

Paper-ID: VGI_193311



Zum Problem der Seitenrefraktion

A. Schedler

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **31** (5), S. 81–87

1933

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Schedler_VGI_193311,  
  Title = {Zum Problem der Seitenrefraktion},  
  Author = {Schedler, A.},  
  Journal = {{\u00}sterreichische Zeitschrift f{\u00}r Vermessungswesen},  
  Pages = {81--87},  
  Number = {5},  
  Year = {1933},  
  Volume = {31}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

ORGAN

des

ÖSTERREICHISCHEN VEREINS FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Redaktion:

Hofrat Prof. Dr. Dr. Dr. h. c. E. Doležal und o. ö. Professor Ing. Dr. H. Rohrer.

Nr. 5.

Baden bei Wien, im Oktober 1933.

XXXI. Jahrg.

Zum Problem der Seitenrefraktion.

Von Universitäts-Dozenten Dr. A. S c h e d l e r.

Vor einiger Zeit hat G. F ö r s t e r ¹⁾ das Problem der Seitenrefraktion wieder aufgegriffen. Er befaßt sich in dieser Abhandlung mit der seitlichen Refraktion, hervorgerufen durch stetige Temperaturänderung. Seit dieser Zeit nun ist in der Meteorologie immer mehr die Anschauung zum Durchbruch gekommen, daß eine stetige Temperaturänderung in horizontaler Richtung nicht die regelmäßige Erscheinung, sondern die Ausnahme darstellt, daß vielmehr der momentane Zustand durch ein Nebeneinanderlagern verschieden temperierter Luftmassen gegeben ist. Es werden also in horizontaler Richtung Unstetigkeitsflächen der Temperatur und damit auch der Dichte fast immer vorhanden sein, wenn wir größere Entfernungen (einige Zehner-*km*) ins Auge fassen und genügend nahe der Erdoberfläche bleiben.

Es ist daher eine Behandlung der Seitenrefraktion von diesem Gesichtspunkte aus am Platze und in vorliegender Abhandlung soll eine kurze elementare Theorie gegeben werden, wie ein Lichtstrahl bei Vorhandensein von einer oder mehreren Diskontinuitätsflächen der Dichte (Temperatur) gebrochen wird. Zum Schlusse werden die meteorologischen Bedingungen an einigen Beispielen angeführt, die zu solchen unstetigen seitlichen Refraktionen führen können.

Elementare Theorie der Seitenrefraktion.

Ist n der Brechungsexponent der Luft gegen den leeren Raum, δ die Dichte der Luft im Verhältnis zur normalen Dichte derselben, so ist $n = 1 + c_0 \delta$, wo c_0 von der Wellenlänge abhängt. Für weißes Licht ist $c_0 = 0.000293$ ²⁾.

Das Verhältnis δ ist abhängig von Druck und Temperatur.

Es sei für den Druck $b_0 = 760 \text{ mm}$ und die Temperatur $T_0 = 273^\circ \text{ C}$ die Dichte der Luft $= \rho_0$ und für den Druck b und die Temperatur T die Dichte

¹⁾ G. F ö r s t e r, Beitrag zur Theorie der Seitenrefraktion: Gerlandsbeiträge zur Geophysik, Bd. XI, 1912, S. 414—469.

²⁾ Siehe P e r n t e r - E x n e r, Meteorologische Optik, zweite Auflage 1922, S. 58 ff.

= ρ . Dann ist $\delta = \frac{\rho}{\rho_0}$. Nun gelten die Gleichungen: $\rho = \frac{b}{RT}$ und $\rho_0 = \frac{b_0}{RT_0}$,
 daraus $\delta = \frac{b}{b_0} \cdot \frac{T_0}{T}$. Daher $n = 1 + \frac{b}{b_0} \cdot \frac{T_0}{T} \cdot c_0 = 1 + c \cdot \frac{T_0}{T}$, wenn $c = c_0 \cdot \frac{b}{b_0}$
 gesetzt wird. Nun gilt nach dem Brechungsgesetz:

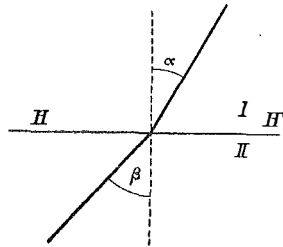
$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \alpha = k \cdot \sin \alpha.$$

Nach obigem ist $k = \frac{n_1}{n_2} = \left(1 + c \cdot \frac{T_0}{T_1}\right) : \left(1 + c \cdot \frac{T_0}{T_2}\right) = \left(1 + c \frac{T_0}{T_1}\right) \left(1 - c \frac{T_0}{T_2}\right)$
 $= 1 + c T_0 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) - c^2 \frac{T_0^2}{T_1 T_2}$.

Das letzte Glied kann vernachlässigt werden und wir erhalten:

$k = 1 + c \cdot T_0 \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1 \cdot T_2} = 1 + \frac{\Delta T}{T} \cdot c$, wenn $T_2 - T_1 = \Delta T$ und $\frac{T_1 \cdot T_2}{T_0} = T$
 gesetzt wird.

Wenn also $\Delta T > 0$ ist, also $T_2 > T_1$, ist $\beta > \alpha$, also Brechung vom Lot.
 In Figur 1 sind diese Verhältnisse dargestellt.



Figur 1.

HH' = vertikale Trennungsebene der zwei verschiedenen Luftmassen I und II mit den abs. Temperatur T_1 und T_2 . α = Einfallswinkel, β = Brechungswinkel.

Wir setzen voraus, daß die Dichteunterschiede zwischen den Luftmassen I und II nur durch die Temperaturdifferenz ΔT hervorgerufen sind, während die Drucke b in I und II einander gleich sind. Es gelten also folgende Beziehungen:

$$k = 1 + \frac{\Delta T}{T} \cdot c \qquad k^2 = 1 + 2 \frac{\Delta T}{T} \cdot c.$$

A. Z w e i T r e n n u n g s f l ä c h e n .

Vorausgesetzt sei, daß die Trennungsf lächen der verschieden dichten Luftkörper vertikal stehen und zueinander parallel sind.

In Figur 2 sind diese Flächen als Schnittlinien mit der Erdoberfläche durch die Geraden $A_1 C$ und $A_2 D$ dargestellt. Weiters bedeuten die Buchstaben: A = Objekt, B = Beobachter, $ACDB$ = Strahlengang, $AB = E$ = Entfernung.

$$\begin{array}{lll} A A_1 = d_1 & A_1 A_2 = d_2 & A_2 A_3 = d_3 \\ C A_1 = e_1 & D C_1 = e_2 & B D_1 = e_3 \end{array}$$

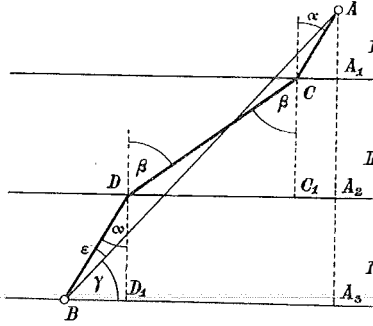
Die Refraktion ist gegeben durch den $\sphericalangle DBA = \varepsilon = 90 - \alpha - \gamma$.

Nun gilt:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{AA_3}{BA_3} = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{e_1 + e_2 + e_3} = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{(d_1 + d_3)\operatorname{tg} \alpha + d_2 \operatorname{tg} \beta}$$

Wir dividieren durch $(d_1 + d_3)$ und setzen

$$\frac{d_2}{d_1 + d_3} = p, \text{ dann wird } \operatorname{tg} \gamma = \frac{1 + p}{\operatorname{tg} \alpha + p \operatorname{tg} \beta}$$



Figur 2.

Wir setzen nun $\operatorname{tg} \beta = q \operatorname{tg} \alpha$, wo q eine von 1 sehr wenig verschiedene Größe ist. Dieses q ist eine Funktion von α und außerdem von den Brechungsexponenten der Luftmassen I und II abhängig; q soll nun berechnet werden. Es ist

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{k \sin \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{k \cos \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{daher } q &= \frac{k \cos \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} \\ &= \frac{k}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha - k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{k}{\sqrt{1 - (k^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \alpha}} \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

Nun ist $(k^2 - 1)$ nach obigem eine sehr kleine Größe und kann nach der Beziehung $\frac{1}{\sqrt{1 - a}} = 1 + \frac{1}{2} a$ (a sehr klein) entwickelt werden:

$$q = k \left[1 + \frac{1}{2} (k^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \alpha \right] = 1 + r;$$

dahaus

$$r = k - 1 + \frac{k}{2} (k^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Setzt man nun die Werte für k und k^2 ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\Delta T}{T} \cdot c \cdot (1 + k \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{\Delta T}{T} \cdot c \cdot \left[1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{\Delta T}{T} \cdot c \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \right] \\ &= \frac{\Delta T}{T} \cdot c \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Setzt man nun den Wert für $q = r + 1$ in die Gleichung für $\operatorname{tg} \gamma$ ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{1+p}{1+(r+1)p} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1+p}{(1+p)+r \cdot p} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{1+\frac{p}{p+1} \cdot r} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \\ &= \left(1 - \frac{p}{p+1} \cdot r\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{p}{p+1} \cdot r \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

Setzt man $\hat{\delta} = 90 - \alpha$, so wird

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg} \hat{\delta} - \frac{p}{p+1} \cdot \frac{\Delta T}{T} \cdot c \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \hat{\delta}}{\operatorname{tg}^2 \hat{\delta}} \cdot \operatorname{tg} \hat{\delta} \cdot \\ \frac{\operatorname{tg} \hat{\delta} - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg}^2 \hat{\delta}} &= \frac{\operatorname{tg} \hat{\delta} - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \hat{\delta} \cdot \operatorname{tg} \gamma} = \operatorname{tg}(\hat{\delta} - \gamma) = \operatorname{tg} \varepsilon, \end{aligned}$$

da die Winkel $\hat{\delta}$ und γ nur wenig voneinander verschieden sind. Daher

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{p}{p+1} \cdot \frac{\Delta T}{T} \cdot c \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \hat{\delta}} = \frac{p}{p+1} \cdot \frac{\Delta T}{T} \cdot c \cdot \operatorname{cotg} \gamma \dots (3)$$

Nun ist $p = \frac{d_2}{d_1 + d_3}$ und daher $\frac{p}{p+1} = \frac{d_2}{d_1 + d_2 + d_3}$. Da ε sehr klein

ist, kann statt $\operatorname{tg} \varepsilon$ der Winkel ε gesetzt werden, und in Bogensekunden ausgedrückt, ergibt sich:

$$\varepsilon = \frac{1}{0.000.004848} \cdot \frac{d_2}{d_1 + d_2 + d_3} \cdot \frac{\Delta T}{T} \cdot c \cdot \operatorname{cotg} \gamma \dots (4)$$

Die Refraktion ε ist darnach direkt proportional der Dicke der störenden Schichte d_2 , weiters dem Temperatursprung ΔT und der Kotangente des Winkels, den die Sichtlinie mit den Trennungsf lächen einschließt; sie ist ferner verkehrt proportional der gesamten Dicke, d. i. der Projektion der Entfernung Objekt—Beobachter auf die Normale zu den Trennungsf lächen.

Für vereinfachte Annahmen kann die Größe der Refraktion ε aus den Gleichungen 3 oder 4 berechnet werden. Setzt man $c = c_0$, d. h. $b = 760 \text{ mm}$,

$T = 273^0$ und $\frac{p}{p+1} = \frac{d_2}{d_1 + d_2 + d_3} = 1$, so wird für $\Delta T = 10^0$

$$\varepsilon = 2.2138'' \times \operatorname{cotg} \gamma.$$

Für verschiedene Werte von γ erhält man folgende Refraktionen ε :

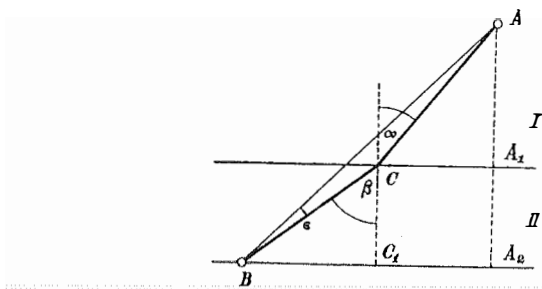
$\gamma = 5^0$	10^0	15^0	20^0	25^0	30^0	35^0	40^0	45^0
$\varepsilon = 25.3''$	$12.6''$	$8.3''$	$6.1''$	$4.7''$	$3.8''$	$3.2''$	$2.6''$	$2.2''$
$\gamma = 45^0$	50^0	55^0	60^0	65^0	70^0	75^0	80^0	85^0
$\varepsilon = 2.2''$	$1.9''$	$1.6''$	$1.3''$	$1.0''$	$0.8''$	$0.6''$	$0.4''$	$0.2''$

Mit Hilfe dieser Werte ist für bestimmte ΔT und gegebene Dimensionsverhältnisse $\frac{p}{p+1}$ die Refraktion ε leicht zu berechnen. Da in Wirklichkeit $\frac{p}{p+1} < 1$ und auch ΔT meist kleiner als 10^0 sein wird, sind die Werte von ε kleiner als in obiger Tabelle.

Es möge noch bemerkt werden, daß die bei der Ableitung der Gleichungen 3 und 4 eingeführten Vernachlässigungen für die Werte von ε ohne Einfluß bleiben.

B. Eine Trennungsfläche.

Für eine Diskontinuitätsfläche ist aus Gleichung 3 oder 4 ohneweiters die Refraktion zu erhalten, wenn man d_1 oder d_3 gleich Null setzt. Auf einem anderen Wege möge auch für diesen Fall die Gleichung für die Refraktion ε abgeleitet werden. Das so erhaltene Resultat dient dann auch zur Kontrolle der Berechnung von ε für zwei Trennungsflächen.



Figur 3.

In Figur 3 bedeuten I und II zwei verschiedene Luftmassen, getrennt durch die Vertikalebene CA_1 . Die Temperatur in L. M. I sei T_1 und in L. M. II T_2 , dabei ist $T_2 > T_1$. $AB = E$, $AA_1 = d_1$, $A_1A_2 = d_2$.

Der Winkel $ACB = \omega = 180 - (\beta - \alpha)$; nach dem Sinussatz ist:

$$\sin \varepsilon : \sin \omega = AC : AB; \quad AC = \frac{d_1}{\cos \alpha},$$

daher

$$\frac{AC}{AB} = \frac{d_1}{E \cos \alpha} = \frac{d_1}{d_1 + d_2},$$

also

$$\sin \varepsilon = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot \sin \omega.$$

Nun ist $\sin \omega = \sin (\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha$. Wir setzen wieder $\sin \beta = k \sin \alpha$, dann wird

$$\begin{aligned} \sin \omega &= k \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \sin \alpha [k \cos \alpha - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}]. \end{aligned}$$

Setzen wir für k^2 den oben erhaltenen Wert ein, nämlich $k^2 = 1 + 2 \frac{\Delta T}{T} \cdot c$,

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sin \omega &= \sin \alpha \cos \alpha \frac{\Delta T}{T} \cdot c [1 + \operatorname{tg}^2 \alpha] = \frac{\Delta T}{T} \cdot c \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ &= \frac{\Delta T}{T} \cdot c \cdot \operatorname{cotg} \gamma \end{aligned}$$

und daher

$$\sin \varepsilon = \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot \frac{\Delta T}{T} \cdot c \cdot \operatorname{cotg} \gamma,$$

mithin dasselbe Ergebnis wie für zwei Trennungsflächen.

Meteorologische Bedingungen für das Zustandekommen von Unstetigkeitsflächen der Dichte (Temperatur).

Im folgenden seien einige Beispiele angeführt, unter welchen meteorologischen Bedingungen solche Unstetigkeitsflächen zustandekommen können; in Wirklichkeit wird fast nie eine solche scharfe Trennungsfläche und noch dazu senkrecht zur Erdoberfläche sich ausbilden können.

Außerdem wird auch der Temperaturunterschied der beiden Luftmassen einen bestimmten Betrag nicht überschreiten können, da er sonst Anlaß zur Ausbildung lokaler Windsysteme gibt und damit die Trennungsfläche zerstört. Doch soll obige kurze Theorie der Seitenrefraktion über die mögliche Größe derselben orientieren.

A. Eine Trennungsfläche.

1. Rand größerer Wasserflächen.



Figur 4.

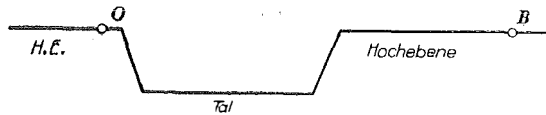
A = Beobachter O = Objekt

a) Beobachter auf Land in Entfernung vom Wasser, Objekt am Rand der Wasserfläche.

b) Standpunkt von Beobachter und Objekt vertauscht.

Zu verschiedenen Tages- und Jahreszeiten wird eine Differenz der Lufttemperaturen über Wasser und Land sich ausbilden. Je näher die Visierlinie der Land- und Wasserfläche liegt, desto größer werden die Temperaturunterschiede sein.

2. Die Visierlinie geht über ein Plateau (Hochebene) und dann über ein Tal zu einem zweiten Plateaurand.



Figur 5.

a) Fall wie in Figur 5.

b) O und B vertauscht.

Auch hier können wir ganz verschiedene Temperaturverhältnisse antreffen; in dem Teil der Sichtlinie, der knapp über dem Boden der Hochebene verläuft, werden die Temperaturen ganz andere sein als im Teil, der über dem Tal und damit in der freien Atmosphäre liegt. Auch hier wieder Abhängigkeit der Temperaturdifferenzen von Tages- und Jahreszeit.

3. Kälteeinbruch. Auch hier wieder zwei Fälle a und b, je nachdem der Beobachter in der kalten oder warmen Luftmasse sich befindet. Der Fall 3 wird nur selten auftreten, da er zeitlich sehr beschränkt ist, während in den beiden vorhergehenden Beispielen 1 und 2 Temperaturunterschiede täglich sich ausbilden können.

B. Z w e i T r e n n u n g s f l ä c h e n .

Es lassen sich ohne weiteres aus den Beispielen 1 und 2 für e i n e Trennungsfläche eine Reihe von Kombinationen mit zwei Trennungsflächen bilden. Folgende Fälle mögen erwähnt werden.

1. Objekt und Beobachter am Land in größerer Entfernung vom Ufer einer Wasserfläche. Sichtlinie geht über Land—Wasser—Land.

2. Objekt und Beobachter am Ufer einer Wasserfläche, die durch Land (Halbinsel oder Insel) unterbrochen ist. Sichtlinie geht über Wasser—Land—Wasser.

3. Objekt und Beobachter liegen auf einer Hochebene in größerer Entfernung vom Plateaurand. Die Sichtlinie geht über Hochebene (über Boden)—Tal (freie Atmosphäre)—Hochebene.

4. Objekt und Beobachter liegen am Rand zweier Hochebenen, dazwischen Tal, das durch einen Rücken zweigeteilt ist. Sichtlinie geht also über Tal—Hochebene—Tal.

Es lassen sich natürlich noch eine Reihe anderer Kombinationen anführen, bei denen in verschiedenen Teilen andere Temperaturverhältnisse herrschen können. Wesentlich ist dabei immer, daß die Sichtlinie teilweise über Gebiete führt, die in bezug auf ihre Lufttemperatur sehr von der Unterlage beeinflußt werden.

Wie bereits erwähnt, werden in Wirklichkeit sehr selten scharfe Trennungsflächen auftreten, auch wird der sich wegen verschiedener Unterlage ausbildende Temperaturunterschied nur eine gewisse Größe erreichen können.

Trotzdem dürfte es vielleicht möglich sein, obige Theorie an besonders geeigneten Stellen zu überprüfen, z. B. am Neusiedlersee. Einerseits könnten die meteorologischen Bedingungen ermittelt werden, also die Temperaturunterschiede ΔT und ihr täglicher Gang gemessen werden, andererseits durch Sichtmessungen nach zwei Punkten über gestörtem und nicht gestörtem Gebiet die Seitenrefraktion bestimmt werden.

Vorliegende Abhandlung verdanke ich einer Anregung Herrn Hofrates Professor Dr. R. S c h u m a n n .

Grubenfelder mit sphärischer Abgrenzung.

Von Adjunkt Dipl.-Ing. J. P o c s u b a y in Sopron.

Es werden eigentümliche Grubenfelder, sogenannte Kugelmaße beschrieben, die in dem alten Abrudbányaer-Verespataker Bergbaurevier bis 1867 zur Verleihung kamen. In Abschnitt 1 wird die Vermessung, in Abschnitt 2 die geschichtliche Entwicklung dieser Kugelmaße geschildert.

Unter Grubenfeld versteht man einen unterirdischen Raum, innerhalb dessen Grenzen der Bergwerkseigentümer befugt ist, das verliehene Mineral aufzusuchen und abzubauen. Das Grubenfeld wird durch die im Berggesetz vorgeschriebene Bergbehörde verliehen, falls die gesetzmäßigen Bedingungen