Über die Anwendung statischer Methoden auf den Ausgleich von Liniennetzen

Walter Passer

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **31** (4), S. 66–71

1933


```
@ARTICLE{Passer_VGI_193308,
Title = {{\"U}ber die Anwendung statischer Methoden auf den Ausgleich von
    Liniennetzen},
Author = {Passer, Walter},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {66--71},
Number = {4},
Year = {1933},
Volume = {31}
}
```

den Vermessungsaufgaben des Bergbaus widmen, legt schließlich noch die Frage nahe, ob diese Entwicklung im Interesse des Bergbaus als gesund oder als ungesund anzusehen ist. Die Entwicklung entspricht aber den Herzensneigungen der bei weitem meisten Markscheider. Also ist die bedeutsame Erweiterung des Arbeitsgebietes der Markscheider offenbar eine gesunde Erscheinung. Man könnte ja versucht sein zu sagen: „Wenn der Markscheider nur noch 50% seiner Arbeitskraft auf Vermessungsaufgaben verwendet, so sammelt er auch nur 50% der praktischen Vermessungserfahrungen, die ein mit Vermessungsaufgaben voll beschäftigter Fachmann sammelt." Aber wir haben ja gesehen, daß Vermessungspraxis gerade in der bergmännischen Vermessungskunde von untergeordneter Bedeutung ist, und daß die theoretische Schulung die Hauptsache bildet. Und diese wird im wesentlichen auf der Hochschule gewonnen. Sie wird dem angehenden Markscheider also sozusagen hundertprozentig zuteil und entspricht neuerdings seit Einführung des Vierjahrstudiums und des Diplomexamens den Bedürfnissen des Bergbaus.

Ueber die Anwendung statischer Methoden auf den Ausgleich von Liniennetzen.

Von Dr. techn. Ing. Walter Passer.

Der Verfasser hat in einer als Akademiebericht [1]) erschienenen Abhandlung gezeigt, daß der Ausgleich von Liniennetzen auf die Berechnung der Montagespannungen statisch unbestimmter Fachwerke hinausläuft. In der vorliegenden Arbeit sei zunächst der Grundgedanke der genannten Veröffentlichung wiederholt und anschließend an einem einfachen Beispiele eine Darstellung gegeben, wie beim Ausgleich von Liniennetzen unter Anwendung statischer Methoden praktisch vorzugehen ist.

Unter der bekannten Voraussetzung, daß die Längenänderungen der Stäbe eines Fachwerkes den Stablängen proportional sind (Hooke'sches Gesetz), können Liniennetz und Fachwerk als gleichwertige geometrische Figuren betrachtet werden, wenn beide dieselbe Form und Größe besitzen und aus der gleichen Anzahl von Seiten, bzw. Stäben zusammengesetzt sind. Es gilt daher für beide Gebilde die bekannte Beziehung, daß die Zahl der das Netz zusammensetzenden Seiten N der Forderung $N = 2\varkappa - 3$ entsprechen muß, damit es unbeweglich ist; man bezeichnet es dann als geometrisch bestimmt. Eine überzählige Seite, also eine mehr als $2\varkappa - 3$, macht das System einfach geometrisch überbestimmt; jede weitere Seite erhöht den Grad der Überbestimmtheit um 1, so daß man bei r überzähligen Seiten von einem r-fach geometrisch überbestimmten Netz sprechen kann. Für die Möglichkeit eines Ausgleiches ist das Vorhandensein einer geometrischen Überbestimmtheit Voraussetzung,

---

[1]) W. Passer, „Über ein statisches Verfahren zum Ausgleich von Liniennetzen", Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturw. Klasse, 141. Band, 9. und 10. Heft, 1932.

denn erst hiedurch treten gewisse Bedingungen auf, die im ausgeglichenen System erfüllt sein müssen.

Wie bekannt liefert jede überzählige Seite eine Bedingungsgleichung. Man erhält demnach für ein r-fach geometrisch überbestimmtes Netz r Bedingungsgleichungen von der allgemeinen Form

$$j_1 v_1 + j_2 v_2 + \ldots + j_j v_j + \ldots + j_r v_r + \ldots + j_{r+n} v_{r+n} - w_j = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

(für die übrigen Gleichungen sind an Stelle der j entsprechend die Buchstaben a, b, ... r zu setzen). Die Gauß'sche Miniumsbedingung, in der die oben stehenden Gleichungen als Nebenbedingungen enthalten sind, lautet wie bekannt

$$[gvv] - 2K_1\varphi_1 - 2K_2\varphi_2 - \ldots - 2K_j\varphi_j - \ldots - 2K_r\varphi_r \rightarrow \text{Minimum} \qquad (2)$$

und liefert, nach den Verbesserungen variiert, ein System von r Gleichungen zur Bestimmung der Korrelaten. Die Aufstellung der Bedingungsgleichungen für ein Liniennetz erfordert erhebliche Rechenarbeit, wenn man nach den bisher üblichen Methoden der Geodäsie vorgeht.

Bedenkt man nun, daß die überzähligen Größen eines statisch unbestimmten Fachwerkes ebenso aus einem Minimum mit Nebenbedingungen gewonnen werden können, wie die Korrelaten beim Liniennetz, so kann man, da den Bedingungsgleichungen wie in der eingangs erwähnten Arbeit ausführlich dargestellt wurde, in beiden Problemen dieselbe Bedeutung zukommt, das in der Statik verwendete Prinzip der virtuellen Verschiebungen mit Vorteil auch in der Geodäsie zur Anwendung bringen.

Mit den in der Statik üblichen Bezeichnungen, wobei die Koeffizienten Q den Beiwerten j und die Längenänderungen $\triangle s$ den Verbesserungen v entsprechen, lautet Gleichung (1)

$$\Sigma\, Q_i^j \triangle s_i - w_j = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Gleichung stellt somit die Bedingungsgleichung des j-ten überzähligen Stabes des dem Liniennetz entsprechenden Fachwerkes dar und ihre Beiwerte Q sind die zufolge der Belastung 1 (Hilfsangriff 1), im Stabe j angreifend, in den Stäben des geometrisch bestimmten Grundsystems auftretenden Kräfte. Das Summenzeichen erstreckt sich demnach über alle Seiten des geometrisch bestimmten Grundsystems und über die jeweils überzählige Seite.

Zur Erläuterung diene ein von L. Krüger [2]) verwendetes Beispiel; dieselbe Aufgabe wurde in jüngster Zeit von Prof. Dr. R. Schumann [3]) auf vektorischem Wege gelöst. Es liegt ein Linienzentralsystem vor (Abb. 1), in dem die gemessenen Seiten mit den folgenden Werten gegeben sind:

$$\begin{array}{llll} s_1 = 77{\cdot}73 \text{ m} & s_3 = 84{\cdot}37 \text{ m} & r_1 = 56{\cdot}88 \text{ m} & r_3 = 77{\cdot}30 \text{ m} \\ s_2 = 113{\cdot}00 \text{ m} & s_4 = 86{\cdot}80 \text{ m} & r_2 = 66{\cdot}95 \text{ m} & r_4 = 54{\cdot}20 \text{ m} \end{array}$$

Das System setzt sich aus acht Seiten zusammen und ist demnach einfach geometrisch überbestimmt, da zur Unbeweglichkeit des Netzes nur sieben Seiten erforderlich wären (die bekannte Beziehung $N = 2\varkappa - 3$ ergibt $2.5 -$

---

[2]) Veröffentlichung des kgl. Preußischen Geod. Inst., Neue Folge Nr. 34, 1908; „Bedingungsgleichungen für Liniennetze und Rückwärtseinschnitte“ von L. Krüger.

[3]) Sitz.-Ber. d. Ak. d. Wiss. in Wien, 141. Bd., 9. u. 10. Heft, 1932. „Untersuchung über den vektorischen Ausgleich von Dreiecksnetzen“ von R. Schumann.

$3 = 7$). Wählen wir nun irgendeine Seite als „Überzählige“ und denken uns diese zunächst aus dem Netze entfernt, so bilden die verbleibenden Seiten ein geometrisch bestimmtes Grundsystem (Abb. 2). In dieser Figur wird die Entfernung der Punkte P_0 und P_2 mit dem gegebenen Wert r_2 nicht übereinstim-

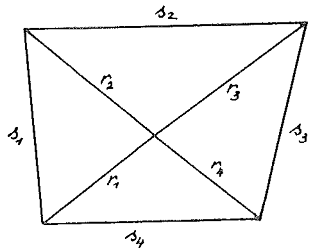

Abb. 1.

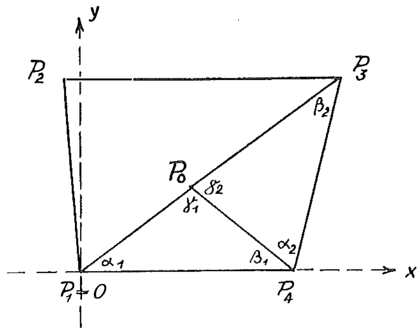

Abb. 2.

men. Die Bestimmung dieses zu erwartenden Widerspruches w muß der Genauigkeit halber auf analytischem Wege erfolgen, obwohl auch hiefür das Prinzip der virtuellen Verschiebungen verwendet werden könnte. Zunächst ergaben sich die aus den Seiten berechneten Winkel der Dreiecke

$$\triangle P_1P_0P_4: \begin{array}{l} \alpha_1 = 102^0\,45'\,16{\cdot}8'' \\ \beta_1 = 39^0\,43'\,37'' \\ \gamma_1 = 37^0\,31'\,6{\cdot}2'' \end{array} \qquad \triangle P_4P_0P_3: \begin{array}{l} \alpha_2 = 63^0\,30'\,4{\cdot}2'' \\ \beta_2 = 38^0\,51'\,56'' \\ \gamma_2 = 77^0\,37'\,59{\cdot}2'' \end{array}$$

Anschließend können die Koordinaten der Punkte P_1, P_0, P_3 und P_4 bestimmt werden (Ursprung $O = P_1$ Richtung $\overrightarrow{P_1 P_4}$ = positive x-Richtung), wofür die folgenden Werte erhalten wurden:

$$P_1\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad P_0\begin{cases} x_0 = +\,45{\cdot}115 \\ y_0 = +\,34{\cdot}641 \end{cases} \quad P_3\begin{cases} x_3 = +\,106{\cdot}106 \\ y_3 = +\,82{\cdot}131 \end{cases} \quad P_4\begin{cases} x_4 = +\,86{\cdot}800 \\ y_4 = 0{\cdot}0 \end{cases}$$

Die Koordinaten von P_2 findet man mittels Bogenschnitt von den Punkten P_1 und P_3 aus; man erhielt hiefür:

$$P_2\begin{cases} x_2 = -6{\cdot}800 \text{ m} \\ y_2 = +\,77{\cdot}432 \text{ m} \end{cases}$$

Nun kann die Entfernung $\overline{P_0P_2}$ berechnet werden, die sich mit dem Werte $\bar{r}_2 = 67{\cdot}277$ m ergab. Diese Länge mit der gegebenen Größe $r_2 = 66{\cdot}950$ m verglichen, ergibt den gesuchten Widerspruch $w = \bar{r}_2 - r_2 = +\,0{\cdot}327$ m. (Auf das Vorzeichen des Widerspruches ist stets zu achten; es ist immer der gegebene Wert von dem aus dem Grundsystem errechneten abzuziehen!)

Für die weitere Rechnung wollen wir der einfachen Schreibweise halber alle Seiten mit dem Buchstaben s bezeichnen und in der in Abb. 3 dargestellten Weise beziffern. (Die überzählige Seite erhält den Index 1.) Die mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen aufstellbare, in diesem Falle einzige Bedingungsgleichung, lautet nun folgendermaßen:

$$Q_1 \triangle s_1 + Q_2 \triangle s_2 + Q_3 \triangle s_3 + \ldots\ldots + Q_8 \triangle s_8 - w = 0 \quad . \quad . \quad (3\text{a})$$

Die Koeffizienten Q stellen, wie schon im früheren allgemein gezeigt wurde, die in dem entsprechenden Fachwerk (Abb. 4) zufolge der gezeichneten Belastung (Hilfsangriff 1) auftretenden Stabkräfte dar. Das Grundsystem ist also durch eine im überzähligen Stab wirkende Kraft 1 zu beanspruchen. Diese

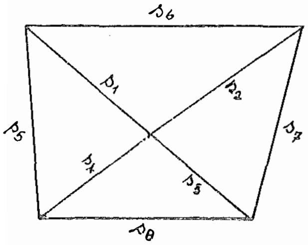

Abb. 3.

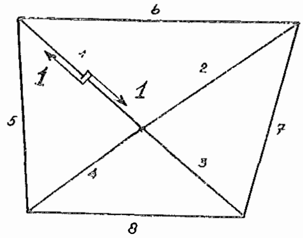

Abb. 4.

Stabkräfte könnten nun, da alle Winkel bekannt sind, ohne weiteres mit den der Statik zu Gebote stehenden Mitteln auf rechnerischem Wege bestimmt werden; davon sei jedoch hier Abstand genommen und in erster Linie auf die graphische Bestimmung dieser Koeffizienten Q hingewiesen, mit der man, wie sich im Ergebnis zeigen wird, eine beachtenswerte Genauigkeit erzielen kann. Wir verwenden sonach die in der Statik unter dem Namen „reziproke Kräftepläne“ oder „Cremonapläne“ bekannten zeichnerischen Verfahren zur Bestimmung der Koeffizienten Q. Für unseren Fall ist nur ein einziger Cremonaplan zu zeichnen (Abb. 5), da ja nur eine überzählige Seite vorhanden ist (bei einem r-fach geometrischen überbestimmten Netz sind r Cremonapläne zu zeichnen, weil in jeder überzähligen Seite der Hilfsangriff 1 wirkt). Wird die Krafteinheit entsprechend günstig gewählt, z. B. $1\,t = 10$ cm, so können die Stabkräfte bis auf zwei Dezimalstellen genau abgelesen werden. Führen wir nun die so gefundenen Beiwerte Q in die Gleichung (3) ein und setzen an Stelle von $\triangle s$ den Buchstaben v, so lautet unsere gesuchte Bedingungsgleichung:

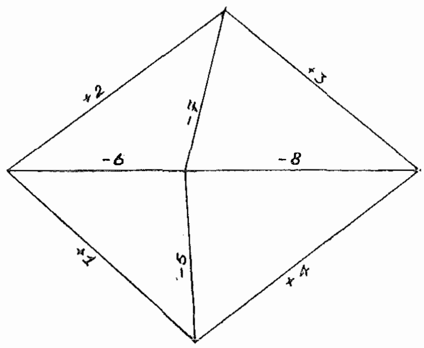

Abb. 5.

$$\left.\begin{aligned} &1{\cdot}0\,v_1 + 1{\cdot}096\,v_2 + 1{\cdot}007\,v_3 + 1{\cdot}120\,v_4 - \\ &- 0{\cdot}680\,v_5 - 0{\cdot}710\,v_6 - 0{\cdot}663\,v_7 - 0{\cdot}935\,v_8 - 0{\cdot}327 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (4)$$

Der folgende Rechnungsgang führt zur erweiterten Minimumsbedingung, die, nach den Verbesserungen variiert, die einzige Normalgleichung liefert; in allgemeiner Form angeschrieben, ergibt sich hiefür

$$\left[\frac{aa}{g}\right] K - w = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Die Werte a entsprechen in dieser Gleichung den Koeffizienten Q, während das Gewicht g an Stelle des Ausdruckes $\frac{EF}{s}$ gesetzt wurde. Die Korrelate K ist identisch mit der statisch unbestimmten Größe, in unserem Falle daher mit jener Kraft, die im überzähligen Stab tatsächlich wirksam ist, also dann auftritt, wenn der Widerspruch w so beseitigt wird, daß die erweiterte Gauß'sche Minimumsbedingung erfüllt ist.

Die Rechnung wird in der Folge tabellarisch durchgeführt; die von Krüger nach dem Ansatz $\frac{100}{s}$ angegebenen Gewichte sind aus der zweiten Spalte der untenstehenden Tafel zu entnehmen.

T a f e l.

Seite	g	a	$\frac{aa}{g}$	$a\,.\,K$	$v = \frac{a}{g}.K$ cm	nach Krüger
s_1	1·49	+ 1·0	0·6711	+ 6·6368	+ 4·45	+ 4·5
s_2	1·29	+ 1·096	0·9312	+ 7·2739	+ 5·64	+ 5·7
s_3	1·85	+ 1·007	0·5481	+ 6·6832	+ 3·61	+ 3·6
s_4	1·76	+ 1·120	0·7127	+ 7·4332	+ 4·22	+ 4·1
s_5	1·29	— 0·680	0·3584	— 4·5130	— 3·49	— 3·5
s_6	0·88	— 0·710	0·5728	— 4·7121	— 5·35	— 5·4
s_7	1·18	— 0·663	0·3725	— 4·4002	— 3·72	— 3·7
s_8	1·15	— 0·935	0·7602	— 6·2054	— 5·39	— 5·3
			$\left[\frac{aa}{g}\right] = 4·9270$			

Mit dem Ausdruck $\left[\frac{aa}{g}\right] = 4·9270$, der aus der Tabelle entnommen werden kann, ergibt sich für die Korrelate nach Gl. (5)

$$K = +\frac{32·7}{4·9270} = +\,6·6368$$

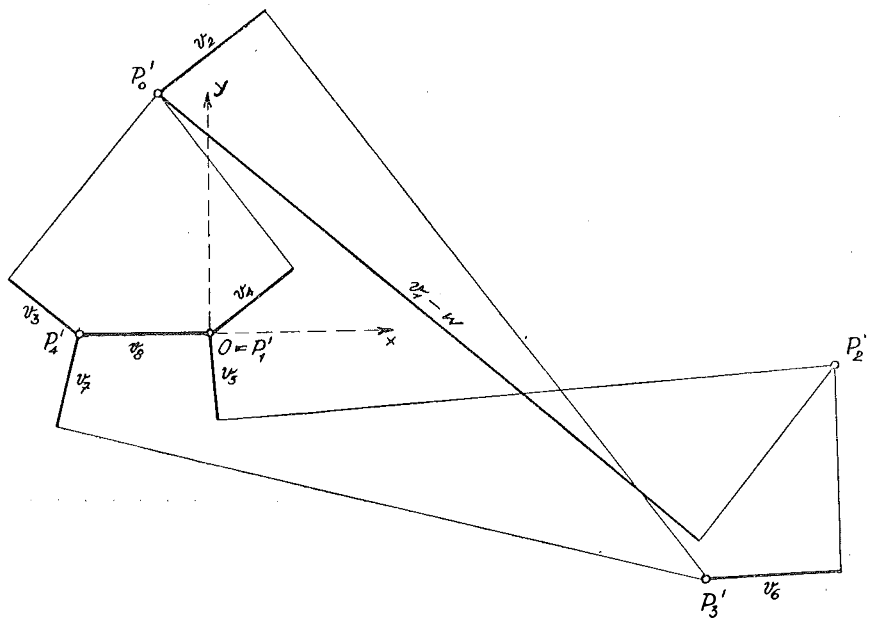

Abb. 6.

und aus der bekannten Beziehung $v = \frac{a}{g} \cdot K$ können im weiteren alle Verbesserungen bestimmt werden.

Ein Vergleich mit den Resultaten von L. Krüger zeigt, daß die Genauigkeit des beschriebenen Verfahrens trotz der Anwendung graphischer Methoden den rechnerischen nicht nachsteht.

Abb. 6 stellt einen Williotplan [4]) dar; dieser gestattet uns alle Verbesserungen der Koordinaten zu entnehmen und gibt uns außerdem eine neue Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung: Der von den Punkten P_1 und P_3 aus bestimmte Punkt P_2 wird ebenso von P_0, und zwar dadurch erhalten, daß man die Entfernungsänderung zwischen den Punkten P_2 und P_0 $(= v_1 - w)$ aufträgt; die entsprechende Senkrechte führt zu P_2.

Aus der vorliegenden Abhandlung soll ersehen werden, daß der Ausgleich eines Liniennetzes unter Verwendung der dargestellten Rechnungsvorgänge bei einiger Vertrautheit mit den Berechnungsweisen statisch unbestimmter Fachwerke einen verhältnismäßig geringen Arbeitsaufwand erfordert [5]).

Ein Gesetz gegen die Zersplitterung von Grundstücken.

Von Obervermessungsrat Ing. K. Lego.

Jeder im Fortführungs- oder Neuvermessungsdienst tätige Vermessungsbeamte wird die Erfahrung gemacht haben, daß durch die uneingeschränkte Teilung der Grundstücke so kleine, besonders so schmale Parzellen entstehen, daß eine zweckmäßige, wirtschaftliche Benützung derselben nicht mehr möglich ist. Außerdem werden die Nachbargrundstücke bei der Bodenbearbeitung stark in Mitleidenschaft gezogen. Auch ist es bei diesen Grundstücken, bei denen die Länge der Umfangsgrenzen im Verhältnis zur Fläche sehr groß ist, um die Erhaltung der Eigentumsgrenzen sehr schlecht bestellt.

Die häufigste Ursache dieser Zersplitterung sind die Erb- oder Realteilungen, bei denen gewöhnlich jedes Grundstück in so viele Teile zerschnitten wird, als Erben vorhanden sind. Besonders beliebt ist diese Art der Erbübertragung im Burgenlande. Der burgenländischen Landesregierung gebührt das Verdienst, als erste in unserem Bundesstaat durch ein Gesetz dieser Selbstvernichtung der Landwirtschaft vorgebeugt zu haben [1]).

---

[4]) Über die Anwendung von Williotplänen in der Fehlerrechnung wurde in dieser Zeitschrift von Dr. techn. Ing. Faltus (Jahrgang 1927) berichtet: „Graphische Fehlerrechnung mit Anwendung von Williotplänen."

[5]) Für das Studium der in das Gebiet der Statik einschlägigen Methoden seien von der diesbezüglichen umfassenden Literatur nur einige Werke genannt:

M. Grüning, „Statik des ebenen Tragwerkes".

J. Pirlet, „Statik der Baukonstruktionen".

R. Kirchhoff, „Statik der Bauwerke".

[1]) Ursprünglich wollte man im Burgenland das Höfe- oder Aufgriffsrecht einführen, wie es in Tirol seit 1900 und in Kärnten seit 1903 besteht, wonach der Hof auf den Grunderben übergeht und die Miterben in Geld abgefunden werden. Mit