

Paper-ID: VGI_193215



Eine Hyperbeltafel zur Beurteilung der Fehlerfortpflanzung in Dreiecken und Dreiecksketten

Franz Aubell ¹

¹ *Leoben*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **30** (5–6), S. 87–92

1932

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Aubell_VGI_193215,  
  Title = {Eine Hyperbeltafel zur Beurteilung der Fehlerfortpflanzung in  
    Dreiecken und Dreiecksketten},  
  Author = {Aubell, Franz},  
  Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {87--92},  
  Number = {5--6},  
  Year = {1932},  
  Volume = {30}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

ORGAN

des

ÖSTERREICHISCHEN VEREINS FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Redaktion:

Hofrat Prof. Dr. Dr. Dr. h. c. E. Doležal und o. ö. Professor Ing. Dr. H. Rohrer.

Nr. 5/6.

Baden bei Wien, im Dezember 1932.

XXX. Jahrg.

Eine Hyperbeltafel zur Beurteilung der Fehlerfortpflanzung in Dreiecken und Dreiecksketten.

Von Prof. Dr. F. A u b e l l, Leoben.

Die Verwendung und die Zweckmäßigkeit graphischer Rechentafeln (Nomogramme) zeigt sich, wie überhaupt in technischen Fächern, so auch im Vermessungswesen, wie eine Reihe von Beispielen zeigt, als welche u. a. genannt seien: Die Hilfstafel Hammers für barometrische Höhenmessung, die zahlreicher graphischen Hilfsmittel für tachymetrische Berechnungen (u. a. die Diagramme von Teischinger und Puller), die der Flächenberechnung dienenden graphischen Hilfstafeln (z. B. Kloth's Hyperbeltafel, die Profilmäßigstäbe), die Eggert-Kreisel'sche Hilfstafel zur Berechnung der Richtungskoeffizienten, das Diagramm von Horsky usw. Anlässlich der Besprechung von Werkmeisters Schrift „Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomographie)“ Berlin 1923 faßt Doležal in Nr. 1/2 der „Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen“ 1924 seine Beurteilung über den Wert solcher Tafeln dahin zusammen, daß sie bestimmt sind, „den Techniker, der mehr oder weniger komplizierte, sich oft wiederholende Rechnungen zu erledigen hat, zu entlasten“, „daß sie zur Vereinfachung und Konzentration der Geistesarbeit des Technikers beitragen“, und die Vorteile graphischer Rechentafeln gegenüber numerischen schildert in dem genannten Werke Werkmeister: „Sie bestehen insbesondere in der Einfachheit und Schnelligkeit beim Ermitteln der gesuchten Werte und in der Möglichkeit der Verwendung auch bei Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen“ und „in der für viele Aufgaben ausreichenden Genauigkeit“.

Im folgenden wird eine derartige graphische Rechentafel für die einfache Fehlerfortpflanzungsbeziehung einer nach dem Sinussatz berechneten Dreiecksseite angegeben, welche zu eigenartigen Feststellungen hinsichtlich des Einflusses der Dreiecksform auf die Fehlerfortpflanzung führt. Es ist bekanntlich für eine Seite

$$b = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta$$

deren nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetze berechneter mittlerer Fehler (der „Übertragungsfehler“):

$$m_b^2 = b^2 \left[\left(\frac{m_a}{a} \right)^2 + \widehat{m}_\alpha^2 \cdot \text{ctg}^2 \alpha + \widehat{m}_\beta^2 \cdot \text{ctg}^2 \beta \right],$$

worin m_a den mittleren Fehler der Seite a , \widehat{m}_α und \widehat{m}_β die mittleren Fehler der Winkel α und β , letztere im analytischen oder Bogenmaße bedeuten. Unter Voraussetzung gleich genau gemessener Winkel und unter der Annahme, daß entweder die Seite a fehlerfrei vorliege oder deren Fehlereinfluß gegenüber jenem der Winkelmessung von untergeordneter Bedeutung sei, erhält die obige Beziehung die folgende vereinfachte Form:

$$m_b^2 = b^2 \widehat{m}_w^2 \cdot (\text{ctg}^2 \alpha + \text{ctg}^2 \beta) \text{ oder}$$

$$m_b = b \cdot \widehat{m}_w \cdot \sqrt{\text{ctg}^2 \alpha + \text{ctg}^2 \beta}$$

(Man vergleiche hiezu: Jordan III 1916 S. 143, wo diese Beziehung für den Fall erweitert wurde, daß auch der dritte Dreieckswinkel als gemessen in Berücksichtigung gezogen ist). Das Verhältnis

$$\frac{m_b}{b} = \widehat{m}_w \cdot \sqrt{\text{ctg}^2 \alpha + \text{ctg}^2 \beta}$$

stellt den mittleren Fehler der Längeneinheit oder den „relativen mittleren Fehler“ von b vor. In diesem Ausdrucke kommt wegen der in ihm enthaltenen Winkel die Abhängigkeit des mittleren Fehlers von der Form des Dreieckes zum Ausdruck und es wäre zunächst festzustellen, daß die Fehlerübertragung umso günstiger wird, je größer die Winkel α und β sind.

Es soll nun die Frage beantwortet werden, welche Dreiecksformen dieselbe Fehlerfortpflanzung erwarten lassen. Zu diesem Zwecke hat man

$$\text{ctg}^2 \alpha + \text{ctg}^2 \beta = \text{konst.} = k$$

zu setzen und diese Kurve zu diskutieren. Man gelangt zur Polargleichung der Kurve, indem man mit r als Polstrahl und α als dessen Richtung setzt:

$$r = c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{c}{\sin \alpha \text{ctg} \beta + \cos \alpha}$$

$$= \frac{c}{\sin \alpha \sqrt{k - \text{ctg}^2 \alpha} + \cos \alpha}$$

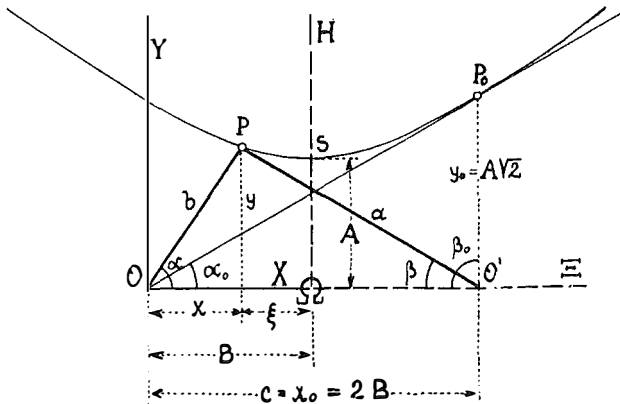


Abbildung 1.

Um von Polar- zu rechtwinkligen Koordinaten zu gelangen, hat man einzusetzen:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$$

Es wird dann

$$r = \frac{c}{\frac{y}{r} \sqrt{k - \frac{x^2}{y^2}} + \frac{x}{r}}$$

und es folgt die Kartesische Gleichung der Kurve:

$$k y^2 - 2x^2 + 2cx - c^2 = 0$$

Die Diskriminante dieses Kegelschnittes $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = -2k < 0$ läßt erkennen, daß man es mit einer Hyperbel zu tun hat, deren Mittelpunktsgleichung bezüglich Ω erhalten wird, wenn man $\xi = x - \frac{c}{2}$ setzt:

$$k y^2 - 2\xi^2 - \frac{c^2}{2} = 0.$$

Die Übereinstimmung mit der folgenden Form der Hyperbelgleichung:

$$\frac{y^2}{A^2} - \frac{\xi^2}{B^2} - 1 = 0$$

wird herbeigeführt durch die Werte

$$A = \frac{c}{\sqrt{2k}} \quad \text{und} \quad B = \frac{c}{2}$$

und es liefert

$$k = 2 \left(\frac{B}{A} \right)^2 = \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta$$

die Gleichung der Hyperbel in biangularen oder bipolaren Koordinaten*).

Es liegen somit die durch die Seiten a und b gebildeten Spitzen von Dreiecken gleicher relativer Fehlerfortpflanzung auf einer Hyperbel, die durch den zugehörigen Wert für k gekennzeichnet ist. Denkt man sich über einer Seite c für verschiedene k -Werte die betreffenden Hyperbeln, die somit eine gemeinsame kleine Achse $\frac{c}{2}$ besitzen, entworfen, so erhält man eine Schar von Hyperbeln, welche, wie dies in Abbildung 2 (siehe Seite 6) zum Ausdruck gebracht ist, am zweckmäßigsten nach k beziffert werden.

Für die Konstruktion der Hyperbeln, insbesondere bei deren flüchtigem Entwurfe, kommen außer den Asymptoten noch die durch den Pol 0 gehenden Tangenten und deren Berührungspunkte in Betracht, welche letztere bei allen

*) Der einzige Literaturhinweis darüber dürfte sein: W. Walton, On Biangular Coordinates in „Jahrb. d. Fortschr. d. Mathematik“, Jahrg. 1868 (herausgegeben 1871). Prof. A. Walter (Leoben) hat die Untersuchung erweitert und nachgewiesen, daß die allgemeine Beziehung

$$P \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha + Q \cdot \operatorname{ctg}^2 \beta = 1$$

einen Kegelschnitt vorstellt, und zwar kennzeichnet

$$P + Q \geq 0 \text{ einen zentrischen, } (P + Q > 0 \text{ eine Hyperbel}$$

$$P + Q < 0 \text{ eine Ellipse)}$$

$$P + Q = 0 \text{ einen nicht zentrischen (Parabel).}$$

diesen Hyperbeln auf einer durch O' hindurchgehenden, zu c senkrechten Geraden liegen *) und eine Abszisse $y_0 = A \sqrt{2}$ aufweisen. Aus der allgemeinen Polargleichung

$$r = \frac{c}{\sin \alpha \sqrt{k - \operatorname{ctg}^2 \alpha} + \cos \alpha}$$

ist nämlich zu ersehen, daß für r nur solange reelle Werte erhalten werden, als $k > \operatorname{ctg}^2 \alpha$. Den Grenzwert bildet $k = \operatorname{ctg}^2 \alpha_0$, welcher den Richtungswinkel α_0 der Tangente durch O liefert. Es muß dann für den Berührungspunkt dieser Tangente $\operatorname{ctg} \beta_0 = 0$ oder $\beta_0 = 90^\circ$ sein, die dem Berührungspunkte zukommende Abszisse ist daher $x_0 = c = 2B$, oder $\xi_0 = \frac{1}{2}c$, dessen Ordinate $y_0 = x_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 = A \sqrt{2}$.

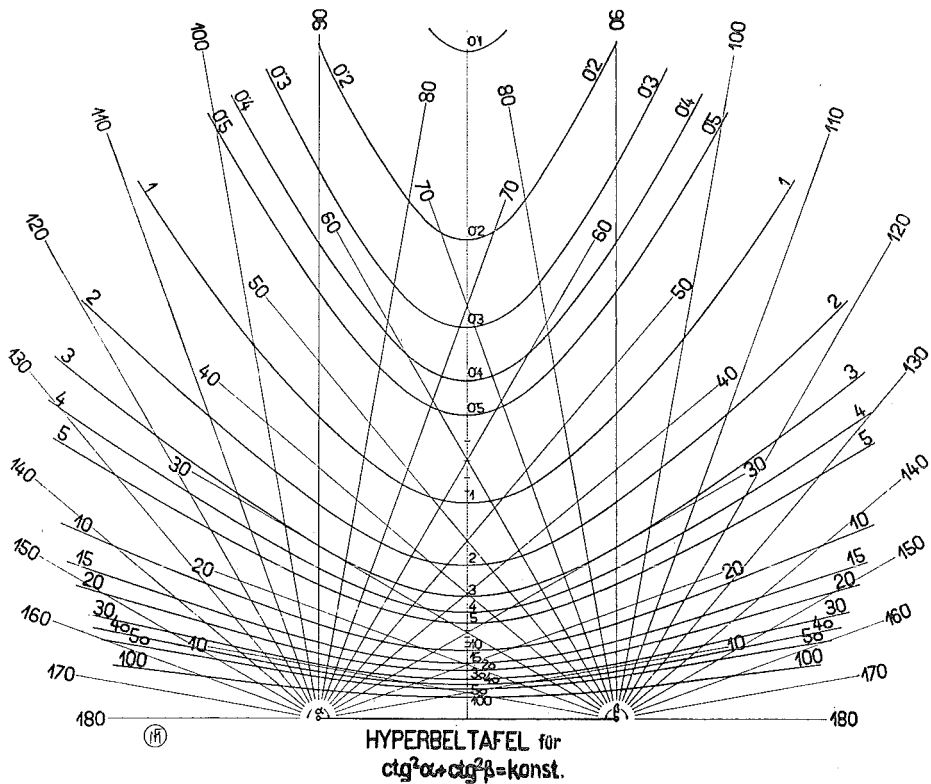


Abbildung 2.

Die in Abbildung 2 dargestellte Hyperbeltafel läßt nicht nur erkennen, welche Dreiecksformen dieselbe Fehlerfortpflanzung aufweisen und für welche Dreiecksformen die Fehlerfortpflanzung je nach der Größe des k -Wertes günstig oder ungünstig ist, sondern sie ermöglicht auch auf Grund der an-

*) Man vergleiche hiezu den Satz: „Hat man ein System von Ellipsen, bzw. Hyperbeln, welche eine Hauptachse gemeinschaftlich haben, so schneiden sich alle Tangenten, welche auf dieser Achse dieselbe Koordinate für den Berührungspunkt haben, in einem und demselben Punkt der gemeinschaftlichen Achse.“

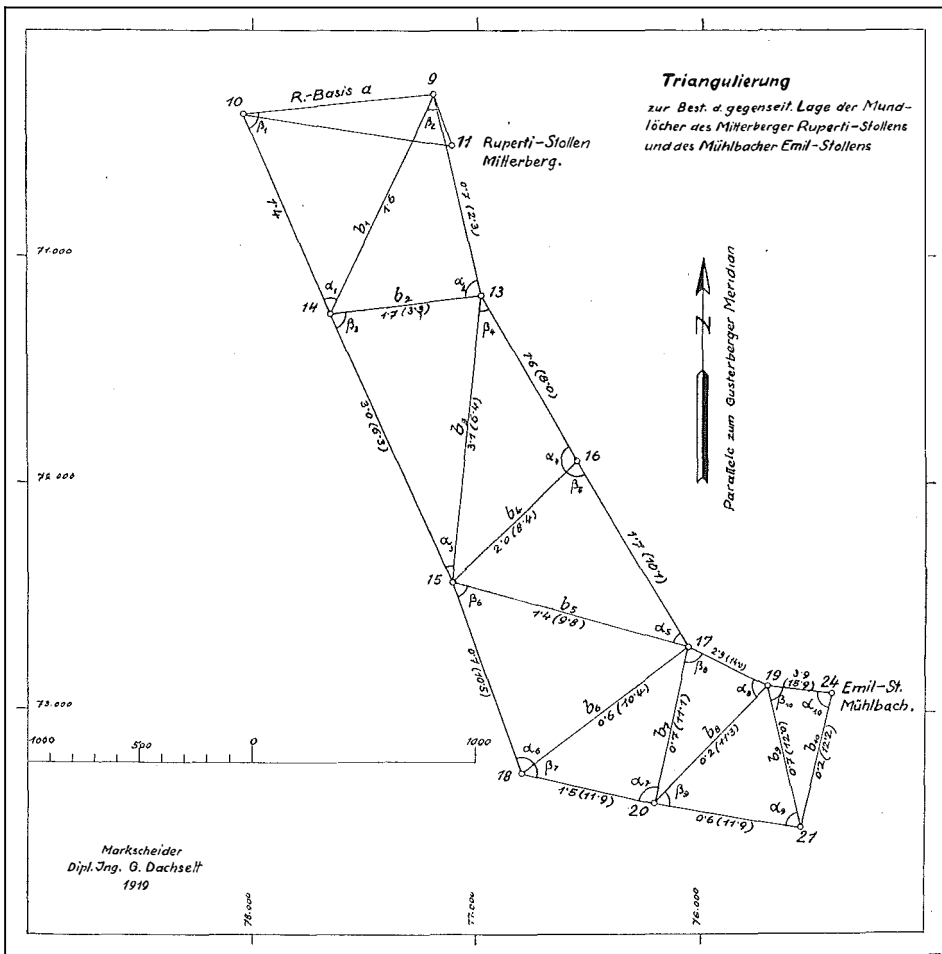


Abbildung 3.

geschriebenen Werte von k eine rasche, am besten mit dem Rechenschieber durchzuführende Auswertung des mittleren Fehlers

$$m_b = b \cdot \overline{m_w} \cdot \sqrt{k}.$$

Ist der Einfluß des mittleren Fehlers der Seite a außerdem zu berücksichtigen, dann ist

$$m_b = b \cdot \sqrt{\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 + \overline{m_w}^2 \cdot k}$$

zu rechnen.

Es läßt sich weiters feststellen, welcher Weg der Berechnung einer Dreiecksseite der günstigste ist, wenn diese aus mehreren Dreiecken gerechnet werden kann. Die Gewichte solcher Seiten erscheinen durch den reziproken Tafelwert $\frac{1}{k}$ ausdrückbar.

Wichtig ist ferner die Anwendung des Diagramms zur Ermittlung der Fehlerfortpflanzung in Dreiecksketten. Für jede Dreiecksseite kann

der zugehörige k -Wert, gewissermaßen als ihre charakteristische Ziffer, aus der Tafel entnommen werden. Da für eine beliebige Seite

$$b_n = a \cdot \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \dots \sin \beta_n}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_n}$$

deren mittlerer Fehler sich durch

$$m_{b_n} = b_n \cdot \widehat{m_w} \cdot \sqrt{[\text{ctg}^2 \alpha + \text{ctg}^2 \beta]} = b_n \cdot \widehat{m_w} \cdot \sqrt{[k]}$$

ausdrücken läßt (man vergleiche hierzu die von Jordan a. a. O. S. 144 gegebene Verallgemeinerung), so kann man die Addition $[k]$ mit den in der Tafel gefundenen Werten vornehmen.

Als ein geeignetes Anwendungsbeispiel sei eine Dreiecksvermessung angeführt, welche im Mitterberger Kupferkiesbau vom Markscheider Dipl.-Ing. G. Dachzelt 1919 zwecks Bestimmung der gegenseitigen Lagebeziehungen zweier Stollenmundlöcher in einem Vermessungsgelände von Hochgebirgscharakter durchgeführt wurde (Abb. 3). An eine Rechnungsbasis a wurde eine aus zehn Dreiecken bestehende Kette angeschlossen. In jedem Dreiecke wurden alle drei Winkel gemessen und es konnte aus dem durchschnittlichen Werte des Dreieckswiderspruches als mittlerer Fehler eines verbesserten Winkels der Betrag von $\pm 5''$ angenommen werden. Die Fehlerübertragung wurde für jede Seite nach der oben angegebenen Beziehung mit Hilfe der Hyperbeltafel ausgemittelt, wenngleich wegen der Messung des dritten Dreieckswinkels nach Jordan (a. a. O.) richtiger mit

$$m_{b_n} = b_n \cdot \widehat{m_w} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} ([\text{ctg}^2 \alpha] + [\text{ctg}^2 \beta] + [\text{ctg} \alpha \cdot \text{ctg} \beta])}$$

zu rechnen gewesen wäre. In der tabellarischen Zusammenstellung und in der Triangulierungs-Skizze sind für jede Seite die k - und $[k]$ -Werte, in der Tabelle außerdem die mittleren Fehler der Seiten, sofern sie nur in der Winkelmessung ihre Ursache haben, und die mittleren Fehler der Längeneinheit (rel. mittl. Fehler) eingetragen. Letztere lassen, wie es ja selbstverständlich ist, von Dreieck zu Dreieck ein langsames Wachsen erkennen.

| n | Auf Minuten abgerundete Winkel | | k | $[k]$ | b auf 10 m abgerundet | m_b | $\frac{m_b}{b}$ 1 : |
|-----|--------------------------------|---------|-----|-------|-------------------------------|-----------|------------------------|
| | α | β | | | | | |
| 1 | 48° 43' | 51° 39' | 1·6 | 1·6 | 1060 m | 0·033 m | 32.600 |
| 2 | 83 49 | 37 59 | 1·7 | 3·3 | 670 | 0·030 | 22.700 |
| 3 | 30 15 | 71 50 | 3·1 | 6·4 | 1250 | 0·077 | 16.300 |
| 4 | 104 14 | 35 59 | 2·0 | 8·4 | 760 | 0·053 | 14.200 |
| 5 | 43 8 | 77 5 | 1·4 | 9·8 | 1100 | 0·083 | 13.200 |
| 6 | 72 48 | 54 40 | 0·6 | 10·4 | 930 | 0·073 | 12.800 |
| 7 | 89 51 | 49 43 | 0·7 | 11·1 | 700 | 0·057 | 12.400 |
| 8 | 71 58 | 76 59 | 0·2 | 11·3 | 720 | 0·059 | 12.300 |
| 9 | 67 0 | 55 17 | 0·7 | 12·0 | 640 | 0·054 | 11.900 |
| 10 | 85 23 | 67 37 | 0·2 | 12·2 | 610 | 0·052 | 11.800 |

Anmerkung der Redaktion. Der vorliegende Fachaufsatz war der Schriftleitung als Beitrag für die Doležal-Festschrift angemeldet worden, doch konnte er in dieser nicht mehr Aufnahme finden, da er erst nach Redaktionsschluß einlangte.