Paper-ID: VGI_195003

Über die Zurückführung der Methode der kleinsten Quadrate auf das Prinzip des arithmetischen Mittels

Antál Tárczy-Hornoch

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **38** (1–2), S. 13–18

1950

BibTEX:

```
@ARTICLE{Tarczy-Hornoch_VGI_195003,
Title =  {{\"U}ber die Zur{\"u}ckf{\"u}hrung der Methode der kleinsten Quadrate
     auf das Prinzip des arithmetischen Mittels},
Author =  {T{\'a}rczy-Hornoch, Ant{\'a}l},
Journal =  {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages =  {13--18},
Number =  {1--2},
Year =  {1950},
Volume =  {38}
}
```

Über die Zurückführung der Methode der kleinsten Quadrate auf das Prinzip des arithmetischen Mittels

Von A. Tárczy-Hornoch

Der erste Zusammenhang besteht bekanntlich darin, daß Gauß in seiner Begründung der Methode der kleinsten Quadrate aus 1809 das arithmetische Mittel direkter Beobachtungen gleicher Genauigkeit axiomartig als den wahrscheinlichsten Wert annahm und daraus sein bekanntes Fehlergesetz ableitete [1, Art. 177]. Daraus folgt unmittelbar, daß die auf dieses Fehlergesetz aufgebaute Methode der kleinsten Quadrate bei direkten Beobachtungen zum arithmetischen Mittel führen muß. Bedeutend schwieriger ist nun der umgekehrte Weg, der Nachweis, daß die Lösung aller Ausgleichsaufgaben auf das arithmetische Mittel zurückgeführt werden kann.

Zu den obigen Versuchen gehört die Erörterung Jordans in seinem Handbuch der Vermessungskunde, die in ihrer 1910 angegebenen Form unverändert in die weiteren Auflagen übernommen wurde. Darnach [2, S. 41] muß bei mehreren Unbekannten ein allgemeineres Ausgleichungsprinzip gesucht werden und dieses Prinzip der kleinsten Quadrate fand nun Jordan [2, S. 45] in Übereinstimmung mit dem arithmetischen Mittel dadurch, daß er wieder auf eine Unbekannte zurückgehend aus den Verbesserungsgleichungen

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1\,x - l_1 \\ &\vdots \\ v_n &= a_n\,x - l_n \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die Unbekannte x und deren Gewichte in

$$\frac{l_1}{a_1} \text{ mit dem Gewichte } p_1 = a_1^2 \ldots\ldots \frac{l_n}{a_n} \text{ mit } p_n = a_n{}^2 \qquad \ldots \quad (2)$$

bestimmte und daraus im allgemeinen arithmetischen Mittel

$$x = \frac{a_1^2\,\frac{l_1}{a_1} + \ldots\ldots + a_n{}^2\,\frac{l_n}{a_n}}{a_1^2 + \ldots\ldots + a_n{}^2} = \frac{[al]}{[aa]} \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

denselben Wert erhielt, wie aus den Normalgleichungen.

Die von Jordan ausgehende Beweisführung mangelt allerdings daran, daß die Beweisführung wieder nur eine Unbekannte voraussetzt.

Hervorgehoben sei die interessante Beweisführung [3, S. 100—102] von Wellisch aus 1907, die den Zweck hatte, das Prinzip der kleinsten Quadratsummen sowohl unabhängig von dem exponentiellen Fehlergesetze und der Anzahl der Beobachtungen, als auch ohne Benützung des mittleren Fehlers, aber unter Zugrundelegung des axiomatischen Satzes vom arithmetischen Mittel zu begründen. Aber auch er ist gezwungen, im Laufe seiner auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung stützenden Beweisführung auf den Fall mit nur einer Unbekannten zu übergehen ([3, S. 101. Abs. 2]), weshalb die Allgemeingültigkeit der dort nachher folgenden Erörterungen nicht ganz erwiesen erscheint.

Einen ganz anderen Weg schlug im gleichen Jahre Helmert in der zweiten Auflage seiner Ausgleichungsrechnung [4, S. 102] ein, der dort allerdings nur in

Worten angedeutet wurde. Wenn wir nach den Andeutungen Helmerts in den Verbesserungsgleichungen der vermittelnden Beobachtungen:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots . - l_1 \\ &\vdots \\ v_n &= a_n x + b_n y + c_n z + \ldots . - l_n \end{aligned} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

die Unbekannten y, z, ... bereits als berechnet voraussetzen und mit deren Hilfe das neue absolute Glied L bilden:

$$\begin{aligned} L_1 &= - b_1 y - c_1 z \ldots + l_1 \\ &\vdots \\ L_n &= - b_n y - c_n z \ldots + l_n \end{aligned} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

so ergibt sich aus Gl. 4 für die letzte Unbekannte

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 x - L_1 \\ &\vdots \\ v_n &= a_n x - L_n \end{aligned} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

und daraus im Sinne der Gl. 1—3 nach dem Prinzip des arithmetischen Mittels

$$x = \frac{[a\,L]}{[aa]} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Ähnlich kann aus den Gl. für y als einzige Unbekannte:

$$\begin{aligned} v_1 &= b_1 y - (- a_1 x - c_1 z \ldots + l_1) = b_1 y - L_1' \\ &\vdots \\ v_n &= b_n y - (- a_n x - c_n z \ldots + l_n) = b_n y - L_n' \end{aligned} \quad \ldots \quad (8)$$

sinngemäß

$$y = \frac{[b\,L']}{[bb]} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

ermittelt werden usw.

Wenn nun alle gleichzeitig unbekannt erscheinen, so müssen alle gleichzeitig bestehen und es sind daher in Gl. (7) die L-Werte nach Gl. (5); in Gl. (9) die L'-Werte nach Gl. (8) zurückzusetzen, woraus:

$$\begin{aligned} x &= \frac{[a(-b\,y - c\,z \ldots + l)]}{[aa]} = \frac{-[ab]\,y - [ac]\,z \ldots + [al]}{[aa]} \\ y &= \frac{[b(-a\,x - c\,z \ldots + l)]}{[bb]} = \frac{-[ab]\,x - [bc]\,z \ldots + [bl]}{[bb]} \\ &\vdots \end{aligned} \quad \ldots \quad (10)$$

werden, die nach entsprechender Ordnung der Reihe nach im Wege des arithmetischen Mittels jene Normalgleichungen geben, die auch die Methode der kleinsten Quadrate liefert. Da man alle Ausgleichsaufgaben in solche nach vermittelnden Beobachtungen umwandeln kann, so folgert daraus Helmert, daß alles auf das Prinzip des arithmetischen Mittels sich zurückführen läßt.

Zu demselben Ergebnis gelangt man gleichfalls im Sinne Helmerts, falls wir — die Untersuchungen auf die verschieden genauen Beobachtungen erweitert — davon ausgehen, daß auf das allgemeine arithmetische Mittel direkter Beobachtungen bezogen $[pv] = 0$ ist. Bei verschieden genauen Beobachtungen mit den Gewichten $g_1, \ldots . g_n$ sind aber die Gewichte der einzelnen x-Werte in Erweiterung der

Gl. (2) (Vgl. [4, S. 88. Gl. 3.] jetzt $p_1 = g_1 a_1^2 \ldots\ldots p_n = g_n a_n^2$, weshalb das allgemeine arithmetische Mittel in Erweiterung der Gl. (3)

$$x = \frac{[gal]}{[gaa]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

wird. Multipliziert man die Gl.-en (1) der Reihe nach mit $g_1 a_1$, bzw. ... $g_n a_n$, so erhalten wir in deren Summe

$$[gav] = [gaa]\,x - [gal] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

wobei die rechte Seite dieser Gl. aus Gl. (11) Null ist. Nun muß Gl. (11) auch für die Gl. (6) Geltung haben, weshalb aus:

$$[gav] = [gaa]\,x - [ga\,L] = 0 = [gaa]\,x - [ga\,(-\,b\,y - c\,z \ldots + l)] \qquad (12)$$

nach Rückeinsetzung der Gl. (5) und nach Ordnung die erste Normalgleichung erhält. Ähnlich ergibt sich aus Gl. (8) und $[gbv] = 0$ gleichfalls aus dem Prinzip des arithmetischen Mittels die zweite Normalgleichung usw.

Adamczyk beruft sich in seiner Untersuchung „Das arythmetische Mittel als Grundlage der Ausgleichsrechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate" [5] aus 1909 zwar nicht auf Helmert, doch entsprechen seine zwei Beweise für die vermittelnden Beobachtungen [5, S. 36—38.] dem Wesen nach den beiden, zuvor in den Gl. 4—411. ausführlicher behandelten Helmert'schen Gedankengängen. Interessant ist dagegen seine Zurückführung der bedingten Beobachtungen auf das arithmetische Mittel [5, S. 39—41.]; da aber diese sich nur auf den Fall von e i n e r Bedingungsgleichung beschränkt, kann sie keinen Anspruch auf Allgemeingültigkeit erheben.

*

Grundsätzlich anders sind jene Beweisversuche, die von dem Jacobi'schen Satz aus 1841 ausgehen [6, Propos. II. im Art. 15, S. 316] und welcher in Van Geer's und Czuber's Fassung [7, S. 328] folgend lautet: [1])

„Greift man aus dem System der Fehlergleichungen der vermittelnden Beobachtungen, nachdem man ihre linken Seiten anulliert hat, eine Gruppe von m-Gleichungen heraus und löst sie auf, so ist dadurch ein Punkt in dem Gebiete der m-Größen $x, y \ldots t$ bestimmt, welchem als Masse (oder Gewicht) das Quadrat des gemeinsamen Nenners dieser Lösung zugeschrieben werden möge. Wiederholt man dieses Verfahren mit allen übrigen der σ möglichen Gruppen von j e m Gleichungen und bestimmt sodann die Koordinaten des Schwerpunktes der so gefundenen σ-Punkte mit Rücksicht auf die ihnen zugeschriebenen Massen, so fallen diese Koordinaten mit den Resultaten zusammen, welche die Methode der kleinsten Quadrate liefert."

---

[1]) Die Jacobi'sche Fassung lautet: Proponantur aequationes . . ., quarum numerus incognitarum numerum excedat; e quolibet systemate n+1 aequationum praecedentium valor incognitae eruatur atque per quadratum Determinantis eius systematis, RR, multiplicetur; quibus factis pro singulis aequationum propositarum combinationibus omnium illorum productorum summa per summam omnium RR dividatur: eruitur incognitae valor idem atque invenitur, si aequationes propositae per Methodum Minimorum Quadratorum tractantur.

Die Jacobi'sche Methode der Lösung von Normalgleichungen erwähnt auch Wellisch sowohl in [3, S. 284—285.], als auch in seinem Buche [8, S. 46—49.] aus 1910. Wenn er auch hier ([8, S. 49.]) erklärt: „Die aus vermittelnden Beobachtungen berechneten wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten gehen daher auch aus der Regel des allgemeinen arithmetischen Mittels hervor, wenn die Koordinatengewichte π in Rechnung gestellt werden", so ist anzunehmen, daß er dies nicht als Beweis für die Zurückführung der Lösung von Normalgleichungen auf das arithmetische Mittel anführte, da er hiefür in [3, S. 100—102.] ganz andere Wege suchte.

Barvik war unseres Wissens der erste, der 1916 den Jacobi'schen Satz über die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte durch Mittelbildung unter Berufung auf Jacobi und Wellisch zur Bestätigung der „Behauptung des Spezialisten der Ausgleichsrechnung Helmert" über die Zurückführung der Methode der kleinsten Quadrate auf das arithmetische Mittel verwendete.

Schmehl in 1937 beschritt im Grunde genommen denselben Weg ([10.]), allerdings ohne Berufung auf Jacobi, Czuber, Wellisch und Barvik. So ist auch nicht zu wundern, daß sein Satz über die Lösung der Normalgleichungen durch Mittelbildung [10, S. 431] der vorher mitgeteilten Jacobi'schen, bzw. Czuber'schen entspricht. Im übrigen ist seine Kritik an dem Jordan-Eggert'schen unvollständigen Beweis gerechtfertigt, dagegen beruht die Bemängelung der Helmert'schen Begründung, daß alle Unbekannten außer einer bekannt vorausgesetzt werden [10, S. 430] im Sinne unserer Erörterungen in den Gl. 4—11 auf einem Mißverständnis.

Auch Haáz benützt den Jacobi'schen Satz u. a. zur Feststellung eines Zusammenhanges zwischen der Methode der kleinsten Quadrate und des arithmetischen Mittels und er kommt sogar zum Schlusse, daß beide eigentlich identisch seien [11, S. 71].

Es fragt sich nun, ob man die Lösung der Normalgleichungen mit Hilfe des Jacobi'schen Satzes als Beweis für die Zurückführung der Methode der kleinsten Quadrate auf das arithmetische Mittel ansehen darf. Wir wählen hiezu absichtlich den einfachen Fall von zwei Unbekannten und drei Verbesserungsgleichungen; denn gelingt es zu beweisen, daß der Jacobi'sche Satz in diesem einfachen und sehr übersichtlichen Fall zu dem erwähnten Zweck ungeeignet erscheint, so ist ein jeder weiterer Beweis überflüssig. Gegeben seien mithin die Verbesserungsgleichungen:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y - l_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y - l_2 \\ v_3 &= a_3 x + b_3 y - l_3 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Nach dem Jacobi'schen Satz berechnen wir der Reihe nach aus der 1. u. 2., dann aus der 1. u. 3. und endlich aus der 2. u. 3. Gleichung die Unbekannten x und y:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{b_2 l_1 - b_1 l_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} & y_{1,2} &= \frac{a_1 l_2 - a_2 l_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ x_{1,3} &= \frac{b_3 l_1 - b_1 l_3}{a_1 b_3 - a_3 b_1} & y_{1,3} &= \frac{a_1 l_3 - a_3 l_1}{a_1 b_3 - a_3 b_1} \\ x_{2,3} &= \frac{b_3 l_2 - b_2 l_3}{a_2 b_3 - a_3 b_2} & y_{2,3} &= \frac{a_2 l_3 - a_3 l_2}{a_2 b_3 - a_3 b_2} \end{aligned} \qquad (14)$$

Bezeichnen wir nun die Quadrate der gemeinsamen Nenner:

$$\begin{aligned}(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 &= p_{1,2}\\ (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 &= p_{1,3}\\ (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 &= p_{2,3}\end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

so erhalten wir nach dem Jacobi'schen Satz die wahrscheinlichsten Werte x und y:

$$\begin{aligned} x &= \frac{p_{1,2}\, x_{1,2} + p_{1,3}\, x_{1,3} + p_{2,3}\, x_{2,3}}{p_{1,2} + p_{1,3} + p_{2,3}}\\ y &= \frac{p_{1,2}\, y_{1,2} + p_{1,3}\, y_{1,3} + p_{2,3}\, y_{2,3}}{p_{1,2} + p_{1,3} + p_{2,3}}\end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Man kann aber die Gl. (16) nur dann als durch arithmetische Mittelbildung im Sinne der Ausgleichsrechnung entstanden ansehen, falls die p-Werte wirklich Gewichte und die x, y-Teilgrößen als unabhängige Beobachtungen betrachtet werden können.

In Gl. (13) seien der Einfachheit halber die aus den Beobachtungen herrührenden Glieder l mit den gleichen mittleren Fehlern $\pm m$ behaftet, dann erhalten wie nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$m^2_{x_{1,2}} = \frac{b_2^2 + b_1^2}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}\, m^2 \qquad m^2_{y_{1,2}} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}\, m^2 \text{ usw.}$$

woraus die Gewichte P richtig:

$$P_{x_{1,2}} = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{b_1^2 + b_2^2} \qquad P_{y_{1,2}} = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{a_1^2 + a_2^2} \text{ usw.} \quad \ldots \quad (17)$$

sind. Da diese mit dem Werte $p_{1,2}$ der Gl. (15) nicht übereinstimmen, kann letzterer kein Gewicht im Sinne der Ausgleichsrechnung sein, zumal letzterer für x und y von den Funktionen (13) abhängend nach Gl. (17) im allgemeinen verschieden sein müssen. Es ist daher folgerichtig, daß Czuber für die p-Werte nach Gl. (15) die unterschiedliche Bezeichnung „Masse" wählte.

Die Teilgrößen in den Gl. (16) sind weiters nach Gl. (14) Funktionen derselben Beobachtungen und können deshalb in bezug auf Ausgleichung nur dann als voneinander unabhängig betrachtet werden, wenn sie freie Funktionen nach Thiele sind (vgl. [12.] u. [4, S. 220]). Zur Prüfung dieser Bedingung schreiben wir die x-Werte der Gl. (14) folgend:

$$x_{1,2} = \frac{b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\, l_1 - \frac{b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\, l_2 = [sl] \quad \ldots\ldots \quad (18a)$$

falls der Koeffizient von l_1 mit s_1, jener von l_2 mit s_2 bezeichnet wird. Analog erhalten wir:

$$x_{1,3} = \frac{b_3}{a_1 b_3 - a_3 b_1}\, l_1 - \frac{b_1}{a_1 b_3 - a_3 b_1}\, l_3 = [tl] \quad \ldots\ldots \quad (18b)$$

und

$$x_{2,3} = \frac{b_3}{a_2 b_3 - a_3 b_2}\, l_2 - \frac{b_2}{a_2 b_3 - a_3 b_2}\, l_3 = [ul] \quad \ldots \quad (18c)$$

Gleich genaue Beobachtungen vorausgesetzt sind $x_{1,2}$, $x_{1,3}$ und $x_{2,3}$ bekanntlich voneinander freie Funktionen, falls $[st] = 0$, $[su] = 0$ und $[tu] = 0$ werden. In unserem Falle müßten also hiezu die Bedingungen bestehen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \cdot \frac{b_3}{a_1 b_3 - a_3 b_1} = 0 \qquad \text{bzw. } b_2 b_3 = 0 \\
-&\frac{b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \cdot \frac{b_3}{a_2 b_3 - a_3 b_2} = 0 \qquad \text{bzw. } b_1 b_3 = 0 \quad \ldots \quad (19) \\
&\frac{b_1}{a_1 b_3 - a_3 b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2 b_3 - a_3 b_2} = 0 \qquad \text{bzw. } b_1 b_2 = 0
\end{aligned}
$$

Weil diese Bedingungen nur bei ganz speziellen b-Werten der Verbesserungsgleichungen, nicht jedoch allgemein erfüllt werden, können die x-Werte nach Gl. (18a) bis (18c) nicht wie direkte Beobachtungen angesehen werden. Dasselbe gilt auch von den y-Werten.

Da nach den vorstehenden in Gl. (16) die p keine Gewichte im Sinne der Ausgleichsrechnung sind und die x, y-Teilgrößen nicht wie voneinander unabhängige Beobachtungen behandelt werden dürfen, so können die Gl. (16) nicht als arithmetische Mittel im Sinne der Ausgleichsrechnung und daher nicht als Beweis für die Zurückführung der Methode der kleinsten Quadrate auf das arithmetische Mittel betrachtet werden.

Zusammenfassend: Die Zurückführung der Methode der kleinsten Quadrate auf das arithmetische Mittel kann bis jetzt am einwandfreiesten nur durch die hier erweiterte Helmert'sche Methode erfolgen.

Bezogene Literatur:

1. C. F. Gauß: Theoria motus corporum coelestium. Buch II. Abschn. III.
2. Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde. I. Bd. VI. Aufl. 1910.
3. S. Wellisch: Theoretische und historische Betrachtungen über die Ausgleichsrechnung. Österr. Zeitschr. f. Vermessungsw. 1907, S. 95—102, 129—137, 213—223, 245—249, 279—286, 335—345.
4. F. R. Helmert: Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. II. Aufl. 1907.
5. I. Adamczyk: Das arithmetische Mittel als Grundlage der Ausgleichsrechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate. Österr. Zeitschr. f. Vermessungsw. Bd. 1909, S. 33—44.
6. C. G. I. Jacobi: De formatione et proprietatibus determinantum. Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 22 (1841), S. 285 u. ff.
7. E. Czuber: Theorie der Beobachtungsfehler. 1891.
8. S. Wellisch: Theorie und Praxis der Ausgleichsrechnung. Bd. II: Probleme der Ausgleichsrechnung. 1910.
9. H. Barvik: Beitrag zur Ausgleichsrechnung. Österr. Zeitschr. f. Vermessungsw. 1916, S. 49—53.
10. H. Schmehl: Das arithmetische Mittel und die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen. Allg. Vermessungsnachr. 1937, S. 429—432, u. 1938, S. 583—587.
11. I. B. Haáz: A normálegyenletek megoldása középértékképzéssel. Geodéziai Közlöny, 1942, S. 111—117, 1943, S. 68—71.
12. T. N. Thiele: Theorie of observations. 1903.