Paper-ID: VGI_193516

Streuung bei Beobachtungswerten verschiedenen Gewichtes

Annemarie Kletetschka-Schmid [1]

[1] *Hygienisches Institut der Universität Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **33** (6), S. 141–146

1935

BibTeX:


```
@ARTICLE{Kletetschka-Schmid_VGI_193516,
Title = {Streuung bei Beobachtungswerten verschiedenen Gewichtes},
Author = {Kletetschka-Schmid, Annemarie},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {141--146},
Number = {6},
Year = {1935},
Volume = {33}
}
```

Nach den vorgehenden überschläglichen Berechnungen ist die Verwendung eines Fesselballons wohl in Erwägung zu ziehen, da einmal eine höhere Genauigkeit zu erwarten ist als bei Flugaufnahmen, andererseits die Betriebskosten verhältnismäßig gering sind und dieses Verfahren daher auch für ganz kleine Aufnahmegebiete in Betracht kommt.

Streuung bei Beobachtungswerten verschiedenen Gewichtes.

Von Annemarie Kletetschka-Schmid.

Bei Beobachtungswerten verschiedenen Gewichtes wird zumeist der Streuungswert als „mittlerer Fehler der Gewichtseinheit“ berechnet:

$$\text{(I)} \quad \sigma = \pm \sqrt{\frac{[pf^2]}{n-1}},$$

wobei f die Abstände der Beobachtungswerte vom Mittel, p das Gewicht dieser Werte und n ihre Zahl bedeutet. Der Nenner $(n-1)$ stellt bekanntlich die Zahl der Überbestimmungen vor, so daß er bei bekanntem wahren Mittel den Wert n, und bei vermittelnden Beobachtungen, wo diese Zahl auch $(n-2)$, $(n-3)$, ... $(n-m)$ usw. sein kann, den entsprechenden Wert annimmt.

Dieser mittlere Fehler der Gewichtseinheit gibt nun nicht immer ein anschauliches Bild der Verteilung der Beobachtungen um ihr Mittel. Er stellt die Verteilung nur in dem Fall dar, wenn alle Werte höheren Gewichts sich in Einzelwerte vom Gewichte 1 auflösen. Das trifft nur dann zu, wenn das höhere Gewicht durch Zusammenfassung gleichgroßer Beobachtungswerte von ursprünglich gleichem Gewicht — zum Zwecke der Rechenerleichterung — gewonnen wurde, also ein fiktives ist, stellt aber in allen jenen Fällen, wo wirkliche Verschiedengewichtigkeit vorliegt, ein bloßes Gedankenexperiment vor.

Die Formel (I) gilt zunächst offenbar für Werte, die durch mehrmals wiederholte Messung ein und derselben Größe entstanden sind. Diese Werte stellen bildlich Punkte auf einer Geraden vor, die sich — falls es sich um rein zufällige Fehler handelt — nach der Gauß'schen Fehlerkurve um ihr Mittel, d. i. den wahrscheinlichsten Wert der Größe, verteilen. Tritt jeder Beobachtungswert nur einmal auf, so liegt gleiches Gewicht der Punkte vor, welcher Fall hier nicht behandelt werden soll. Es wird aber besonders bei häufiger Wiederholung der Messung, welche immer nur eine Verbesserung des Resultates mit sich bringen kann, auch vorkommen, daß ein Teil der Beobachtungen innerhalb der jeweiligen Meßgenauigkeit gleichgroß ausfällt. Solche durch mehrfaches Auftreten ausgezeichneten Punkte können auf zweierlei Art bewertet werden, entweder als mehrere Punkte gleichen Wertes von gleichem oder als ein Punkt von mehrfachem Gewicht. Nennt man die Zahl der an verschiedenen Stellen zusammenfallende Punkte $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$, so können diese Zeichen ebensowohl Wiederholungszahlen als Wiederholungsgewichte *)

---

*) S. Wellisch: Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung. 1. Bd. 1909, S. 146.

bedeuten. Ihre Summe: $[\nu]$ ist immer die Anzahl aller überhaupt angestellten Beobachtungen, aber sie ist im ersten Fall zugleich auch die Zahl aller gleichgewichtigen Werte, während sie im andern Fall die Summe der Gewichte bedeutet, also immer größer als n sein muß, welches Zeichen hier die Zahl der vorkommenden verschiedengewichtigen Werte bedeutet.

Die Streuung solcher, z. T. wiederholt auftretender Punkte um ihr Mittel läßt sich demgemäß auch auf zwei Arten feststellen.

1. Faßt man alle festgestellten Beobachtungen als Einzelpunkte vom Gewicht 1 auf, von denen bloß einige an derselben Stelle liegen, so gilt einfach Formel (I), weil ja $[\nu] = n$ ist auch in der Form:

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{[\nu f^2]}{[\nu] - 1}}.$$

Es ist hier den mehrfach besetzten Punkten dadurch Rechnung getragen, daß ihre Abstände vom Mittel im Zähler in ihren Wiederholungszahlen auftreten und diese Wiederholungszahlen außerdem im Nenner in $[\nu]$ enthalten sind. Die Streuung der Gewichtseinheit ist hier zugleich die anschauliche und graphisch verwertbare, weil ja hier jedem einzelnen Wert das Gewicht 1 zukommt. Der Fall gehört genau genommen noch gar nicht zu denen, wo Gewichtsverschiedenheit mitspielt.

2. Nach der anderen Möglichkeit der Betrachtungsweise, wo n die Zahl der untereinander verschiedenen Werte bedeutet, wird die Streuung der Gewichtseinheit nach unserer Formel um so größer ausfallen, je häufiger mehrere Beobachtungswerte miteinander zusammenfallen, je größer also das Durchschnittsgewicht der Werte ist. Es ist nämlich:

$$\sigma_E = \pm \sqrt{\frac{[\nu f^2]}{n - 1}}$$

um so größer je mehr n hinter $[\nu]$ zurückbleibt.

Die wahrscheinliche Verteilung könnte hier genaugenommen nur für jedes vorkommende Gewicht errechnet werden, indem man eben dieses Gewicht als Einheit annimmt. Diese Streuungsgröße hieße:

$$\sigma_P = \pm \sqrt{\frac{[\nu f^2]}{(n - 1)\,\nu_P}};$$

aber auch diese ist, weil sie nicht für die verschiedengewichtigen Werte g e m e i n s a m gilt, für die bildliche Darstellung der Verteilung der Beobachtungswerte um ihr Mittel nach der G a u ß'schen Kurve nicht ohne weiteres brauchbar. Dazu muß man eine D u r c h s c h n i t t s t r e u u n g σ_D berechnen, was durch die Wahl eines Durchschnittsgewichts $\frac{[\nu]}{n}$ als Einheit gelingt:

$$\sigma_D = \pm \sqrt{\frac{[\nu f^2]}{(n - 1)\frac{[\nu]}{n}}} = \pm \sqrt{\frac{[\nu f^2]}{[\nu] - \frac{[\nu]}{n}}}.$$

Diese Formel liefert bei einigermaßen großer Zahl der Beobachtungen einen von der Berechnung unter 1. nicht wesentlich abweichenden Wert.

In diesem Fall ist der Höhergewichtigkeit einzelner wiederholt beobachteter Punkte dadurch Rechnung getragen, daß den im Zähler zusammengefaßten gesamten Gewichten im Nenner auch das Gewicht der Überbestimmungen gegenübersteht: von der Gewichtssumme wird nicht der Wert 1, sondern das einfache Durchschnittsgewicht abgezogen. Die durch Umformung auseinander entstandenen Nenner dieser Formel bedeuten in Worten ausgedrückt einmal das Produkt der Überzahl verschiedener Werte mit deren Durchschnittsgewicht, also — wie schon gesagt — das Gewicht der Überbestimmungen, oder in der zweiten Form der Darstellung die Gewichtssumme vermindert um das Durchschnittsgewicht der verschiedenen Werte, was wieder dem Gesamtgewicht der Überbestimmungen gleichkommt.

Diese zweite Berechnungsweise der für die graphische Darstellung geeigneten Streuung erscheint als ein verwickelterer, aber wesentlich zum gleichen Ziele gelangender Umweg zunächst offenbar als entbehrlich, wird sich aber im folgenden als nützlich erweisen.

Der Umstand jedoch, daß die beiden so errechenbaren Werte nicht völlig übereinstimmen, zwingt zur Überlegung, welche der beiden Berechnungsweisen denn die strenggenommen richtigere ist.

Dazu dient nun folgende Überlegung: Die Tatsache des Zusammenfallens von Beobachtungswerten hängt ganz von der Genauigkeit der Messung ab. Wird diese um einen Stellenwert weiter getrieben, so fallen die Punkte meist schon nicht mehr zusammen, sicher aber bei einer Erweiterung um zwei Stellenwerte. Das Zusammenfallen der Werte beruht also auf nichts anderem als auf einer Abrundung und bedeutet somit eine Klassenzusammenfassung, wodurch bekanntlich ein Fehler des damit berechneten Streuungswertes entsteht, der durch die sogenannte Sheppard-Korrektur behoben werden kann. Diese ist am einfachsten so anzubringen, daß von dem in Klasseneinheiten berechneten Streuungswert die Zahl $\frac{1}{12} = 0{\cdot}083'$ abgezogen wird. Voraussetzung für die Anwendbarkeit dieser Korrektur ist eine gleichmäßige Verteilung der Werte innerhalb der einzelnen Klassen.

Unsere beiden dargelegten Berechnungsweisen der Streuung bei Wiederholungsgewichten weichen nun von einander nur dann erheblich ab, wenn die Zahl der Einzelbeobachtungen sehr gering ist; gerade in diesem Fall kann aber das zufällige Zusammenfallen von Punkten auf einen Wert nur bei grober Abrundung eintreten; hier ist also die Sheppard-Korrektur durchaus am Platze, und es ergibt sich nun tatsächlich, daß der Unterschied zwischen den beiden Berechnungsweisen durch sie fast immer verschwindet; wo auch dann noch ein kleiner Unterschied verbleibt, handelt es sich um jene oben erwähnten durch die Sheppard-Korrektur nicht ganz auszugleichenden Fälle ungleichmäßiger Verteilung innerhalb der Klassen, wie sie bei nur ganz wenigen Beobachtungen mit grober Abrundung immer anzunehmen ist. Diese kommen für eine exakte Berechnung ja überhaupt nicht in Frage.

Man kann also sagen, daß unter Berücksichtigung der Sheppard-Korrektur der zweite angegebene Weg für die Berechnung der anschaulichen Streuung dem ersten vollkommen gleichwertig ist. Der erste Berechnungsweg liefert aber das genau richtige Ergebnis rascher und ist demgemäß vorzuziehen, wo immer er gangbar ist und zum Ziele führt.

Wenden wir uns nun zu jenen Fällen, wo das verschiedene Gewicht von Beobachtungswerten nicht durch Wiederholung zustande kommt, sondern auf andere Weise — sei es durch Zusammenfassung wirklicher Beobachtungen zu Zwischenmitteln, sei es dadurch, daß der Gewinnung der Werte selbst verschiedene Genauigkeit beigemessen werden muß. Zum Unterschied von den Wiederholungsgewichten: $\nu_1, \nu_2, \ldots [\nu]$, wollen wir diese Genauigkeitsgewichte mit $p_1, p_2, \ldots [p]$ bezeichnen.

Während solche Genauigkeitsgewichte bei dem bisher als Beispiel behandeltem Falle gleichsetzbarer Beobachtungen wohl vorkommen, aber im allgemeinen weniger beachtet werden, bilden sie bei den sogenannten vermittelnden Beobachtungen meistens die Grundlage der Gewichtsbewertung. Aus dieser Gruppe von Beobachtungen soll deshalb auch hier das Beispiel gewählt werden; und zwar sollen Wertepaare: (x, y) — also bildlich: Punkte in einer Ebene, deren Ausgleichung eine Gerade ergibt — betrachtet werden.

Zunächst ist festzuhalten, daß hier für eine Fehlerrechnung mindestens drei unabhängige Beobachtungen notwendig sind, da zwei solche für die gesuchte beste Gerade noch keine Überbestimmung bedeuten. Damit entfällt hier aber die Möglichkeit eines zufälligen Zusammenfallens zweier oder mehrerer Beobachtungen, da ja mindestens die freiwählbaren Abszissenwerte bei unabhängig von einander angestellten Beobachtungen von einander verschieden sein müssen. Das Zusammenfallen mehrerer Wertepaare wäre nur bei einer absichtlichen Wiederholung von Beobachtungen, d. h. Beobachtungen bei ein und demselben Abszissenwert möglich. Dann gilt aber für die lineare Verteilung der Ordinatenwerte ganz das früher Gesagte bezüglich des Zusammenfallens von Beobachtungswerten wie im ersten Beispiel. Die Genauigkeit des mittleren Ordinatenwertes einer solchen linearen Verteilung hängt dann aber nicht bloß von der Zahl, sondern auch von der Verteilung der beobachteten Ordinatenwerte ab. Sein Gewicht stellt also das Produkt aus Zahl der Einzelbeobachtungen — als Wiederholungsgewicht — mit dem quadratischen Reziprokwert der Streuung — als Genauigkeitsgewicht — dar.

Dem Fall des Zusammenfallens mehrerer Beobachtungen in der linearen Ausgleichung würde in der Ebene die strenge Proportionalität der Wertepaare entsprechen, d. h. daß mehr als zwei Punkte auf ein und derselben Geraden liegen. Diese Tatsache läßt sich jedoch vor Kenntnis der Lage und Richtung der Ausgleichsgeraden nicht feststellen, kommt also für die Gewichtsbewertung nicht in Betracht.

Bei den Punkten in der Ebene kommen die beim früheren Beispiel einer linearen Streuung seltener gebrauchten Gewichtsbewertungen auf Grund der Genauigkeit hauptsächlich vor, und zwar:

1. Die Punkte entsprechen nicht direkten Beobachtungen, sondern sind Mittelwerte solcher und daher mit dem mittleren Fehler behaftet, aus dem

sich das Gewicht als $p = \frac{1}{\mu^2}$ ergibt; genau genommen ist das Gewicht hier eben das Produkt $n \cdot \frac{1}{\sigma^2}$, das wie oben abgeleitet das Gewicht darstellt.

2. Die Punkte entsprechen wohl direkten Beobachtungen, diese sind aber unter verschiedenen, die Genauigkeit beeinflußenden Bedingungen angestellt worden. Hier wird die Bewertung eine abschätzende sein und mindestens das Verhältnis der verschiedenen Meßgenauigkeiten irgendwie zahlenmäßig feststellen müssen. Auch hier kann das Gewicht als Produkt von einzelnen Gewichtsfaktoren auftreten.

Für die bildliche Darstellung der Verteilung der Punkte um die Ausgleichsgerade und die Möglichkeit der Berechnung des dazu verwendbaren Streuungswertes gilt folgendes:

Da hier eine andere Wertezahl als die der unabhängigen Beobachtungen nicht vorkommt, so kann auch nur sie allein für die Zahl der Überbestimmungen in Betracht kommen. Es ist also nur der oben als zweiter angegebene Weg gangbar um die t a t s ä c h l i c h e Verteilung der Beobachtungen um die Berechnung darzustellen.

Dem verschiedenen Gewicht wird auch hier im Zähler durch die entsprechenden Gewichtsmultiplikationen Rechnung getragen. Im Nenner kann aber nur — der zweiten früher betrachteten Möglichkeit entsprechend — das Durchschnittsgewicht der Überbestimmungen auftreten, nämlich:

$$\sigma_D = \pm \sqrt{\frac{[pf^2]}{(n-2)\frac{[p]}{n}}}.$$

Selbstverständlich bleibt der mittlere Fehler der Gewichtseinheit auch hier:

$$\sigma_E = \pm \sqrt{\frac{[pf^2]}{n-2}},$$

welcher nur von der Z a h l, nicht vom Gewicht der Überbestimmungen abhängt.

Für die weitere Fehlerrechnung, d. h. für die Bestimmung des mittleren Fehlers des Mittelwertes von Punkten auf einer Geraden, oder — in der Ebene — des mittleren Fehlers der beiden Gleichungskonstanten: a und b einer Ausgleichsungeraden: $\frac{y-b}{x} = a$, kann man sowohl vom σ_E- als auch vom σ_D-Wert ausgehen. Der σ_E-Wert ist aber dafür vorteilhafter, weil er schon für die Einheit des Gewichtes gilt, so daß die mittleren Fehler der einzelnen Größen einfach durch Einsetzen ihrer Gewichte in diese Formel gewonnen werden, mithin:

$$\mu = \pm \frac{\sigma_E}{\sqrt{[p]}}, \quad \mu_a = \pm \frac{\sigma_E}{\sqrt{\Pi_a}} \quad \text{und} \quad \mu_b = \pm \frac{\sigma_E}{\sqrt{\Pi_b}}.$$

Benützt man hingegen den schon mit dem Durchschnittsgewicht der Einzelbeobachtungen behafteten — graphisch verwertbaren — Streuungswert σ_D, so ist für den mittleren Fehler des Mittelwertes die Rechnung zwar auch noch sehr einfach, denn man muß hier nur noch die Zahl der Werte berücksichtigen, also:

$$\mu = \pm \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}$$

setzen, was zur obigen Gleichung für diesen Wert zurückführt.

Bei der Berechnung der mittleren Fehler der Gleichungskonstanten über σ_D, wobei nicht das Gewicht der Beobachtungen, sondern das der betreffenden Konstanten maßgebend ist, muß man aber in σ_D an Stelle des ersteren den Gewichtswert einer der beiden Konstanten: Π_a oder Π_b einsetzen. Dies kann nur durch den Umrechnungsfaktor $\sqrt{\frac{[p]}{\Pi_a}}$ oder $\sqrt{\frac{[p]}{\Pi_b}}$ geschehen, so daß die Formeln also lauten:

$$\mu_a = \pm \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{[p]}{\Pi_a}} \quad \text{und} \quad \mu_b = \pm \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{[p]}{\Pi_b}},$$

was wieder die obigen Werte ergibt.

Beide Berechnungsweisen gelangen also zu demselben Ergebnis, nur ist — wie gesagt — hier der Weg über σ_E einfacher. Diese Rechenbequemlichkeit dürfte auch der Grund sein, warum bisher nur der in manchen Fällen unanschauliche σ_E-Wert benützt worden zu sein scheint. Die Anschaulichkeit und damit die graphische Darstellbarkeit eines Untersuchungsergebnisses erscheint jedoch — mindestens als Rechenkontrolle — wohl wichtig genug, um den Vorschlag der Einführung des σ_D-Wertes in die Praxis zu rechtfertigen.

Aus dem Hygienischen Institut der Universität Graz
Vorstand: Prof. Dr. H. Reichel.

Neue Önormen über Vermessungsgeräte.

Der Österreichische Normenausschuß hat soeben neue Normblätter auf dem Gebiete der Vermessungsgeräte (A 2206 „Staffelzeug, Waaglatte und Setzlatte", A 2210 „Senkel", A 2220 „Stahlmeßbänder mit Wickelring") herausgegeben.

Die neuen Normen enthalten eine ziemlich weitgehende Typisierung der nach dem letzten Stand der Technik zweckmäßigen Ausführungsformen der betreffenden Vermessungsgeräte und legen vor allem die an zu liefernde Vermessungsgeräte zu stellenden Anforderungen fest. Die Benützung der Önormen bei Bestellung derartiger Vermessungsgeräte ist daher wärmstens zu empfehlen.

Die obgenannten Normblätter sind zum Preise von 70 Groschen, bzw. 40 Groschen durch den Österreichischen Normenausschuß, Wien, III., Lothringerstraße 12, Tel. U 19-5-90, zu beziehen.

Referat.

Norwegische und deutsche photogrammetrische Arbeiten in der Arktis.

Auszug aus dem Vortrag des o. Professors der Technischen Hochschule in Berlin, Dr. Ing. Otto Lacmann.

Im Rahmen der Festversammlung anläßlich des 25jährigen Bestandes der Internationalen Gesellschaft für Photogrammetrie hielt am 23. November 1935 der Vorstand der Lehrkanzel für Photogrammetrie an der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg, Professor Dr. Ing. Lacmann, einen Vortrag über die von Norwegern und Deutschen ausgeführten photogrammetrischen Arbeiten in der Arktis.