

Paper-ID: VGI\_193701



## Über ein Integralrelief für die nomographisch-graphische Lösung einer Aufgabe aus der Niederen Geodäsie

Alexander Fischer <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Prag*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **35** (1), S. 1–8

1937

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Fischer_VGI_193701,  
Title = {{\U}ber ein Integralrelief f{\u}r die nomographisch-graphische L{\u}  
    o}sung einer Aufgabe aus der Niederen Geod{"a}sie},  
Author = {Fischer, Alexander},  
Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {1--8},  
Number = {1},  
Year = {1937},  
Volume = {35}  
}
```



# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

ORGAN  
des  
ÖSTERREICHISCHEN VEREINS FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Redaktion:

Hofrat Prof. Dr. Dr. Dr. h. c. E. Doležal und o. ö. Professor Ing. Dr. H. Rohrer.

---

Nr. 1.                      Baden bei Wien, im Februar 1937.                      XXXV. Jahrg.

---

## Über ein Integralrelief für die nomographisch-graphische Lösung einer Aufgabe aus der Niederen Geodäsie.

Von Ing. Alexander Fischer in Prag.

Übersicht: Es wird für das vollständige Integral einer bei Absteckungsarbeiten auftretenden gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung ein Nomogramm („Integralrelief“) entworfen, das die entsprechende Randwertaufgabe auf einfache Weise zu lösen gestattet. Um die Arbeit möglichst allgemeinverständlich zu gestalten, sind im „Anhang“ die mathematischen Grundlagen des Entwurfs nach dem allgemeinen Verfahren des Verfassers in Kürze gegeben worden.

1. Einleitung. In der Einleitung zu seinem Lehrbuch der Nomographie betont F. Wenner [1] \*) ganz deutlich den wesentlichen Unterschied zwischen „Graphischem Rechnen“ und „Nomographie“. Während bei letzterer auf einer ein für allemal entworfenen Zeichnung, einem „Rechenbild“, Ablesungen vorgenommen werden, entsteht bei ersterem jeweils eine von Fall zu Fall zu entwerfende neue Zeichnung, für die F. Wenner die Bezeichnung „Rechenplan“ vorschlägt. Wie es sich aber insbesondere in den technischen Wissenschaften gezeigt hat, ist bei verschiedenen Aufgaben eine Erweiterung der „reinen“ Nomographie erforderlich, und zwar in dem Sinne, daß auf Nomogrammen noch Linienzüge eingetragen werden, d. h. graphisch vorgegangen wird. Da für diese wesentliche Weiterbildung der Nomographie keine einheitliche Bezeichnung vorhanden war, habe ich hiefür — in [2; 3] — den Begriff „Nomographisch-graphisches Rechnen“ eingeführt. Für solche Nomogramme, auf denen nomographisch-graphisch gerechnet wird, ist dann der Ausdruck „Diagramme“ oder „Reliefs“ vorzubehalten, in Analogie zu den „JS-Diagrammen“ („Mollier-Diagrammen“) der Technischen Thermodynamik oder dem „Sinusrelief und Tangensrelief“ in der Elektrotechnik (von F. Emden), wobei der Ausdruck „Relief“ im übertragenen Sinne

\*) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf den Schriftennachweis am Ende der Arbeit.

aufzufassen ist, es handelt sich hierbei stets um die Horizontalprojektion eines solchen.

Zu den wichtigsten derartigen Reliefs gehören wohl die „Integralreliefs“ zur Lösung von „Anfangswert-“ und „Randwertaufgaben“ gewöhnlicher Differentialgleichungen — vgl. [2; 4]. Sie sind nichts anderes als die nomographische Darstellung des als bekannt vorausgesetzten vollständigen Integrals der Differentialgleichung und ermöglichen gleichzeitig die Bestimmung der Integrationskonstanten aus den vorgegebenen Anfangs-, bzw. Randwerten

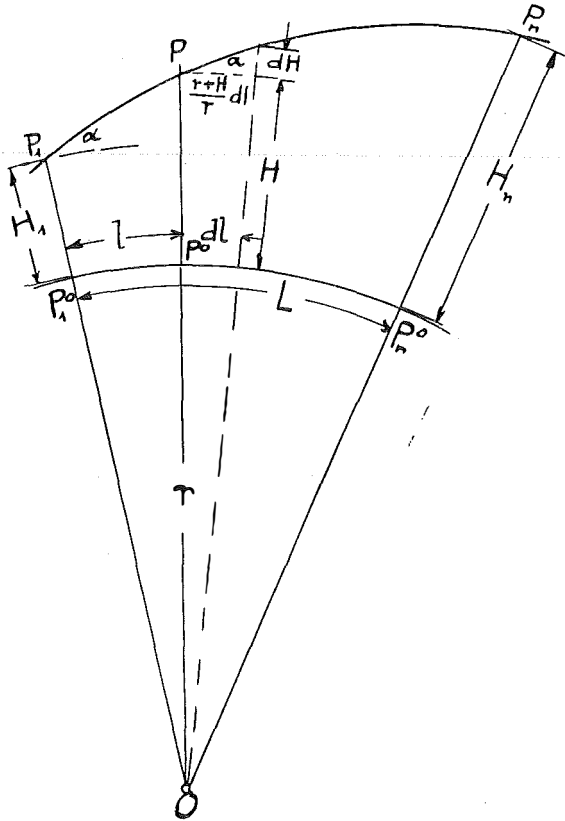


Abb. 1.

sowie die nomographische Darstellung des so erhaltenen partikulären Integrals. Der Zweck der folgenden Zeilen ist es nun, für eine Aufgabe aus der Niederen Geodäsie den Entwurf und die Leistungsfähigkeit eines solchen Integralreliefs vorzuführen, da derartige Integralreliefs möglicherweise, insbesondere bei Aufgaben der Höheren Geodäsie, von Nutzen und Wert sein können.

2. Aufgabenstellung. Es handelt sich hierbei um die folgende, von M. Näbauer [3, (S. 265)] behandelte Aufgabe:

„Es seien zwei Punkte  $P_1$  und  $P_n$  mit den Meereshöhen  $H_1$  und  $H_n$  gegeben. (Abb. 1.) Verbinden wir  $P_1$  und  $P_n$  in ihrer Lotebene durch eine Kurve  $P_1P_n$  gleicher Neigung  $\alpha$ ; es ist dieser konstante Neigungswinkel aus den

Meereshöhen der Kurvenendpunkte unter Berücksichtigung der Erdkrümmung herzuleiten!“

Bezeichnet  $r$  den Erdhalbmesser,  $P^0_1 P^0 = l$  die auf den Meeresspiegel projizierte Länge von  $P_1 P$ ,  $H$  die Meereshöhe eines beliebigen Punktes  $P$  der erwähnten Kurve, so erhält man nach einfacher Rechnung die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\operatorname{tg} \alpha \, dl = \frac{r \, dH}{r + H},$$

deren vollständiges Integral lautet:

$$l \operatorname{tg} \alpha = r \ln (r + H) + c, \dots \dots \dots (A)$$

worin  $c$  die Integrationskonstante ist.

3. Analytisch-algebraische Lösung der Randwert-  
aufgabe. Zur Bestimmung von  $c$  und  $\operatorname{tg} \alpha$  dienen die beiden folgenden Randbedingungen:

Für  $l = 0$  ist  $H = H_1$ ,  
für  $l = L$  ist  $H = H_n$ .

Man erhält dann nach leichter Rechnung die die Aufgabe völlig bestimmenden Beziehungen:

$$L \operatorname{tg} \alpha = r \left[ \ln \left( 1 + \frac{H_n}{r} \right) - \ln \left( 1 + \frac{H_1}{r} \right) \right], \dots \dots \dots (B_1)$$

$$\frac{l}{L} = \frac{\ln \left( 1 + \frac{H}{r} \right) - \ln \left( 1 + \frac{H_1}{r} \right)}{\ln \left( 1 + \frac{H_n}{r} \right) - \ln \left( 1 + \frac{H_1}{r} \right)} \dots \dots \dots (B_2)$$

Hiebei dient  $(B_1)$  zur Bestimmung von  $\alpha$ , während  $(B_2)$  die für die punktweise Berechnung und Konstruktion der Kurve erforderliche funktionale Beziehung zwischen  $l$  und  $H$  darstellt.

4. Analytisch-nomographisch-graphische Lösung.  
Herleitung des Integralreliefs. Wie ersichtlich, zerfällt die vorgeführte übliche Lösung der gestellten Aufgabe in zwei Teile:

1. einen analytischen: Auflösung der Differentialgleichung durch Aufstellung des vollständigen Integrals — und

2. einen algebraischen: Bestimmung der Integrationskonstanten ( $\operatorname{tg} \alpha$  spielt hier nämlich ganz die Rolle einer zweiten Integrationskonstanten) und nachherige Aufstellung des partikulären Integrals.

Die nomographisch-graphische Lösung mit Hilfe des Integralreliefs erspart nun den zweiten Teil, indem sie, wie schon erwähnt, an das vollständige Integral anknüpft, und zwar ist folgendermaßen vorzugehen:

(A) kann auch geschrieben werden:

$$l \operatorname{tg} \alpha = r \ln \left( 1 + \frac{H}{r} \right) - C. \dots \dots \dots (A^*)$$

wobei  $-C = c + r \ln r$ .

Nach bekannten Verfahren ist nun  $(A^*)$  durch eine „Fluchtlinientafel“ (mit gerader Ableselinie) mit zwei parallelen Leiterträgern für  $\alpha$  und  $C$  und

einem Netz von „Doppelknotenpunkten“  $(l, H)$  darstellbar, wobei zusammengehörige Werte von  $\alpha, l, H, C$  auf der „Ablesegeraden“ liegen. („Punkt-Linien-Rechenbild“ nach F. W e n n e r.) Und zwar ergibt sich für  $l$  eine Schar zu den  $C$ -, bzw.  $\alpha$ -Trägern paralleler Geraden und für  $H$  ein Strahlenbüschel durch den

Schlüssel:

$$\underbrace{\varphi_1 (Z=0, H=H_1) \rightarrow \varphi_n (Z=L, H=H_n)}_{\text{Lösungsstrecke}} \rightarrow \alpha (\text{tg } \alpha)$$

$$\underbrace{\varphi_1, \varphi_n, \alpha}_{\text{Lösungsstrecke}} \rightarrow \alpha, Q, Q_2 = \alpha$$

Beispiel:

$$H_1 = 2, H_n = 6, L = 8: \text{tg } \alpha = 0,5, \alpha \sim 26,5^\circ$$

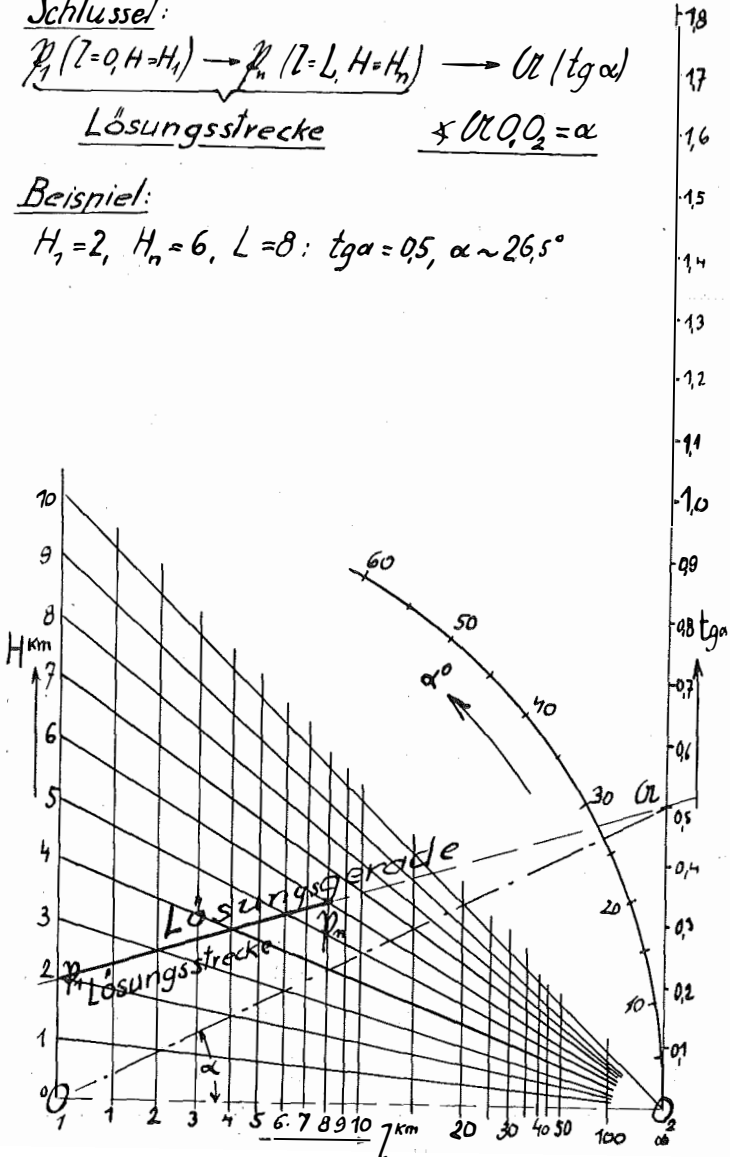


Abb. 2.

Anfangspunkt der  $\alpha$ -Leiter. Da es nur darauf ankam, den Vorgang darzulegen, zeigt Abb. 2 bloß ein Integralrelief für den vereinfachten Fall  $r = \infty$ , für den die der unmittelbaren Nachrechnung zugängliche Beziehung  $\text{tg } \alpha = \frac{(H_n - H_1)}{L}$  gilt. (Vgl. das Beispiel in Abb. 2!)

5. Benützung des Integralreliefs. Durch die erste Randbedingung ( $l = 0, H = H_1$ ) ist im Doppelknotenpunktnetz ein Punkt  $\mathfrak{P}_1$ , durch die zweite ( $l = L, H = H_n$ ) ein Punkt  $\mathfrak{P}_n$  festgelegt. Die durch  $\mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{P}_n$  bestimmte, als „Lösungsgerade“ zu bezeichnende „Ablesegerade“ schneidet auf der  $\alpha$ -Leiter das gesuchte  $\alpha$  aus, womit der erste Teil der Aufgabe erledigt ist und die Bildung des Ausdrucks ( $B_1$ ) erspart wird. — Sie bestimmt aber auf der  $C$ -Leiter auch die Integrationskonstante. Da es jedoch, wie bei der analytisch-algebraischen Lösung, auf den zahlenmäßigen Wert derselben nicht ankommt, kann die  $C$ -Leiter — deren Träger mit der Geraden  $l = 0$  zusammenfällt — ganz entfallen.

Zeichnet man von der „Lösungsgeraden“ bloß die Strecke  $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_n$  fest ein, so wird hiedurch die Kurve  $P_1 P_n$  im Netz ( $H, l$ ) auf die Strecke  $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_n$  „abgebildet“. Zusammengehörige Werte von  $H$  und  $l$  liegen auf dieser „Lösungsstrecke“, die einen Ersatz für die Funktionsbeziehung ( $B_2$ ) — in Form einer „Doppelleiter“ („Doppelskala“) für  $H$  und  $l$  bildet. Aus der in Abb. 2 angegebenen Benützungsvorschrift, dem „Schlüssel“, sowie dem daselbst eingezeichneten Beispiel dürfte wohl alles Erforderliche hervorgehen. Hierbei ist die Entfernung der beiden Leiterträger für  $C$  und  $\operatorname{tg} \alpha$  so gewählt worden, daß sich gleichzeitig — nach Einzeichnung der Geraden  $\mathfrak{A} O_1$  — der Winkel  $\alpha$  in wahrer Größe ergibt. Im Grunde genommen ist dann die  $\operatorname{tg} \alpha$ -Leiter nicht mehr erforderlich, deren Träger kann daher unbeziffert bleiben und dient bloß als „Zapfenlinie“.

### Anhang.

Der Entwurf des Integralreliefs kann nach einem der im ausgedehnten Schrifttum — vgl. z. B. [1], worin auch dasselbe zum größten Teile angeführt ist — gegebenen Verfahren erfolgen. Um die vorliegende Arbeit jedoch ohne weitere Vorkenntnisse aus der Nomographie, bzw. ohne größere Schrifttumsstudien verständlich zu gestalten, seien die mathematischen Grundlagen des Entwurfs nach meinem allgemeinen Verfahren — vgl. [2; 1], ferner [2; 2] — in Kürze angeführt. Dieselben sind in den folgenden wenigen Zeilen enthalten, wobei betont werden möge, daß diese alles Notwendige und Erforderliche enthalten und daß alles Übrige unwesentlich wäre. Insbesondere ist es nicht nur nicht notwendig, sondern geradezu der Forderung nach „Reinheit der Methode“ zuwiderlaufend, das algebraische Hilfsmittel der Determinanten heranzuziehen — vgl. z. B. [1] —, da ja die Nomographie die Algebra ersetzen soll, wie dies im Vorstehenden der Fall war.

Bei der Vertafelung wird das von den tschechischen Mathematikern V. L á s k a und V. H r u š k a eingeführte Parallelpunkt koordinatensystem — vgl. [4] — zur Anwendung gelangen, das dem von M. d' O c a g n e — vgl. [1] — verwendeten Parallelgeraden koordinatensystem entspricht. Hierbei wird ein Punkt  $P$  (s. Abb. 3) durch die Parallelkoordinaten  $p$  und  $q$  auf zwei parallelen Achsen, die von zwei nichtzusammenfallenden Ursprüngen  $O_p$  und  $O_q$  ausgehen, eindeutig festgelegt. Es bleibt also, im Gegensatz zu M. d' O c a g n e, der Punkt als Raumelement erhalten.

1. Mathematische Grundlagen des Entwurfs.  $\alpha$ ) Die Gleichung der Geraden  $g$ , die durch den Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $p, q$  hindurchgeht und auf den Achsen des Koordinatensystems die Abschnitte  $a$  und  $b$  herauschneidet, lautet:

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} = 1. \dots \dots \dots (I)$$

$\beta$ ) Faßt man  $p$  und  $q$  als Funktionen zweier Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  auf, also

$$p = p(\alpha, \beta), q = q(\alpha, \beta) \dots \dots \dots (II), (III)$$

so heißt dies, daß die Gerade (I) durch den Schnittpunkt  $P$  einer Kurve aus der  $\alpha$ -Schar mit einer solchen aus der  $\beta$ -Schar hindurchgeht.

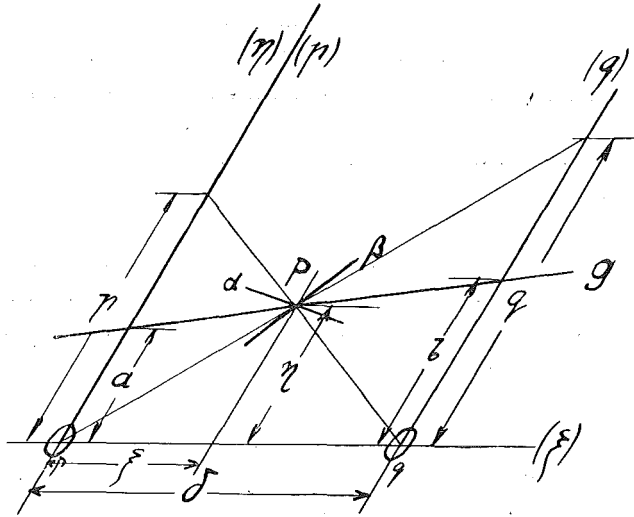


Abb. 3.

$\gamma$ ) Hierzu tritt schließlich der leitende Grundgedanke des erwähnten Verfahrens: Die vorgelegte Funktionsbeziehung ist

zunächst rein formal

in die Gleichungsdreiheit:

$$\text{Gleichung der „Ablesekurve“} \dots \dots \dots (I)$$

$$\text{Gleichung der „Lösenden Kurve“} \\ \text{und Gleichung ihrer „Bezifferung“} \dots \dots \dots (II), (III)$$

zu zerfallen und diese Zuordnungsbeziehung ist

dann erst geometrisch

zu denken, und zwar im vorliegenden Fall im Parallelpunktkoordinatensystem von V. Láska - V. Hruška. (Implizite Definition der allgemeinen „Fluchtlinientafel“!)

2. Tafelentwurf. Die Anwendung des Vorstehenden auf die Funktionsbeziehung

$$\frac{C}{\nu \ln \left( 1 + \frac{H}{\nu} \right)} + \frac{l \operatorname{tg} \alpha}{\nu \ln \left( 1 + \frac{H}{\nu} \right)} = 1 \dots \dots \dots (A^*)$$

ergibt folgende Gleichungsdreierheit:

$$\text{Gleichung der „Ablesegeraden“ } \frac{\mu_1 C}{p} + \frac{\mu_2 \operatorname{tg} \alpha}{q} = 1 \quad \dots \quad (I)$$

$$\text{Gleichung der „Lösenden Kurve“ } \left\{ p = \mu_1 r \ln \left( 1 + \frac{H}{v} \right) \right\} \dots \quad (II)$$

$$\text{und Gleichung ihrer „Bezifferung“ } \left\{ q = \mu_2 r l^{-1} \ln \left( 1 + \frac{H}{v} \right) \right\} \dots \quad (III)$$

Hiebei sind  $\mu_1$  und  $\mu_2$  passend zu wählende Maßstabfaktoren.

Der Übergang zu den kartesischen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  (s. Abb. 3) erfolgte gemäß:

$$\xi = \delta \frac{p}{p+q} \quad \dots \quad (a), \quad \eta = \frac{pq}{p+q}, \quad \dots \quad (b)$$

ist aber nicht unbedingt notwendig.

Die Trennung der Veränderlichen  $H$  und  $l$  ergibt folgendes: Gemäß (II) wird die Veränderliche  $H$  durch ein Strahlenbüschel durch  $Oq$  dargestellt, was natürlich auch unter Anwendung von (a) und (b) bestätigt werden könnte.

Aus

$$\xi = \delta \frac{1}{1 + \frac{q}{p}} = \delta \frac{1}{1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} l}$$

folgt, daß die Veränderliche  $l$  durch eine Parallelschar zur  $\eta$ -Achse dargestellt wird.

Für den, beim Entwurf von Abb. 2 gewählten Sonderfall  $r = \infty$  ergibt sich:

$$p = \mu_1 H,$$

$$q = \mu_2 \frac{H}{l},$$

und zwar erwies sich die Wahl von  $\mu_1 = 0, 1$ ,  $\mu_2 = 1$  als zweckmäßig. Es ist also in diesem Fall der Entwurf ganz besonders einfach.

3. **Schl u ß b e m e r k u n g.** Aus dem Vorstehenden dürfte wohl ganz deutlich hervorgehen, welche einfache, reizvolle und nützliche Hilfsmittel die *Nomographie* und ihre organische Weiterbildung, das *Nomographische Rechnen*, diese jüngsten Zweige der angewandten „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ (im Sinne von Felix Klein) sind. Wie es sich zeigt, ermöglicht insbesondere das letztere eine den Sinnen unmittelbar zugängliche „Abbildung“ des „funktionalen Denkens“ — ganz im Sinne der vom eben Genannten mit besonderem Nachdruck erhobenen Forderungen.

#### S c h r i f t t u m.

1. F. W e n n e r. Praktische Rechenbildkunde (Nomographie). Aachen 1926.
2. A. F i s c h e r. 1. Über ein neues allgemeines Verfahren zum Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomogrammen), insbesondere von Fluchtlinientafeln. *Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*: 1927, H. 3 u. 5; 1928, H. 4; 1929, H. 5.



2. Graphische Rechentafel (Nomogramm) für eine bei der geographischen Ortsbestimmung vorkommende Formel. Österr. Zeitschr. f. Vermessungswesen: 1928, H. 5.
3. Über eine Anwendung des nomographisch-graphischen Rechnens auf eine Aufgabe aus der technischen Schwingungslehre. HDI-Mitteilungen des Hauptvereines deutscher Ingenieure in der Tschechoslow. Republik (Brünn): 1932, H. 14.
4. Über das allgemeine „Integralrelief“ zur nomographisch-graphischen Lösung von Randwertaufgaben gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung — das reelle Gegenstück zum „Sinusrelief und Tangensrelief in der Elektrotechnik“ von Fritz E m d e. HDI-Mitt.: 1933, H. 1/2.
3. M. N ä b a u e r. Grundzüge der Geodäsie mit Einschluß der Ausgleichsrechnung. (H. E. T i m e r d i n g, Handbuch der angewandten Mathematik, 3. Teil.) Leipzig-Berlin 1915.
4. V. L á s k a - V. H r u š k a. Počet grafický a graficko-mechanický. Praha 1923.

---

### **Hofrat Ing. Arthur Starek.**

Von Hofrat Ing. Alfred R e i n o l d.

Mit 31. März 1936 ist der Vorstand der Abt. V/1 des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen wirkl. Hofrat Ing. Arthur S t a r e k in den dauernden Ruhestand getreten.

Ing. S t a r e k ist am 10. September 1875 in Sternberg, Mähren, geboren und kam nach der an der Landes-Oberrealschule in Proßnitz abgelegten Matura an die Technische Hochschule in Wien. Er war unter den ersten, die den neuerschaffenen zweijährigen „Kurs zur Heranbildung von Vermessungsgeometern“ besuchten, wurde dann Assistent für Darstellende und Praktische Geometrie an der seinerzeitigen Bergakademie in Leoben und legte als erster von ganz Österreich am 24. Juli 1898 an der Technischen Hochschule in Graz die vorgeschriebene Staatsprüfung ab. Nach Ableistung des Einjährig-Freiwilligen-Jahres beim k. u. k. Pionierbataillon Nr. 6 in Klosterneuburg trat er am 1. Oktober 1899 als Eleve bei der Evidenzhaltung des Grundsteuerkatasters in Linz in den Staatsdienst, der ihn auf Grund seiner besonderen Begabung und hervorragenden Fähigkeiten zu einer nur von wenigen erreichbaren Höhe führte. Bereits am 29. Dezember 1900 wurde er Amtsleiter der Evidenzhaltung des Grundsteuerkatasters in Hermagor, kam im Jahre 1905 nach Klagenfurt und wurde am 22. Juni 1908 zum Obergemeter II. Klasse ernannt. Ende 1908 wurde er in das Triangulierungs- und Kalkülbureau nach Wien einberufen. Hier wurde S t a r e k bei großen Triangulierungs- und Neuvermessungsarbeiten verwendet, wie z. B. Karlsbad 1909-1910, Wallachisch-Meseritsch 1911, Sternberg 1912-1913. Im Jahre 1913 wurde er zum Obergemeter I. Klasse und im Jahre 1915, während er als Reserveleutnant in Kriegsdiensten stand, zum Inspektor für Mähren ernannt.