

Paper-ID: VGI_193301



Anwendung der Vektorrechnung auf die Snellius'sche Dreiecksaufgabe

Karl Walek ¹

¹ *Professor an der Mont. Hochschule in Sopron*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **31** (1), S. 1–10

1933

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Walek_VGI_193301,  
  Title = {Anwendung der Vektorrechnung auf die Snellius'sche Dreiecksaufgabe},  
  Author = {Walek, Karl},  
  Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {1--10},  
  Number = {1},  
  Year = {1933},  
  Volume = {31}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

ORGAN

des
ÖSTERREICHISCHEN VEREINS FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Redaktion:

Hofrat Prof. Dr. Dr. Dr. h. c. E. Doležal und o. ö. Professor Ing. Dr. H. Rohrer.

Nr. 1.

Baden bei Wien, im Februar 1933.

XXXI. Jahrg.

Anwendung der Vektorrechnung auf die Snellius'sche Dreiecksaufgabe.

Von Dr. Karl Walek, Professor an der Mont. Hochschule in Sopron.

In der „Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen“ ist das Snellius'sche oder Pothenot'sche Problem mittels Vektoren öfters behandelt worden. Die nachstehende Arbeit soll einen neuen Beitrag liefern zum Beweis für die Gebrauchs- und Anwendungsfähigkeit der Vektorrechnung bei praktischen Aufgaben. Diese Abhandlung bringt nebst einer sehr einfachen vektoralgebraischen Auflösung des genannten Problems auch eine vektoranalytische Lösung desselben, welche die Koordinaten des unbekanntes Punktes unmittelbar angibt.

Es sei noch bemerkt, daß in den folgenden Rechnungen die Bezeichnungen R. Schumann's angewendet wurden.

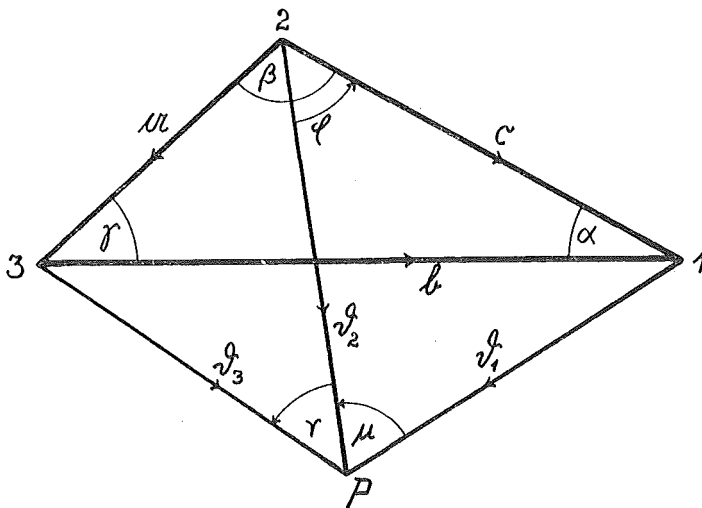


Abb. 1.

1. Vektoralgebraische Auflösung.

In Abb. 1 sind die Winkel μ und ν und das Dreieck 1, 2, 3 gegeben; P ist der unbekannte Punkt. Die Verbindungsgeraden des Punktes P mit 1, 2, 3 seien die in Pfeilrichtung genommenen Vektoren $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$. Die Seiten des gegebenen Dreiecks sind die Vektoren a, b, c , mit den absoluten Werten a, b, c .

Aus Dreieck $P 1, 2$ folgt:

$$\mathfrak{d}_2 = c + \mathfrak{d}_1$$

Multipliziert man diese Gleichung erst skalar, dann vektoriell mit \mathfrak{d}_2 , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{d}_2^2) &= (c \mathfrak{d}_2) + (\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2) \\ d_2^2 &= c d_2 \cos \varphi + d_1 d_2 \cos \mu \end{aligned}$$

und nach Division durch d_2

$$d_1 \cos \mu = d_2 - c \cos \varphi \dots \dots \dots (1)$$

Die vektorielle Multiplikation liefert:

$$[\mathfrak{d}_2^2] = [c \mathfrak{d}_2] + [\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2]$$

Da aber $[\mathfrak{d}_2^2] = 0$, folgt daraus

$$[\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2] = [\mathfrak{d}_2 c]$$

und indem man auf beiden Seiten auswertet und durch d_2 dividiert:

$$d_1 \sin \mu = c \sin \varphi \dots \dots \dots (2)$$

Teilt man (1) durch (2), so erhält man

$$\text{ctg } \mu = \frac{d_2 - c \cos \varphi}{c \sin \varphi}$$

und daraus

$$d_2 = c (\sin \varphi \text{ctg } \mu + \cos \varphi) \dots \dots \dots (3)$$

Dasselbe Verfahren wenden wir auf das Dreieck $P 2 3$ an:

$$\mathfrak{d}_2 = a + \mathfrak{d}_3$$

$$\begin{aligned} (\mathfrak{d}_2^2) &= (a \mathfrak{d}_2) + (\mathfrak{d}_3 \mathfrak{d}_2) & [\mathfrak{d}_2^2] &= [a \mathfrak{d}_2] + [\mathfrak{d}_3 \mathfrak{d}_2] \\ d_2^2 &= a d_2 \cos (\beta - \varphi) + d_3 d_2 \cos \nu & 0 &= a d_2 \sin (\beta - \varphi) - d_3 d_2 \sin \nu \\ d_3 \cos \nu &= d_2 - a \cos (\beta - \varphi) & d_3 \sin \nu &= a \sin (\beta - \varphi) \end{aligned}$$

$$\text{ctg } \nu = \frac{d_2 - a \cos (\beta - \varphi)}{a \sin (\beta - \varphi)}$$

$$d_2 = a (\sin (\beta - \varphi) \text{ctg } \nu + \cos (\beta - \varphi)) \dots \dots \dots (4)$$

Aus (3) und (4) folgt:

$$c (\sin \varphi \text{ctg } \mu + \cos \varphi) = a (\sin (\beta - \varphi) \text{ctg } \nu + \cos (\beta - \varphi))$$

Entwickelt man rechterseits und dividiert darauf durch $a \cos \varphi$, so ergibt sich

$$\frac{c}{a} (\text{tg } \varphi \text{ctg } \mu + 1) = \sin \beta \text{ctg } \nu - \cos \beta \text{tg } \varphi \text{ctg } \nu + \cos \beta + \sin \beta \text{tg } \varphi$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{\sin \beta \text{ctg } \nu + \cos \beta - \frac{c}{a}}{\cos \beta \text{ctg } \nu - \sin \beta + \frac{c}{a} \text{ctg } \mu} \dots \dots \dots (5)$$

oder

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin (\beta + \nu) - \frac{c}{a} \sin \nu}{\cos (\beta + \nu) + \frac{c}{a} \frac{\sin \nu}{\operatorname{tg} \mu}} \quad (6)$$

Diese Formel ist zwar für logarithmische Rechnung nicht geeignet, sie wird aber bei Anwendung der heutzutage schon allgemein verbreiteten Rechenmaschine praktisch brauchbar. Sie drückt φ durch die beiden Seiten a , c und den Winkel β explicite aus; β ist der beim mittleren Punkte liegende Winkel, und zwar bedeutet β immer den dem Punkte P zugewandten Winkel. Wenn daher das Viereck $P 1 2 3$ nicht konvex ist, sondern bei P eine einspringende Ecke hat, dann wird β überstumpf, die Formel bleibt aber auch in diesem Falle gültig.

Hat man φ gewonnen, so erhält man d_2 aus (3)

$$d_2 = c (\sin \varphi \operatorname{ctg} \mu + \cos \varphi) = c \frac{\sin (\varphi + \mu)}{\sin \mu} \quad (7)$$

Liegt P mit 1, 2, 3 auf einem Kreise, dem sogenannten „gefährlichen Kreise“, dann ist die Aufgabe unlösbar, weil in diesem Falle die Peripheriewinkel μ und ν die speziellen Werte $\mu = \gamma$ $\nu = \alpha$ annehmen und infolgedessen $\operatorname{tg} \varphi$ den Wert:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin (\beta + \alpha) - \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \sin \alpha}{\cos (\beta + \alpha) + \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \gamma}} = \frac{0}{0}$$

annimmt, also unbestimmt wird.

Formel (5) ist insofern bemerkenswert, daß sie zugleich die Lösung der Hansen'schen Aufgabe enthält, nur ist dann nicht φ , sondern β der unbekannte Winkel. In diesem Falle sind nämlich im Viereck $P 1 2 3$ die bei P und 1 liegenden Winkel gegeben und infolgedessen auch φ als bekannt anzunehmen. Um β zu bestimmen, braucht man nur $\frac{c}{a}$ im Zähler und Nenner der rechten Seite durch den Sinussatz auszudrücken:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

dies in (5) einzusetzen und nach Entwicklung von $\sin (\alpha + \beta)$ Zähler und Nenner durch $\sin \beta$ zu dividieren; man erhält:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg} \nu - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta (\operatorname{ctg} \nu + \operatorname{ctg} \mu) - 1 + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \mu}$$

und daraus

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \varphi (\operatorname{ctg} \nu - \operatorname{ctg} \alpha) + 1 - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \mu}{\operatorname{ctg} \mu + \operatorname{ctg} \nu}$$

oder nach kurzer Zwischenrechnung als Ergebnis

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \varphi \sin (\alpha - \nu) \sin \mu - \cos (\alpha + \mu) \sin \nu}{\sin \alpha \cdot \sin (\mu + \nu)}$$

Hat man daraus β berechnet, so sind alle Winkel im Viereck bekannt und die gesuchte Seite $\overline{P1}$ ist mit Hilfe des Sinussatzes zu bestimmen.

2. Vektoranalytische Lösung.

Zum leichteren Verständnis der folgenden Ausführungen schicken wir einige Bemerkungen über die Vektorgleichung des Kreises voraus.

Bezeichnet man mit r den variablen Radiusvektor (Ortsvektor) eines Kreispunktes P und liegt der Mittelpunkt des Kreises im Anfangspunkt des Koordinatensystems (Bezugspunkt) A , dann lautet die Gleichung des Kreises mit dem Halbmesser ρ

$$\langle\langle r^2 \rangle\rangle = \rho^2.$$

Sie drückt die Eigenschaft aus, daß jeder Kreispunkt vom Mittelpunkt die Entfernung ρ hat. Liegt der Mittelpunkt außerhalb des Bezugspunktes, im Punkte O , mit dem Radiusvektor v , dann nimmt die Gleichung des Kreises folgende Form an:

$$\langle\langle (r - v)^2 \rangle\rangle = \rho^2$$

Da $(r - v)$ die Verbindungsgerade der beiden Punkte O und P ist (Abb. 2), drückt auch diese Gleichung die vorhererwähnte Eigenschaft des Kreises aus. Geht nun der Kreis durch den festen Punkt 1, mit dem Radiusvektor r_1 , so gewinnt man die Gleichung

$$\langle\langle (r_1 - v)^2 \rangle\rangle = \rho^2$$

und durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen von einander:

$$\langle\langle (r - v)^2 \rangle\rangle - \langle\langle (r_1 - v)^2 \rangle\rangle = 0$$

oder, nach Auswertung der Differenz der beiden Quadrate:

$$\langle\langle r - r_1 \quad r - (2v - r_1) \rangle\rangle = 0$$

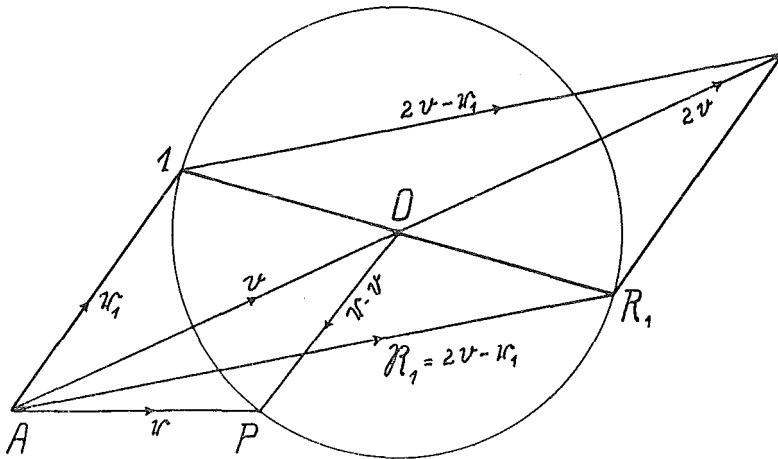


Abb. 2.

Setzt man endlich zur Abkürzung $2v - r_1 = \mathfrak{R}_1$, so erhält man die quadratische Gleichung:

$$\langle\langle r - r_1 \quad r - \mathfrak{R}_1 \rangle\rangle = 0 \dots \dots \dots (1)$$

als Gleichung eines Kreises, der durch den gegebenen Punkt 1 geht. Der in der Gleichung auftretende Radiusvektor \mathfrak{R}_1 hat eine einfache geometrische Bedeutung. Wie aus Abb. 2 ersichtlich, ist \mathfrak{R}_1 der Radiusvektor des zweiten End-

punktes jenes Kreisdurchmessers, der durch den Punkt 1 geht. Die Gleichung (1) drückt daher die bekannte Tatsache aus, daß die beiden Verbindungslinien eines Kreispunktes mit den Endpunkten eines Durchmessers aufeinander senkrecht stehen. (Weil das skalare Produkt verschwindet.) Wir werden in der Folge den Punkt R_1 kurz den Gegenpunkt des Punktes 1 nennen.

Dies vorausgeschickt, kehren wir zu unsere Aufgabe zurück. In Abb. 3 ist wieder A der Bezugs- oder Koordinatenanfangspunkt, r_1, r_2, r_3, r sind die Radienvektoren der vier Punkte 1, 2, 3, P , von denen 1, 2, 3 gegeben, P zu bestimmen ist.

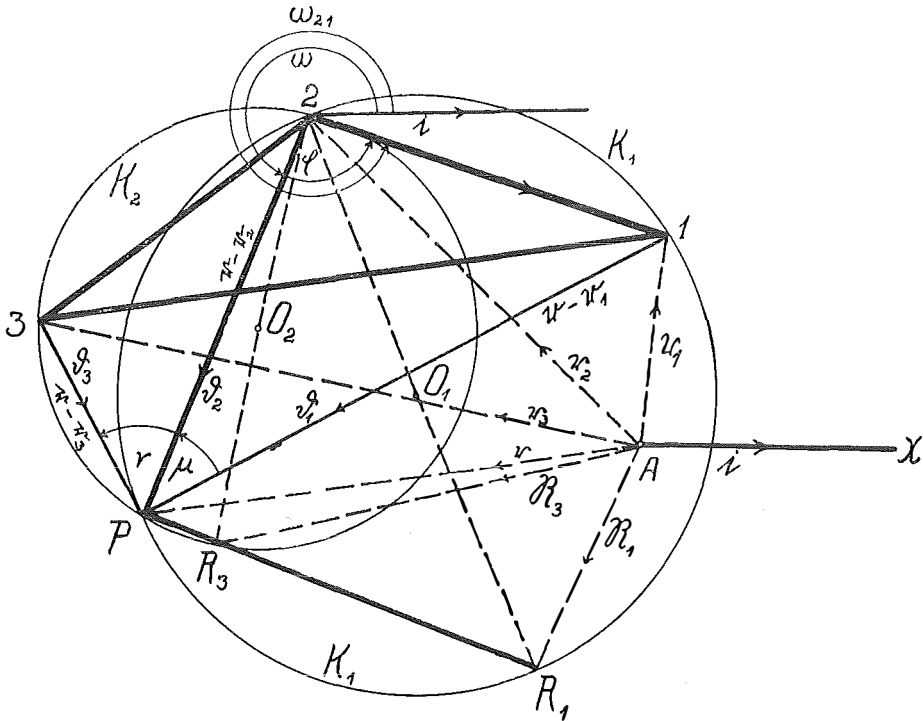


Abb. 3.

Die Vektoren $(r - r_1), (r - r_2), (r - r_3)$ sind die Verbindungslinien der Punkte 1, 2, 3, mit P ; bezeichnen wir ihren absoluten Wert mit d_1, d_2, d_3 und bilden wir das skalare und vektorielle Produkt dieser Vektoren:

$$\begin{aligned} ((r - r_1 \ r - r_2)) &= d_1 d_2 \cos \mu \dots \dots \dots (2) \\ [r - r_1 \ r - r_2] &= d_1 d_2 \sin \mu \end{aligned}$$

Aber $r - r_1 = r - r_2 + r_2 - r_1 = (r - r_2) - (r_1 - r_2)$ und diesen Wert in die vorige Gleichung eingesetzt, ergibt:

$$d_1 d_2 \sin \mu = [(r - r_2)^2] - [r_1 - r_2 \ r - r_2] = - [r_1 - r_2 \ r - r_2] \dots (3)$$

Dividiert man (2) durch (3), so folgt

$$\operatorname{ctg} \mu = - \frac{((r - r_1 \ r - r_2))}{[r_1 - r_2 \ r - r_2]}$$

oder geordnet

$$((r - r_1 \ r - r_2)) + \operatorname{ctg} \mu [r_1 - r_2 \ r - r_2] = 0$$

Da wir uns nur mit Vektoren der Ebene beschäftigen, können wir das hier auftretende vektorielle Produkt durch Einführung der Ergänzung des ersten Faktors auf ein skalares Produkt zurückführen. Die Ergänzung des Vektors $(r_1 - r_2)$, d. h. der auf diesen senkrecht stehende Vektor, werde mit $|(r_1 - r_2)$ bezeichnet, dann geht obige Gleichung über in

$$\mathbb{C}(r - r_1 \ r - r_2) + \text{ctg } \mu \ \mathbb{C}(|(r_1 - r_2) \ (r - r_2)) = 0$$

Nun kann man den Vektor $(r - r_2)$ herausheben und man erhält:

$$\mathbb{C}(r - r_2) \ (r - r_1 + \text{ctg } \mu \ |(r_1 - r_2)) = 0$$

Das ist eine Gleichung zweiten Grades in r , welche einen Kreis K_1 darstellt (Abb. 3), der durch die Punkte 1, 2 und P hindurchgeht und in P den Peripheriewinkel μ hat. Daß der Kreis durch den Punkt 2 geht, ist offensichtlich, daß er auch durch 1 hindurchgeht, folgt daraus, daß nach Einsetzen von $r = r_1$ in die Gleichung, die Bedingung $\mathbb{C}(r_1 - r_2) \ |(r_1 - r_2) = 0$ hervorgeht, die aber tatsächlich erfüllt ist, da der Vektor $(r_1 - r_2)$ auf seine Ergänzung orthogonal steht. Setzt man endlich der Einfachheit halber den Vektor $r_1 - \text{ctg } \mu \ |(r_1 - r_2)$ gleich \mathfrak{R}_1 , so gewinnt man die einfache Gleichung:

$$\mathbb{C}(r - r_2) \ (r - \mathfrak{R}_1) = 0$$

Das ist aber, wie Gleichung (1) zeigt, die Gleichung eines Kreises durch den gegebenen Punkt 2, der außerdem durch dessen Gegenpunkt R_1 geht. Der Vektor

$$\mathfrak{R}_1 = r_1 - \text{ctg } \mu \ |(r_1 - r_2)$$

ist daher der Radiusvektor des Gegenpunktes von 2 in bezug auf den Kreis K_1 .

Dasselbe Verfahren haben wir nun auf das Dreieck 2 3 P anzuwenden. Der Verlauf der Rechnung führt auf folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} d_2 d_3 \cos \nu &= \mathbb{C}(r - r_2 \ r - r_3) \\ d_2 d_3 \sin \nu &= [r - r_2 \ r - r_3] = [r - r_2, (r - r_2) - (r_3 - r_2)] = -[r - r_2 \ r_3 - r_2] = [r_3 - r_2 \ r - r_2] \\ d_2 d_3 \sin \nu &= [r_3 - r_2 \ r - r_2] \\ \text{ctg } \nu &= \frac{\mathbb{C}(r - r_2 \ r - r_3)}{[r_3 - r_2 \ r - r_2]} \\ \mathbb{C}(r - r_2 \ r - r_3) - \text{ctg } \nu [r_3 - r_2 \ r - r_2] &= 0 \\ \mathbb{C}(r - r_2) \ (r - r_3 - \text{ctg } \nu \ |(r_3 - r_2)) &= 0 \end{aligned}$$

Das ist die Gleichung des Kreises K_2 , der durch 2, 3, P hindurchgeht und in P den Peripheriewinkel ν besitzt. Wird hier wie vorher, zur Abkürzung

$$\mathfrak{R}_3 = r_3 + \text{ctg } \nu \ |(r_3 - r_2)$$

gesetzt, so erhalten wir in

$$\mathbb{C}(r - r_2) \ (r - \mathfrak{R}_3) = 0$$

die einfachere Gestalt derselben Kreisgleichung, wo R_3 wieder den Gegenpunkt des Punktes 2 bezüglich des Kreises K_2 bedeutet.

Es wurden auf diesem Wege 2 Kreise erhalten:

$$\mathbb{C}(r - r_2) \ (r - \mathfrak{R}_1) = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$\mathbb{C}(r - r_2) \ (r - \mathfrak{R}_3) = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

die sich im Punkte 2 und dem zu bestimmenden Punkte P schneiden. Um die Berechnung der Unbekannten r zu vereinfachen, leiten wir aus den zwei qua-

dratischen Gleichungen zwei lineare ab. Subtrahiert man zu diesem Ende die 2. Gleichung von der ersten, so geht die lineare Gleichung hervor:

$$\mathbb{C} (r - r_2) (\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_1) \mathbb{D} = 0 \dots \dots \dots (6)$$

welche die gemeinsame Sehne der beiden Kreise darstellt; die Gleichung bringt die Orthogonalitätsbedingung der Vektoren $(r - r_2)$ und $(\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_1)$, d. h. der Sehne und der Verbindungslinie der 2 Gegenpunkte zum Ausdruck.

Zu einer zweiten linearen Gleichung gelangt man durch folgende Überlegung. Gleichungen (4) und (5) sagen aus, daß die Sehne $(r - r_2)$ auf die Vektoren $(r - \mathfrak{R}_1)$ und $(r - \mathfrak{R}_3)$ senkrecht steht; daraus folgt aber, daß die beiden letzten Vektoren parallel zueinander sind und daß infolgedessen ihr Vektorprodukt verschwindet:

$$[r - \mathfrak{R}_1 \ r - \mathfrak{R}_3] = 0$$

Substituiert man hier

$$r - \mathfrak{R}_3 = r - \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_3$$

so gewinnt man die Gleichung

$$[(r - \mathfrak{R}_1)^2] + [r - \mathfrak{R}_1 \ \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_3] = 0$$

oder, da $[(r - \mathfrak{R}_1)^2] = 0$ ist:

$$\mathbb{C} (r - \mathfrak{R}_1) | (\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_1) \mathbb{D} = 0 \dots \dots \dots (7)$$

Ist hier r variabel, so ist das die Gleichung einer Geraden durch die Punkte P und R_1 ; sie geht aber auch durch den Punkt R_3 , weil $r = \mathfrak{R}_3$ die Gleichung — infolge der Orthogonalität von $(\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_1)$ und seiner Ergänzung $| (\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_1) —$ auch befriedigt. Die Gerade ist also die Verbindungsgerade der beiden Gegenpunkte, auf welcher auch der gesuchte Punkt P liegt.

Wir erhielten in (6) und (7) zwei lineare Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{C} r (\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_1) \mathbb{D} &= \mathbb{C} r_2 (\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_1) \mathbb{D} \\ \mathbb{C} r | (\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_1) \mathbb{D} &= \mathbb{C} \mathfrak{R}_1 | (\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_1) \mathbb{D} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

aus welchen r zu bestimmen ist. Wir wollen aber die rechtwinkligen Koordinaten x und y von P berechnen. Der Übergang zwischen Vektorrechnung und analytischer Geometrie wird durch die Gleichung

$$r = xi + yj$$

geleistet, wo i, j die Einheitsvektoren (Richtungen) der Koordinatenachsen bedeuten. In rechtwinkligen Koordinaten nimmt dann das skalare und vektorielle Produkt zweier Radienvektoren folgende Gestalt an:

$$\mathbb{C} r_1 r_2 \mathbb{D} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \quad [r_1 r_2] = \mathbb{C} | r_1 r_2 \mathbb{D} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Die Anwendung dieser Formeln auf (8) führt auf folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x (X_3 - X_1) + y (Y_3 - Y_1) &= x_2 (X_3 - X_1) + y_2 (Y_3 - Y_1) \\ x (Y_3 - Y_1) - y (X_3 - X_1) &= X_1 (Y_3 - Y_1) - Y_1 (X_3 - X_1) \end{aligned}$$

woraus man die Werte von x und y mittels Determinanten berechnet:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(X_3 - X_1)^2 x_2 + (X_3 - X_1)(Y_3 - Y_1)(y_2 - Y_1) + (Y_3 - Y_1)^2 X_1}{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2} \\ y &= \frac{(Y_3 - Y_1)^2 y_2 + (Y_3 - Y_1)(X_3 - X_1)(x_2 - X_1) + (X_3 - X_1)^2 Y_1}{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2} \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Rechnung ist es zweckmäßig den Richtungskoeffizienten

$$m = \frac{Y_3 - Y_1}{X_3 - X_1}$$

der Verbindungslinie der Gegenpunkte einzuführen. Durch diese Substitution erhält man als Endresultat:

$$x = \frac{x_2 + m(y_2 - Y_1) + m^2 X_1}{1 + m^2}$$

$$y = \frac{m^2 y_2 + m(x_2 - X_1) + Y_1}{1 + m^2}$$

Bisher war der Koordinatenanfangspunkt beliebig. Zu noch einfacheren und praktisch brauchbareren Formeln gelangt man durch Verlegung des Anfangspunktes in den Punkt 2 mittels Parallelverschiebung. Bezeichnet man die neuen Koordinaten mit einem oberen Strich, schreibt also z. B. $x - x_2 = x'$, $y - y_2 = y'$, $Y_1 - y_2 = Y_1'$ usw., so bekommt man die neuen Formeln:

$$x - x_2 = x' = m \frac{m X_1' - Y_1'}{1 + m^2}$$

und

$$y' = \frac{-m X_1' + Y_1'}{1 + m^2}$$

$$\text{wo } \begin{array}{ll} X_1' = x_1 - x_2 + \text{ctg } \mu (y_1 - y_2) & Y_1' = y_1 - y_2 - \text{ctg } \mu (x_1 - x_2) \\ X_3' = x_3 - x_2 - \text{ctg } \nu (y_3 - y_2) & Y_3' = y_3 - y_2 + \text{ctg } \nu (x_3 - x_2) \end{array}$$

Wie man sieht ist nun $x' = -m y'$, woraus man x' nach Berechnung von y' einfach erhält *). Schließlich wird dann

$$x = x' + x_2 \text{ und } y = y' + y_2$$

Numerisches Beispiel.

Da wir hier nur den Gang der Rechnung zeigen wollen, nehmen wir einfache Daten an.

Koordinaten der gegebenen Punkte:

Gemessene Winkel:

$$x_1 = 11 \quad y_1 = 6$$

$$x_2 = 5 \quad y_2 = 3$$

$$x_3 = 3 \quad y_3 = 2$$

$$\mu = 45^\circ \quad \nu = 30^\circ$$

$$\text{ctg } \mu = 1 \quad \text{ctg } \nu = \sqrt{3} = 1.73205$$

$$x_1 - x_2 = 6$$

$$y_1 - y_2 = 3$$

$$+ \text{ctg } \mu (y_1 - y_2) = 3$$

$$- \text{ctg } \mu (x_1 - x_2) = -6$$

$$X_1' = 9$$

$$Y_1' = -3$$

Berechnung von m weiter unten!

$$-m \cdot X_1' = -0.157974 \cdot 9 = -1.421766$$

$$\text{Zähler von } y' = -4.42177$$

$$x_3 - x_2 = -2$$

$$y_3 - y_2 = -1$$

$$- \text{ctg } \nu (y_3 - y_2) = +\sqrt{3} = 1.73205$$

$$+ \text{ctg } \nu (x_3 - x_2) = -2\sqrt{3} = -3.46410$$

$$X_3' = -0.26795$$

$$Y_3' = -4.46410$$

$$-m X_3' = 0.042329$$

$$\text{Zähler von } y' = -4.42177 \quad (\text{zur Kontrolle!})$$

*) P. Reutzi gibt im Heft 3 des 37. Bandes der „Zeitschrift für Vermessungswesen“ ähnliche Formeln an, doch gestaltet sich die Rechnung mit den hier abgeleiteten Formeln etwas einfacher; der in der erwähnten Arbeit auftretende Faktor μ kann nämlich auf die einfachere Form des hier eingeführten Faktors m gebracht werden.

$$m = \frac{Y_3' - Y_1'}{X_3' - X_1'} = \frac{-4.46410 + 3}{-0.26795 - 9} = 0.157974$$

$$m^2 = 0.024956$$

$$y' = -\frac{4.42177}{1.024956} = -4.3141$$

$$y = y' + y_2 = -1.3141$$

$$x' = -m y' = 0.68151$$

$$x = x' + x_2 = 5.6815$$

Zur Kontrolle berechnen wir die Werte von x , y auch indirekt im Anschluß an unsere erste Auflösung.

Vor allem ermitteln wir die Dreiecksseiten c , a , und den eingeschlossenen Winkel β

$$c = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$

$$a = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{5}$$

$$ac = (x_1 - x_2)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_2)(y_3 - y_2) = -15 = ac \cos \beta$$

und daraus

$$\cos \beta = \frac{-15}{15} = -1$$

$$\beta = 180^\circ$$

Die gegebenen drei Punkte liegen in einer Geraden.

Nach Formel (6) der ersten Auflösung wird

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin(\beta + \nu) - \frac{c}{a} \sin \nu}{\cos(\beta + \nu) + \frac{c}{a} \operatorname{tg} \mu} = \frac{-4}{1.26795}$$

$$\varphi = 107^\circ 35' 17''$$

Formel (7) gibt

$$d_2 = c \frac{\sin(\varphi + \mu)}{\sin \mu} = 3\sqrt{10} \sin 152^\circ 35' 17''$$

$$d_2 = 4.3676$$

Um nun die Koordinaten x , y zu bestimmen, schreiben wir aus Abb. 3 die Vektorgleichung auf:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$$

welche mit folgenden zwei Gleichungen äquivalent ist:

$$x = x_2 + d_2 \cos \omega$$

$$y = y_2 + d_2 \sin \omega$$

wo ω der von d_2 und der positiven x -Achse eingeschlossene, in positiver Drehrichtung zu nehmende Winkel ist. Wird noch der Winkel, den der Vektor $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, d. h. die Seite a mit der x -Achse einschließt, mit ω_{21} bezeichnet, so ist, wie Abb. 3 zeigt

$$\omega = \omega_{21} - \varphi$$

worin

$$\operatorname{tg} \omega_{21} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}, \text{ daher } \omega_{21} = 26^\circ 33' 55''$$

ist. Also wird

$$\omega = -81^\circ 01' 22'',$$

was dem positiven Winkel $278^{\circ} 58' 38''$ entspricht. Dies eingesetzt, erhalten wir aus den beiden obigen Gleichungen für x und y :

$$x = 5 + 4'3676 \cos 81^{\circ} 01' 22''$$

$$x = 5'6815$$

$$y = 3 - 4'3676 \sin 81^{\circ} 01' 22''$$

$$y = - 1'3141$$

Literaturbericht.

1. Bücherbesprechungen.

Bibliotheks-Nr. 787. Hopfner Dr. Friedrich: *Physikalische Geodäsie*. Band 14 der Sammlung „Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern“. 49 Abbildungen. (15×23cm, 434 Seiten). Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Leipzig 1933. Preis: geb. RM. 31.—.

Der leitende Gedanke in F. Hopfner's zahlreichen Arbeiten, die in Gerlands Beiträgen zur Geophysik, in den astronomischen Nachrichten, in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie der Wissenschaften und zum Teil auch als kleinere Sammelwerke in den letzten sechs Jahren erschienen sind, bildet auch das Leitmotiv dieses Buches, nämlich der Gedanke: „Die Aufgabe, die mathematische Figur der Erde aus Schwerkraftswerten zu bestimmen, ist ein Randwertproblem.“

Um die Gestalt einer Niveaufläche zu studieren, muß von Randwerten auf dieser Niveaufläche ausgegangen werden, also von Schwerewerten, die nach P r e y reduziert sind, wie es F. A c k e r l durchführt.

Ein klarer, mathematischer Kopf, wie F. Hopfner, war nötig, um in das Chaos, das die Bestimmung der Erdfigur aus Schwerewerten darstellte, mit konsequenter Logik Ordnung zu bringen. Es mag zur Charakterisierung der Zeitlage vor Erscheinen von Hopfner's Arbeiten genügen, darauf hinzuweisen, daß es vier Arten der Schwerereduktion gab, von denen drei angewendet wurden, nur nicht die eine, die zu richtigen Werten führt. Daß jede dieser drei Methoden zu verschiedenen Resultaten führte, hat auch nicht gestört, obwohl doch nur höchstens eine richtig sein konnte. Besonders die eine Reduktionsmethode, die isostatische, führt zu absurden Resultaten, indem sie das, was sie berechnen will, nämlich die Geoidundulation, vorher hinausreduziert. Eine solche Methode ist sonst in der Physik unbekannt. Würde sie z. B. auf Messungen des Erdmagnetismus angewendet, so müßten alle Ergebnisse auf Gestein gleicher Suszeptibilität umgerechnet werden und das Endergebnis wäre eine homogen magnetisierte Erdkugel, ein Resultat, das kein Interesse weiter fände.

Daß die isostatische Methode zu kleinen Resten führt, worin man einen Beweis für ihre Richtigkeit sah, konnte Hopfner auch klarstellen. Das C l a i r a u t'sche Problem setzt voraus, daß die Erde eine Gleichgewichtsfigur ist. Die isostatische Reduktion macht aus der Erde eine Gleichgewichtsfigur und schafft so die Voraussetzung für das C l a i r a u t'sche Problem. Im weiteren fällt nach der isostatischen Reduktion Niveausphäroid und Niveaufläche zusammen, es gibt keine Undulationen. Ausführlich hat sich F. Hopfner mit der isostatischen Reduktion schon in seinen „Neuen Wegen zur Bestimmung der Erdfigur“ (Ergebnisse der kosmischen Physik 1., Leipzig 1931) beschäftigt.

Hopfner ist es auch gelungen, die Methoden der Bestimmung des Geoids nach S t o k e s, P o i n c a r é und R u d z k i, die wenig beachtet, isoliert, ohne Zusammenhang mit der übrigen Geodäsie blieben, als nur ihrer Form nach verschiedene Lösungen eines und desselben Problems zu erkennen, das aus einer linearen Gleichung, nämlich dem Problem von B r u n s, und aus einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung besteht. Diese zwei Gleichungen umfassen alle Probleme der physikalischen Geodäsie, womit F. Hopfner die allgemeinste Formulierung gelungen ist, die aber theoretisch äußerst bedeutungsvoll und