

Paper-ID: VGI_193202



Über eine besondere Teilung einer Dreiecksfläche

Leopold Herzka ¹

¹ *Hofrat i. R., Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **30** (1), S. 3–6

1932

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Herzka_VGI_193202,  
Title = {\U}ber eine besondere Teilung einer Dreiecksfl{\a}che,  
Author = {Herzka, Leopold},  
Journal = {\O}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {3--6},  
Number = {1},  
Year = {1932},  
Volume = {30}  
}
```



Über eine besondere Teilung einer Dreiecksfläche*).

Von Ing. Leopold Herzka, Hofrat i. R., Wien.

In einem besonderen Falle wurde gefordert, einen Baugrund F von Dreiecksform ABC (Abb. 1) in drei Teile mF , nF und pF so zu zerlegen, daß die Teilungslinien von dem erst zu bestimmenden, innerhalb oder außerhalb F liegenden Punkte S senkrecht zu den einzelnen Dreiecksseiten verlaufen; m , n und $p = (1 - m - n)$ sind echte Brüche. Es sei (Abb. 1):

$$\text{Fläche } A12 = mF; \text{ } B34 = nF.$$

Man erkennt aus der Abb. 1, daß S im Dreieck, in der Seite c oder außerhalb des Dreieckes liegt, je nachdem die Bedingung:

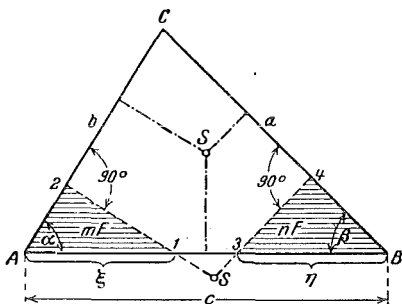


Abb. 1.

$$\xi + \eta \geq c \dots \dots \dots (1)$$

erfüllt wird; nun ist:

$$\frac{1}{2} \zeta^2 \sin \alpha \cos \alpha = mF = \frac{1}{2} m b c \sin \alpha$$

$$\frac{1}{2} \eta^2 \sin \beta \cos \beta = nF = \frac{1}{2} n a c \sin \beta$$

oder
$$\zeta^2 = \frac{m b c}{\cos \alpha}, \eta^2 = \frac{n a c}{\cos \beta}.$$

Dies in Gl. (1) eingeführt, entsteht die Bedingungsgleichung:

$$\left(\frac{m b}{c \cos \alpha}\right)^{1/2} + \left(\frac{n a}{c \cos \beta}\right)^{1/2} \geq 1, \dots \dots \dots (2)$$

aus der sofort über die Lage von S entschieden werden kann.

Beispiel: Für ein rechtwinkliges Dreieck vereinfacht sich wegen $a = c \cos \beta$, $b = c \cos \alpha$ obige Bedingung zu:

$$m^{1/2} + n^{1/2} \geq 1. \dots \dots \dots (2')$$

Bei Flächengleichheit, also $m = n = 1/3$, entsteht daher: $2 \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} > 1.$

*) Siehe auch „Der Bauingenieur“, 1929, H. 46,

S liegt daher in diesem Falle in der Dreiecksfläche; ist z. B. $m = n = 1/4$, so geht die linke Seite der Gl. (2') in die Einheit über; der Teilungspunkt S fällt in die Seite c.

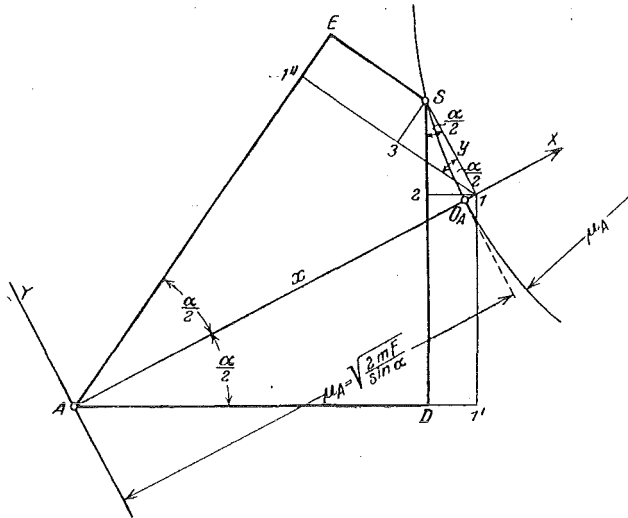


Abb. 2.

Solange S außerhalb liegt, läßt sich die Lösung der gestellten Aufgabe unmittelbar anschreiben; umständlicher ist sie, wenn S ins Dreieck fällt. Nachstehend soll eine einfache und unseres Wissens noch nicht bekannte Konstruktion zur Aufsuchung von S angegeben werden, die rasch und mit beliebig großer Genauigkeit zum Ziele führt.

In Abb. 2 ist durch ADSE das aus dem Dreieck ABC (Abb. 3) herausgeschnittene Sehnenviereck, dessen Inhalt mF betragen möge, dargestellt. Wir legen durch den Eckpunkt A ein Achsenkreuz, dessen X-Achse mit der Halbierenden des Winkels α zusammenfällt und drücken die Fläche mF durch die Koordinaten x und y des Punktes S aus. Mit den Bezeichnungen der Abb. 2 erhält man:

$$mF = \frac{1}{2} \left(x \cos \frac{\alpha}{2} - y \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(x \sin \frac{\alpha}{2} + y \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(x \cos \frac{\alpha}{2} + y \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(x \sin \frac{\alpha}{2} - y \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

und nach Auswertung die überaus einfache, für Vermessungszwecke sehr geeignete Flächenformel für ein Sehnenviereck:

$$mF = \frac{1}{2} (x^2 - y^2) \sin \alpha \dots \dots \dots (3)^{*1}$$

*1) Der Umfang eines Sehnenviereckes läßt sich sofort aus:

$$U = 2x \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

berechnen; er ist nur von x und α abhängig.

Für F , Abb. 3, den entsprechenden Wert eingesetzt, entsteht:

$$m \frac{1}{2} b c \sin \alpha = \frac{1}{2} (x^2 - y^2) \sin \alpha$$

Mit der Abkürzung: $\mu_A = (m b c)^{1/2}$ folgt schließlich:

$$\frac{x^2}{\mu_A^2} - \frac{y^2}{\mu_A^2} = 1 \dots \dots \dots (4)$$

d. h. der geometrische Ort aller Punkte S gleichflächiger Sehnenvierecke ist eine gleichseitige Hyperbel mit den Achsen μ_A ; der Halbmesser des durch O_A gehenden Scheitelkrümmungskreises hat dieselbe Größe μ_A ; der Krümmungsmittelpunkt T_A (Abb. 3) steht somit vom Ursprung A um $2 \mu_A$ ab.

Ist nun ein Dreieck im Sinne der eingangs gestellten Aufgabe zu teilen, so braucht man nur von den drei Hyperbeln, die alle die Form Gl. (4) haben und deren Achsen der Reihe nach:

$$\mu_A = (m b c)^{1/2}, \mu_B = (n a c)^{1/2}, \mu_C = [(1 - m - n) a b]^{1/2}$$

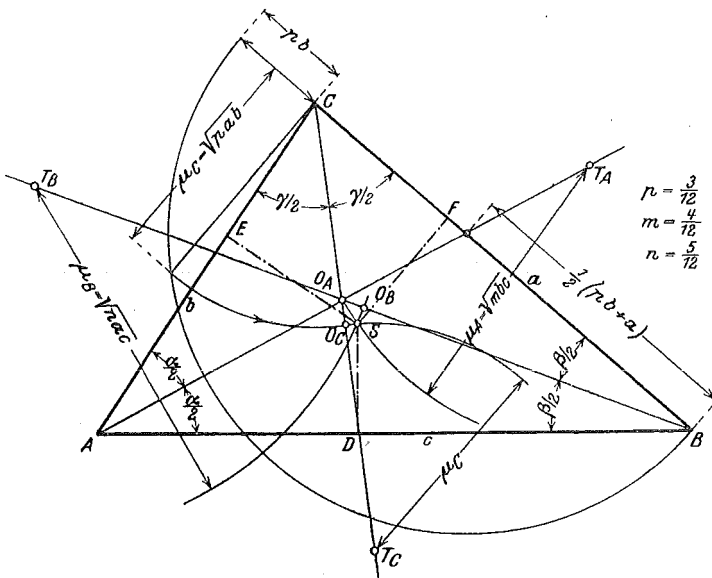


Abb. 3.

sind, zwei zum Schnitt zu bringen; da aber der gemeinsame Schnittpunkt S in der Nähe der Hyperbelscheitel O_A, O_B, O_C liegt, Abb. 3, kann man sich vielfach die Konstruktion der Hyperbeläste ersparen und unmittelbar mit den drei Scheitelkrümmungshalbmessern arbeiten; die Lage von S ergibt sich auch hier mit weitreichender Genauigkeit, allenfalls durch Zwischenschaltung von S in das sich etwa ergebende differentiale Fehlerdreieck. Die zeichnerische Bestimmung eines μ -Wertes ist aus der Abb. 3 ohne weiteres zu ersehen, der

auch die konstruktive Festlegung von S entnommen werden kann (Fehlerdreieck konstruktiv = Null). Dem in Abb. 3 dargestellten Beispiel wurden $m = 4/12$, $n = 5/12$ und $p = 3/12$ zugrunde gelegt. Um die Darstellung nicht unübersichtlich zu machen, wurde darin nur die Konstruktion von μ_C zur Darstellung gebracht, SD , SE und SF sind die gesuchten Teilungslinien.

Zur Bestimmung der Ortungszahlen bei der Schachtlotung.

Von Dr.-Ing. Th. K a p p e s:

Beobachtet man bei der Schachtlotung eine ungerade Anzahl von aufeinander folgenden Lotumkehrungen, so erhält man die Ortungszahl nach der von K o h l r a u s c h*) angegebenen Regel, indem man das arithmetische Mittel aus dem Mittel der Ablesungen links und dem Mittel der Ablesungen rechts bildet. B a s c h**) hat gezeigt, daß diese Regel auch den Gesetzen der Methode der kleinsten Quadrate genügt. Er erhält bei einer ungeraden Anzahl von n Umkehrbeobachtungen l_i ($i = 1, \dots, n$) für die Ortungszahl a die Formel

$$a = \frac{1}{n^2 - 1} \left[\left(n + (-1)^i \right) l_i \right]_1^n \dots \dots \dots (1)$$

und in vereinfachter Form

$$a = \frac{1}{2} (M_L + M_R), \dots \dots \dots (2)$$

worin M_L das Mittel der Umkehrungen links und M_R das Mittel der Umkehrungen rechts bedeutet.

Unter der Annahme, daß die Amplituden einer Schwingungsreihe um einen konstanten Betrag c abnehmen, entwickelt Basch für c die Formel

$$c = \frac{6}{n(n^2 - 1)} \left[(n - 2i + 1) (-1)^i l_i \right]_1^n \dots \dots \dots (3)$$

Für die entsprechenden Werte bei gerader Anzahl von Umkehrbeobachtungen erhält Basch

$$a = \frac{1}{n(n^2 - 4)} \left[\left\{ n^2 - 1 + 3(n - 2i + 1) (-1)^i \right\} l_i \right]_1^n \dots \dots (4)$$

$$c = \frac{6}{n(n^2 - 4)} \left[\left\{ (n - 2i + 1) (-1)^i + 1 \right\} l_i \right]_1^n \dots \dots \dots (5)$$

In der neueren Markscheiderliteratur findet sich gelegentlich die Meinung, daß auch bei gerader Anzahl von Umkehrbeobachtungen die Regel von Kohlrausch zur Berechnung der Ortung benützt werden könne. Diese Meinung ist irrig, wie sich leicht beweisen läßt.

*) K o h l r a u s c h, Lehrbuch d. prakt. Physik 1901, Seite 48.

**) B a s c h, Zur Analyse schwach gedämpfter Schwingungen; Sitzungsberichte der math.-nat. Kl. d. Kais. Akad. d. W., CXXIII. Bd. Abt. IIa, Wien 1914; vgl. auch die Besprechung dieser Arbeit von P. W i l s k i in Mitt. a. d. M. 1917, Seite 163.