Paper-ID: VGI_193216

Bestimmung des kürzesten Abstandes zweier sich kreuzender Geraden

Franz Aubell [1]

[1] *Leoben*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **30** (5–6), S. 93–97

1932

BibTeX:

```
@ARTICLE{Aubell_VGI_193216,
Title = {Bestimmung des k{\"u}rzesten Abstandes zweier sich kreuzender Geraden
   },
Author = {Aubell, Franz},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {93--97},
Number = {5--6},
Year = {1932},
Volume = {30}
}
```

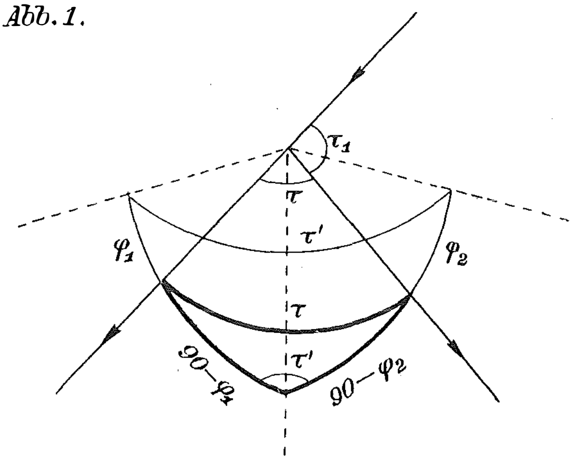
Bestimmung des kürzesten Abstandes zweier sich kreuzender Geraden.

Von Prof. Dr. F. A u b e l l, Leoben.

Über die rechnerische Bestimmung des kürzesten Abstandes zweier windschiefer Geraden liegen verschiedene Lösungen vor. Man vergleiche hiezu: A. Klingatsch, Österr. Zeitschr. f. Verm. 1920, ferner die Lösung des Verfassers ebenda 1921, A. Hornoch, Neue Gesichtspunkte zur rechnerischen Lösung der Markscheideraufgaben, Berg- u. hüttenmänn. Jahrbuch der Mont. Hochschule Leoben 1925 (wiedergegeben in Wilski, Markscheidekunde Bd. I, S. 216).

Im folgenden wird eine Lösung dieser für den Markscheider wichtigen Aufgabe angegeben, die durch ihre Kürze gekennzeichnet ist und auf die Lage des kürzesten Abstandes insofern Schlüsse zu ziehen gestattet, als sie erkennen läßt, in welchem der durch die Grundrißlagen der zwei sich kreuzenden Geraden gebildeten vier Winkelflächen der kürzeste Abstand gelegen ist.

Abb. 1.



Zusammenhang eines räumlichen Winkels τ mit seiner Grundrißprojektion τ'.

Es sei vorausgeschickt, daß der Zusammenhang zwischen einem räumlichen Winkel τ und dessen Grundrißprojektion τ', wenn φ_1 und φ_2 die Tonlagswinkel der Winkelschenkel sind, durch die Gleichung gegeben ist:

$$\cos \tau = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \tau'.$$

Diese Anschreibung gilt, wenn die Gefällspfeile der zwei Winkelschenkel bezüglich des Winkelscheitels gleichsinnig gerichtet sind, d. h. beide Gefällspfeile zum oder vom Scheitel weisen. Sind die Gefällspfeile der zwei Schenkel ungleichsinnig, wie dies in der Abbildung 1 beim Winkel τ_1 zutrifft, so erhält das Sinusprodukt das negative Vorzeichen, da dann auch die Tonlagswinkel ungleichartige Vorzeichen tragen:

$$\cos \tau_1 = - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \tau'_1.$$

Wendet man dieses Ergebnis auf einen räumlichen rechten Winkel an, so daß $\tau = 90^0$ wird, dann folgt für dessen Grundrißprojektion τ' die Beziehung $\cos \tau' = \mp \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2$, in welcher das obere Vorzeichen für rechte Winkel mit gleichsinnigen, das untere für solche mit ungleichsinnigen Gefällspfeilen der Winkelschenkel gilt, was besagt, daß die Grundrißprojektion eines rechten Winkels mit gleichsinnigen Gefällspfeilen stets größer als 90^0, mit ungleichsinnigen stets kleiner als 90^0 ist.

Es lassen sich nun folgende Sätze aufstellen:

1. Der Gefällspfeil des kürzesten Abstandes ergibt sich aus der Erscheinung, daß sich die kürzeste Verbindungsstrecke stets nach jener Geraden senkt, welche an der Stelle der grundrißlichen Überkreuzung die tiefere ist.

2. Da der kürzeste Abstand zu den zwei Geraden senkrecht steht, müssen im Grundriß in dem durch die zwei Geraden und den kürzesten Abstand gebildeten Dreiecke zwei Dreieckswinkel (α und β, Abbildung 2 und 3) die Grundrißprojektionen von rechten Winkeln sein. Nach dem Früheren ist diese Grundrißprojektion bei gleichsinnigem Gefällspfeil der Winkelschenkel größer als 90^0, bei ungleichsinnigem kleiner als 90^0.

Durch Zusammenfassung dieser zwei Sätze ergibt sich die Beantwortung der Frage, in welchem der im Grundriß als Winkelflächen erscheinenden vier Räume der kürzeste Abstand gelegen ist:

3. a) Ist der gleiche Umfahrungssinn der Gefällspfeile in dem durch die zwei Geraden und den kürzesten Abstand gebildeten Grundrißdreiecke im Raume des spitzen Winkels zu finden, so liegt in dessen Raum die kürzeste Verbindung (Abbildung 2). Da im vorliegenden Falle die Gefällspfeile der Schenkel des rechten Winkels ungleichsinnig sind, sind die Winkel α und β kleiner als 90^0. Die hier bestehenden mathematischen Beziehungen, die zur Berechnung von α und β führen, sind im Folgenden angegeben. Es bedeuten dabei φ_1 und φ_2 die Tonlagswinkel der gegebenen Geraden, φ die Tonlage des kürzesten Abstandes, γ den Grundrißwinkel zwischen den zwei Geraden in jenem Dreiecke, das den gleichen Umfahrungssinn der Gefällspfeile aufweist.

Aus $\cos \alpha = \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi$ und

$\cos \beta = \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi$ erfolgt die Ausscheidung von φ durch

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1}.$$

Durch Weiterentwicklung des Verhältnisses

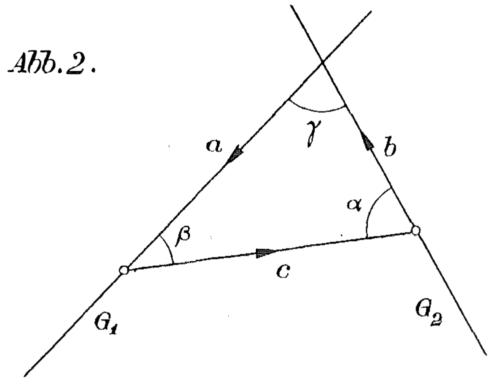
$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 + \operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}$$

kommt man zu dem Ergebnis

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2},$$

zu welchem als zweite Gleichung $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90 - \frac{\gamma}{2}$ hinzukommt.

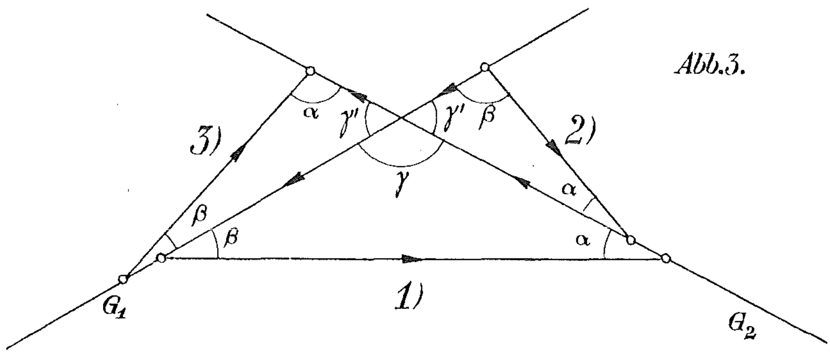
Es ist $\frac{\alpha - \beta}{2} \gtrless 0$, je nachdem $\varphi_1 \gtrless \varphi_2$.



Die Gerade G_1 liege im Überkreuzungspunkte höher als G_2. Der kürzeste Abstand senkt sich daher von G_1 zu G_2. $\gamma < 90^0$. $\alpha < 90^0$, $\beta < 90^0$.

b) Zeigt sich der gleiche Umfahrungssinn der Gefällspfeile im Raume des stumpfen Winkels, so bestehen für die Lage des kürzesten Abstandes drei Möglichkeiten, von welchen nur eine der richtigen Lösung entspricht: Diese drei Möglichkeiten sind (Abbildung 3):

1) α ist spitz, β ist spitz;
2) α ist spitz, β ist stumpf;
3) α ist stumpf, β ist spitz.



Die Gerade G_1 liege im Überkreuzungspunkte höher als G_2. Der kürzeste Abstand senkt sich von G_1 zu G_2. $\gamma > 90^0$.

1) $\alpha < 90^0$, $\beta < 90^0$
2) $\alpha < 90^0$, $\beta > 90^0$
3) $\alpha > 90^0$, $\beta < 90^0$

(Die gleichen Winkelbezeichnungen α und β in den drei Dreiecken bedeuten hier nicht die Gleichheit, sondern die Gleichartigkeit der Winkel.)

Welcher von diesen drei Fällen vorliegt, kann auf Grund der folgenden Überlegungen festgestellt werden. Es gelten die mathematischen Beziehungen:

Fall 1) $\alpha \gtrless \beta$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$; dabei ist

$\frac{\alpha - \beta}{2} \gtrless 0$, je nachdem $\varphi_1 \gtrless \varphi_2$.

Fall 2) $\alpha < \beta$; wegen $\beta > 90^0$ wird in Anlehnung an die bei a) angeführte Herleitung $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}{\sin(\varphi_1-\varphi_2)} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma'}{2}$, wobei $\gamma' = 180 - \gamma$.

Da $\frac{\alpha-\beta}{2} < 0$ sein muß, ist dieser Fall nur möglich, wenn $\varphi_1 < \varphi_2$.

Fall 3) $\alpha > \beta$; wegen $\alpha > 90^0$ wird $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}{\sin(\varphi_1-\varphi_2)} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma'}{2}$.

Da $\frac{\alpha-\beta}{2} > 0$ sein muß, tritt dieser Fall nur bei $\varphi_1 > \varphi_2$ ein.

Danach sind bei $\varphi_1 > \varphi_2$ nur die Fälle 1) und 3) mit $\frac{\alpha-\beta}{2} > 0$, bei $\varphi_1 < \varphi_2$ nur die Fälle 1) und 2) mit $\frac{\alpha-\beta}{2} < 0$ denkbar. Von diesen zwei Möglichkeiten trifft jene zu, welche der Bedingung $\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right| < \frac{\alpha+\beta}{2}$ genügt.

Da wegen $\operatorname{tg}\frac{\gamma'}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ die rechten Seiten der Gleichungen von 2) und 3) reziprok jener von 1) sind, ist

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\bigg|_{1)} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}\bigg|_{2)\,3)},$$

woraus folgt, daß nur eine einzige Berechnung durchzuführen ist: man hat, wenn der erhaltene Wert von $\frac{\alpha-\beta}{2}$ der Bedingung $\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right| < \frac{\alpha+\beta}{2}$ nicht entspricht, das Komplement zum errechneten Wert von $\frac{\alpha-\beta}{2}$ zu nehmen, in welchem Falle aber auch für $\frac{\alpha+\beta}{2}$ das Komplement in Rechnung zu setzen ist.

Unter Zugrundelegung der Abbildung 3 seien für die Fälle von b) zwei Beispiele gebracht.

Beispiel 1. $\varphi_1 = 10^0$, $\varphi_2 = 20^0$, $\gamma = 110^0$.

Da hier $\varphi_1 < \varphi_2$ und demzufolge $\frac{\alpha-\beta}{2} < 0$ ist, können nur die Fälle 1) oder 2) vorliegen. Die Berechnung nach 1) mit

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\sin(\varphi_1+\varphi_2)} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

liefert den Wert $\frac{\alpha-\beta}{2} = -26^0\,22'\,52''$, welcher gegenüber $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90 - \frac{\gamma}{2} = 35^0$ der Bedingung $\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right| < \frac{\alpha+\beta}{2}$ entspricht und daher den richtigen Wert vorstellt.

Beispiel 2. $\varphi_1 = 20^0$, $\varphi_2 = 10^0$, $\gamma = 130^0$.

Hier sind wegen $\varphi_1 > \varphi_2$ und daher $\frac{\alpha-\beta}{2} > 0$ nur die Fälle 1) und 3) möglich. Rechnet man wieder gemäß Fall 1) nach der obigen Beziehung $\frac{\alpha-\beta}{2} = +36^0\,40'\,41''$, so erfüllt dieser Wert in Gegenüberstellung zu $\frac{\alpha+\beta}{2} = 25^0$ die angegebene Bedingung nicht, weshalb der Fall 3) vorliegt und die Winkel α und β aus den Komplementen dieser Werte, d. i. aus $\frac{\alpha - \beta}{2} = + 53^0 19' 19''$ und $\frac{\alpha + \beta}{2} = 65^0$ zu rechnen sind.

Sind die Winkelberechnungen erledigt, dann ergeben sich die Anschlagspunkte der kürzesten Verbindung mit Hilfe deren söhliger Abstände a (auf G_1) und b (auf G_2) vom Überkreuzungspunkte (vgl. Abb. 2) und 3), welche dann nur mehr von der in diesem zwischen den zwei Geraden liegenden Teufe $t_{1,2}$ abhängen, da die Höhenbeziehung besteht:

$\pm a \operatorname{tg} \varphi_1 + c \operatorname{tg} \varphi \pm b \operatorname{tg} \varphi_2 = t_{1,2}$, aus welcher nach Einsetzung von $a = \frac{c}{\sin \gamma} . \sin \alpha$ und $b = \frac{c}{\sin \gamma} . \sin \beta$ zunächst c und mit diesem a und b erhalten werden:

$$c = \frac{t_{1,2}}{\pm \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} . \operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi \pm \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} . \operatorname{tg} \varphi_2}.$$

Schnittberechnung mittels Sprossenrad-Doppelmaschinen.

Von Ing. Friedrich Schiffmann, Wien.

Die Berechnung des Schnittes zweier Geraden, wie sie hier im folgenden behandelt wird, stellt im wesentlichen keine andere Methode dar, als die der Berechnung von Vorwärtseinschnitten, wie sie Hofrat Ing. Morpurgo bereits im Band XXIII, Heft 4 dieser Zeitschrift beschrieben und auf das ausführlichste erläutert hat. Seither hat sich diese Rechenmethode bewährt, ist vielfach eingeführt und dem Bedürfnisse entsprechend haben nun fast schon alle Erzeuger von Sprossenradmaschinen Doppelmaschinen gebaut. Dies ist die Veranlassung, diesen Stoff in allgemeinerer Form wiederholend zu behandeln, auf wesentliche Vereinfachungen aufmerksam zu machen und eine leichte Änderung in der Bauart aller Rechenmaschinen anzuregen.

Die Festlegung der beiden zu schneidenden Geraden g_1 und g_2 ist durch ihre Richtungskoeffizienten $a_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ bzw. $a_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ und durch die Koordinaten je eines Punktes P_1 bzw. P_2 auszudrücken.

Nun wird auf g_1 der Punkt P_3 mit den Koordinaten $y_3 = y_1 + \triangle x_1 . a_1$ und $x_3 = x_2$ gesucht, worauf sich die Koordinaten des Schnittpunktes P durch Auflösung der Gleichungen

$$\triangle y_3 - \triangle y_2 = y_2 - y_3,$$
$$\triangle y_3 = \triangle x_2 . a_1 \quad \text{und}$$
$$\triangle y_2 = \triangle x_2 . a_2$$

ergeben.

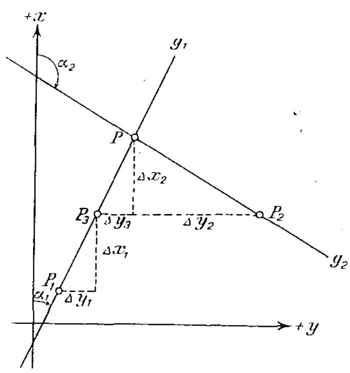


Abb. 1.