Zwei neue Herleitungen des Satzes von Legendre

Friedrich Hauer [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **35** (4), S. 71–75

1937

BibTEX:

```
@ARTICLE{Hauer_VGI_193708,
Title = {Zwei neue Herleitungen des Satzes von Legendre},
Author = {Hauer, Friedrich},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {71--75},
Number = {4},
Year = {1937},
Volume = {35}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN VEREINS FÜR VERMESSUNGSWESEN.
Redaktion:
Hofrat Prof. Dr. Dr. Dr. h. c. E. Doležal und o. ö. Professor Ing. Dr. H. Rohrer.

Nr. 4. Baden bei Wien, im Oktober 1937. XXXV. Jahrg.

Zwei neue Herleitungen des Satzes von Legendre.

Von Dr. F. Hauer in Wien.

Das Theorem von Legendre wird derzeit meist aus dem Sinussatze oder aus dem Kosinussatze der sphärischen Trigonometrie hergeleitet. Daß man aber hiezu selbstverständlich jeden Satz der sphärischen Trigonometrie, der eine Beziehung zwischen den Seiten und den Winkeln des sphärischen Dreieckes herstellt, verwenden kann, ist schon seit langem bekannt.

Es haben sich demnach auch seit Legendre eine große Reihe von Mathematikern und Geodäten mit diesem berühmten Satze beschäftigt *).

Im Nachfolgenden werden zur Ableitung und zum Beweise des Satzes von Legendre Gleichungen der sphärischen Trigonometrie herangezogen, die bisher noch nicht hiezu verwendet wurden, nämlich der Projektionssatz und die Neper'schen Analogien der sphärischen Trigonometrie.

Ableitung des Satzes von Legendre aus dem Projektionssatz.

Die Seiten eines kleinen sphärischen Dreieckes auf der Kugel vom Radius r seien a, b, c; die ihnen zugehörigen Winkel A, B, C.

Diesem sphärischen Dreiecke werde ein ebenes Dreieck zugeordnet, das dieselben Seiten wie das sphärische Dreieck besitzt und dessen Winkel A^x, B^x, C^x seien.

Im sphärischen Dreiecke ist nach dem Projektionssatz

$$\sin\frac{a}{r}\cos B = \sin\frac{c}{r}\cos\frac{b}{r} - \cos\frac{c}{r}\sin\frac{b}{r}\cos A.$$

Werden die Quotienten $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$ als klein von 1. Ordnung vorausgesetzt, dann ist bis einschließlich kleine Größen 4. Ordnung

*) Eine ausführliche Studie des Verfassers zur Geschichte des Satzes von Legendre erscheint demnächst.

$$\left(\frac{a}{r} - \frac{a^3}{6\,r^3}\right)\cos B = \left(\frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3}\right)\left(1 - \frac{b^2}{2r^2}\right) - \left(1 - \frac{c^2}{2r^2}\right)\left(\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3}\right)\cos A.$$

Multipliziert man voranstehende Gleichung beiderseits mit r, so ergibt sich nach entsprechender Umordnung

$$c = a\cos B + b\cos A + \frac{1}{6r^2}(c^3 + 3\,b^2c - a^3\cos B - 3\,bc^2\cos A - b^3\cos A). \quad (1)$$

Wird der Kosinussatz des sphärischen Dreieckes in seiner Form

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A$$

auf ein Dreieck, dessen Seiten klein von 1. Ordnung sind, angewendet, so ist bis einschließlich kleine Größen 3. Ordnung

$$1 - \frac{a^2}{2r^2} = \left(1 - \frac{b^2}{2r^2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2r^2}\right) + \frac{b}{r}\cdot\frac{c}{r}\cos A$$

und daraus

$$a^2 = t^2 + c^2 - 2\,bc\cos A.$$

Hiemit ist

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc};$$

ebenso ergibt sich

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2\,ca}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Führt man nun die Gleichungen (2) in den Klammerausdruck von Gleichung (1) ein, so gilt, wieder bis einschließlich kleine Größen 4. Ordnung

$$c = a\cos B + b\cos A + \frac{1}{6r^2}\left(c^3 + 3\,b^2c - a^3\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2\,ca} - 3\,bc^2\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} - b^3\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}\right),$$

d. i.

$$c = a\cos B + b\cos A + \frac{1}{12\,cr^2}(-\,a^4 - b^4 - c^4 + 2\,b^2c^2 + 2\,c^2a^2 + 2\,a^2b^2).$$

Der Klammerausdruck in voranstehender Gleichung ist gleich $16\,F^{x2}$, wie man aus der Formel von Heron für die Fläche des ebenen Dreieckes F^x ohneweiters erhält. Es ist somit

$$c = a\cos B + b\cos A + \frac{4\,F^{x2}}{3\,cr^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Da nun

$$4\,F^x = ac\sin B^x + bc\sin A^x,$$

also auch, bis einschließlich kleine Glieder 3. Ordnung

$$4\,F^x = ac\sin B + bc\sin A,$$

und da außerdem

$$\frac{F}{r^2} = \varepsilon,$$

bzw. mit gleicher Genauigkeit wie vorhin,

$$\frac{F^x}{r^2} = \varepsilon$$

ist, so hat man, mit Beachtung kleiner Glieder 4. Ordnung,

$$c = a\left(\cos B + \frac{\varepsilon}{3}\sin B\right) + b\left(\cos A + \frac{\varepsilon}{3}\sin A\right) \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Ist nun $B^x = B - \psi$, $A^x = A - \psi$, wobei ψ klein von 2. Ordnung sei, so bestehen, mit Berücksichtigung kleiner Größen 3. Ordnung, die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \cos B^x &= \cos(B - \psi) = \cos B + \psi \sin B, \\ \cos A^x &= \cos(A - \psi) = \cos A + \psi \sin A \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Für

$$\psi = \frac{\varepsilon}{3}$$

folgen durch Eintragen der Gleichungen (5) in die Gleichung (4) die zwei Sätze

$$c = a\cos\left(B - \frac{\varepsilon}{3}\right) + b\cos\left(A - \frac{\varepsilon}{3}\right), \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

bzw.

$$c = a\cos B^x + b\cos A^x \quad \ldots\ldots \quad (6a)$$

Da nun Gleichung ($6a$), die den Projektionssatz des ebenen Dreieckes, mit den Seiten a, b, c und den Winkeln A^x, B^x, C^x, für die Seite c darstellt, mit Gleichung (6) wegen der Ansätze $A^x = A - \frac{\varepsilon}{3}$, $B^x = B - \frac{\varepsilon}{3}$, ebenso, durch zyklische Vertauschung, $C^x = C - \frac{\varepsilon}{3}$, identisch ist, besteht der Satz, daß ein kleines sphärisches Dreieck bis einschließlich kleine Glieder 3. Ordnung in ein ebenes Dreieck mit denselben Seiten verwandelt werden darf, wenn die Winkel des sphärischen Dreieckes um je ein Drittel des sphärischen Exzesses vermindert werden. Dieser Satz ist aber der Satz von Legendre.

Beweis des Satzes von Legendre aus den Gleichungen von Neper.

Es seien wieder a, b, c die Seiten und A, B, C die Winkel eines kleinen sphärischen Dreieckes auf der Kugel vom Radius r, dem ein ebenes Dreieck mit denselben Seiten, wie sie das sphärische Dreieck besitzt, und mit den Winkeln A^x, B^x, C^x entspricht.

Auf der Kugel ist sodann

$$\frac{\cot\frac{C}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2r}}{\sin\frac{a-b}{2r}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

und in der Ebene

$$\frac{\cot\frac{C^x}{2}}{\tan\frac{A^x-B^x}{2}} = \frac{a+b}{a-b}. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Verhältnisse $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ klein von 1. Ordnung sind, gilt in Gleichung (1) bis einschließlich kleine Größen 4. Ordnung

$$\frac{\cot\dfrac{C}{2}}{\tan\dfrac{A-B}{2}} = \frac{\dfrac{a+b}{2r} - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{a+b}{2r}\right)^3}{\dfrac{a-b}{2r} - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{a-b}{2r}\right)^3}$$

oder

$$\cot\frac{C}{2} = \frac{a+b}{a-b}\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{a+b}{2r}\right)^2\right]\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{a-b}{2r}\right)^2\right]\tan\frac{A-B}{2},$$

woraus, immer mit gleicher Genauigkeit,

$$\cot\frac{C}{2} = \frac{a+b}{a-b}\tan\frac{A-B}{2} - \frac{ab}{6r^2}\,\frac{a+b}{a-b}\tan\frac{A-B}{2}$$

folgt.

Unter der Voraussetzung, daß

$$\tan\frac{A-B}{2} = \tan\frac{A^x-B^x}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

sei, wird

$$\cot\frac{C}{2} = \frac{a+b}{a-b}\tan\frac{A^x-B^x}{2} - \frac{ab}{6r^2}\,\frac{a+b}{a-b}\tan\frac{A^x-B^x}{2}$$

und daraus unter Beachtung der Gleichung (2)

$$\cot\frac{C}{2} = \cot\frac{C^x}{2} - \frac{ab}{6r^2}\cot\frac{C^x}{2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Da nun

$$ab\sin C^x = 2\,F^x,$$

also

$$ab = \frac{F^x}{\sin\dfrac{C^x}{2}\cos\dfrac{C^x}{2}}$$

ist, folgt aus Gleichung (4)

$$\cot\frac{C}{2} = \cot\frac{C^x}{2} - \frac{F^x}{6r^2}\csc^2\frac{C^x}{2}$$

und mit Einführung des sphärischen Exzesses

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2},$$

dessen Bestimmung unter Einhaltung der gleichen Genauigkeitsgrenze wie oben auch aus der Formel

$$\varepsilon = \frac{F^x}{r^2}$$

erfolgen kann,

$$\cot\frac{C}{2} = \cot\frac{C^x}{2} - \frac{\varepsilon}{6}\csc^2\frac{C^x}{2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Setzt man $C^x = C - \psi$, also $C = C^x + \psi$, unter ψ eine kleine Größe 2. Ordnung verstanden, so ist mit Beachtung kleiner Größen 3. Ordnung der Reihe nach

$$\cot\frac{C}{2} = \frac{\cos\dfrac{C^x}{2} - \dfrac{\psi}{2}\sin\dfrac{C^x}{2}}{\sin\dfrac{C^x}{2} + \dfrac{\psi}{2}\cos\dfrac{C^x}{2}}$$

$$= \frac{\cot \frac{C^x}{2} - \frac{\psi}{2}}{1 + \frac{\psi}{2} \cot \frac{C^x}{2}}$$

$$= \cot \frac{C^x}{2} - \frac{\psi}{2} - \frac{\psi}{2} \cot^2 \frac{C^x}{2},$$

somit

$$\cot \frac{C}{2} = \cot \frac{C^x}{2} - \frac{\psi}{2} \csc^2 \frac{C^x}{2} \qquad (6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) können nur dann gleichzeitig bestehen, wenn

$$\psi = \frac{\varepsilon}{3}$$

und damit

$$C^x = C - \frac{\varepsilon}{3} \qquad (7)$$

ist.

Dieses Ergebnis folgte unter der Voraussetzung, daß Gleichung (3) erfüllt werde, oder anders geschrieben, daß

$$A - A^x = B - B^x = \varphi \qquad (8)$$

sei. Aus den Gleichungen

$$A + B + C = 180^0 + \varepsilon$$

und

$$A^x + B^x + C^x = 180^0$$

folgt durch Subtraktion

$$(A - A^x) + (B - B^x) + (C - C^x) = \varepsilon.$$

Setzt man in diese Gleichung die Beziehungen (7) und (8) ein, so ergibt sich

$$2 \varphi + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

d. h.

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{3},$$

also auch

$$A^x = A - \frac{\varepsilon}{3}, \qquad B^x = B - \frac{\varepsilon}{3} \qquad (9)$$

Da nur die Voraussetzung (3) zu den Ergebnissen (7) und (9) führt, ist hiemit der Satz von Legendre bewiesen.

---

50 Jahre agrarische Operationen in Niederösterreich.

Von Agrarbaurat Ing. Josef Proksch.

(Schluß.)

Die selbständige Stellung des Technikers in der zweiten und dritten Instanz blieb unverändert bestehen. Von den übrigen Ländern behielt Oberösterreich, Steiermark und Kärnten die Organisation aus dem Jahre 1920 im großen und ganzen bei. Salzburg, Tirol und Vorarlberg haben die Agrarbehörden in den übrigen Landesdienst eingebaut.