Artikelreihe „Eine neue Planimetertheorie“. Es gelang ihm auch, eine ziemlich umfassende Theorie aufzustellen.

In besonders eleganter Weise erledigte K. Heun ¹⁸⁾ diese Theorie. Er betrachtete die Planimeterbewegung vom kinematischen Standpunkte aus. Dadurch gelangte er sehr schnell zu den bekannten Schlußformeln und es ist nur schade, daß er sich bloß auf zwei Spezialfälle beschränkte.

Zum Schlusse möchte ich noch bemerken, daß es, wie ich es an mehreren Stellen bewiesen habe, vollständig unberechtigt ist, einen Unterschied zwischen „Pol innen“ und „Pol außen“ zu machen. Es müßte statt dessen richtig immer „Mit voller Umdrehung des Stabes“ und „Ohne volle Umdrehung des Stabes“ heißen. Leider ist die falsche Bezeichnung sehr häufig.

¹⁶⁾ Hamann: Z. f. Vermessungswesen (Stuttgart) Band 25. S. 646. 1896. Über das Stangenplanimeter.

¹⁷⁾ Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde, II. Band, 8. Aufl., Stuttgart 1914.

¹⁸⁾ K. Heun: Kinematik. S. 233 ff. Sammlung Schubert, Bd. 37. Leipzig 1906.