Die Achse des Normalsphäroides der Erde

Karl Ledersteger [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **38** (5–6), S. 113–129

1950

Die Achse des Normalsphäroides der Erde

Von Karl L e d e r s t e g e r, Wien

Zusammenfassung: Die bestanschließenden Ellipsoide sind auch in ihren Dimensionen grundsätzlich vom mittleren Erdellipsoid zu unterscheiden; sie liefern im allgemeinen eine zu kleine Achse. Die weitgehende Unabhängigkeit der nach der S t o k e s schen Formel berechneten kontinentalen Geoidundulationen von einem Fehler in der angenommenen Achse eröffnet die Möglichkeit, den Unterschied zwischen dem H a y f o r d schen und dem bestanschließenden Ellipsoid von Europa im Betrage von 400 bis 500 *m* zu erklären und aus dem Vergleich der Undulationen mit „repräsentativen" Lotabweichungen eine Methode zur direkten Bestimmung der Achse des Normalsphäroides abzuleiten. Die Brauchbarkeit dieser Methode wird durch eine provisorische, überschlagsweise Berechnung unter Zuhilfenahme der europäischen „Partialsysteme" der Lotabweichungen erwiesen.

Summary: Principally the best fitting ellipsoids differ in their dimensions from the normal spheroid of the earth; their axis is too short. The continental undulations calculated with S t o k e s' formula are widely indifferent to an error in the length of the adopted axis and this offers a possibility to explain the difference of 400—500 *m* between H a y f o r d s and the best-fitting ellipsoid of Europe, and the comparison of undulationswith representative deflections of the vertical is a method for the direct calculation of the axis of the normal spheroid. The fitness of this method is proved by a provisory calculation using the European „partial systems" of the deflections of the vertical.

Résumé: Les ellipsoides de référence les plus probables se distinguent, en principe, aussi dans leurs dimensions de l'ellipsoïde terrestre moyen; généralement, elles fournissent pour l'axe une valeur trop petite. La grande indépendance des ondulations continentales du géoïde, calculées selon la formule de Stokes, d'une erreur dans la valeur de l'axe permet d'expliquer la différence de 400—500 *m* entre l'ellipsoïde de H a y f o r d et l'ellipsoïde le plus probable de l'Europe. En comparant les ondulations aux déviations „représentatives" de la verticale, on peut déduire une méthode pour la détermination directe de l'axe du sphéroïde normal. L'utilité de cette méthode a été prouvé par le calcul provisoire approximatif, basé sur les „systèmes partiels" des déviations de la verticale en Europe.

1.

Bekanntlich kann das mittlere Erdellipsoid als jenes mit dem Geoid konzentrische und koaxiale Ellipsoid definiert werden, dessen Abweichungen vom Geoid in radialer Richtung möglichst klein sind. Auf die physikalischen Schwierigkeiten dieser Frage wollen wir hier nicht eingehen. Man hat vielfach im Anschluß an H. B r u n s durch eine rein formale Zerlegung des Schwerepotentiales die Niveausphäroide definiert und unter ihnen jenes ausgezeichnet, das denselben Potentialwert besitzt wie das annähernd im Meeresniveau verlaufende Geoid. Das achsengleiche mittlere Erdellipsoid wird von diesem Niveausphäroid vollständig eingeschlossen, wobei die maximale Erhebung über dem Ellipsoid unter 45^0 Breite nach B r u n s 19.1 *m*, nach H e l m e r t 12.7 *m* beträgt. Kürzlich hat H. H a a l c k[1]) das „Normalsphäroid" rein physikalisch als die Figur des hydrostatischen Gleichgewichtes der Erde definiert und unter strenger Berücksichtigung aller Glieder vom Quadrat der Abplattung unabhängig von jeder Annahme über die Dichteverteilung im Erdinnern abgeleitet. Sein Normalsphäroid verläuft zum Unterschied vom B r u n s schen Niveausphäroid ganz innerhalb des achsengleichen Rotationsellipsoides, wobei der maximale Abstand unter 45^0 Breite nur 3.7 *m*

[1]) H. H a a l c k, Das physikalische Bildungsgesetz der Figur der Erde, Veröff. des Geodätischen Institutes Potsdam, Nr. 4, Berlin 1950.

beträgt. Ist $\mathfrak{a}$ die Abplattung und a die große Achse des Normalsphäroides, so liefert eine einfache Entwicklung bis einschließlich der Größen vom Quadrat der Abplattung für das mittlere Erdellipsoid den Radiusvektor:

$$r = a\left(1 - \mathfrak{a}\sin^2\psi - \frac{3}{8}\sin^2 2\psi\right), \tag{1a}$$

unter ψ die geozentrische Breite verstanden. Für das Normalsphäroid setzt H a a l c k entsprechend an:

$$r = a\left[1 - \mathfrak{a}\sin^2\psi - \left(\frac{3}{8} + \delta\right)\sin^2 2\psi\right] \tag{1 b}$$

und findet für δ die Grenzwerte:

$$0 < \delta < \frac{3}{32}\left(\frac{\omega^2 a}{g_0}\right)^2, \tag{2}$$

je nachdem die Erdmasse homogen ist oder im Mittelpunkt konzentriert gedacht werden darf. Der Parameter δ wird dann unter der Annahme bestimmt, daß sein wirklicher Wert im gleichen Verhältnis zwischen den Grenzwerten liegt wie der wirkliche Wert des Quadrates der Abplattung zwischen den entsprechenden Grenzwerten. Dabei sind bekanntlich die beiden Grenzwerte der Abplattung $\mathfrak{a} = 1:232$ und $\mathfrak{a} = 1:581$.

Für die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides, eine der wichtigsten Aufgaben der Höheren Geodäsie, steht prinzipiell nur das Schwerefeld der Erde nach Richtung und Intensität zur Verfügung. Aus der Richtung der Schwerkraft ergeben sich auf astronomisch-geodätischem Wege durch den Ausgleich der Gradmessungen oder der Lotabweichungssysteme die sogenannten bestanschließenden Ellipsoide. Diese können aber nur bis zu einem gewissen Grade das mittlere Erdellipsoid approximieren, wie schon die relativ großen Schwankungen der wichtigsten historischen „Erdellipsoide" in Achse und Abplattung lehren. Der Hauptgrund dafür liegt in der natürlichen Beschränkung der eine notwendige Voraussetzung bildenden zusammenhängenden Triangulierungen auf das Festland. Daß selbst eine kontinentale Ausdehnung des Lotabweichungssystemes nicht genügt, wird der spätere Vergleich des bestanschließenden Ellipsoides von Europa mit T a n n i s Geoid zeigen. Einen weiteren Grund bildet die Tatsache, daß gerade in mittleren Breiten, also in den Hauptzonen der Vermessungen, die mittlere Krümmung des Ellipsoides weitgehend unabhängig von der Abplattung ist. Denn es gilt:

$$R = \sqrt{MN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{(1 - e^2\sin^2\varphi)} \quad \text{und:} \quad \frac{d}{d\mathfrak{a}}\left(\frac{R}{a}\right) = 2\sin^2\varphi - 1 \tag{3}$$

Dies ist wohl auch die tiefere Ursache für die relativ große Unsicherheit bei der Ableitung dieses Parameters. Aber andererseits ist eben dadurch wenigstens keine systematische Verfälschung des Abplattungswertes zu fürchten.

Stellt man die theoretische oder normale Schwerkraft an der Oberfläche des Normalsphäroides durch die Formel:

$$g = g_0\left(1 + \beta\sin^2\varphi - \beta_1\sin^2 2\varphi\right) \tag{4}$$

dar, so liefern prinzipiell drei unter verschiedenen Breiten beobachtete Schwerewerte die drei Größen:

$$g_0,\ \beta = \frac{g_{90} - g_0}{g_0} \text{ und } \beta_1 = \frac{(g_{90} + g_0) - 2\,g_{45}}{2\,g_0} + \alpha\beta$$

Das erweiterte Clairautsche Theorem:

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2}\gamma + \frac{3}{2}\gamma\beta - \frac{93}{28}\gamma^2 - \frac{2}{49}\beta^2 \tag{5a}$$

und die Beziehung:

$$\beta_1 = \frac{3}{4}\gamma\beta + \frac{1}{32}\gamma^2 - \frac{13}{56}\beta^2, \tag{5b}$$

beide nach Haalck, gestatten aber nur theoretisch die Bestimmung der beiden Unbekannten $\mathfrak{a}$ und:

$$\gamma = \frac{\omega^2 a}{g_0}.$$

Praktisch scheitert die Lösung an den verschiedenen Größenordnungen der zwei Gleichungen. Aus demselben Grunde kann auch nicht die große Halbachse a aus dem Parameter γ abgeleitet werden. In der Praxis wird vielmehr der Wert für a von irgendeinem der geometrisch abgeleiteten Erdellipsoide übernommen und lediglich $\mathfrak{a}$ aus (5a) berechnet. Ein Fehler in a von 1 *km* wirkt sich nun in γ mit 53.10^{-8} und daher in $\mathfrak{a}$ mit 13.10^{-7}, resp. in $1:\mathfrak{a}$ mit nur rund 0.1 aus, sodaß die Bestimmung der Abplattung recht sicher ist. Die gute Übereinstimmung des aus dem Clairautschen Theorem folgenden Abplattungswertes mit der Abplattung 1:297 des Hayfordschen Ellipsoides war daher mitbestimmend dafür, daß letzteres zum Internationalen Ellipsoid erklärt wurde und man jetzt fast allgemein auch das mittlere Erdellipsoid mit dem Hayfordschen Ellipsoid identifiziert.

Grundsätzlich ist aber die definitive Entscheidung über die Abplattung nur aus dem Clairautschen Theorem zu erwarten, weil die Möglichkeit der Schweremessungen auf hoher See einmal ein über die ganze Erde symmetrisch verteiltes Beobachtungsmaterial liefern wird. Sehr bemerkenswerte Vorschläge für eine allgemeine Weltschwerevermessung hat übrigens J. de Graaff-Hunter[2]) gemacht. Ein solches symmetrisches Material ist nämlich strenge betrachtet eine notwendige Voraussetzung für die richtige Anwendung des Clairautschen Theorems. Es läßt sich zeigen, daß seine bisherige Anwendung auf asymmetrisches Material einen zu kleinen Abplattungswert geliefert hat[3]). Im Anschluß an die unter (3) zitierte Arbeit hat K. Jung[4]) dafür sogar 1:293 abgeleitet und schätzt die wahre Abplattung unter Berücksichtigung der verschiedenen astronomischen

[2]) J. de Graff-Hunter, The Figure of the Earth from Gravity Observations and the Precision Obtainable, London 1935.

[3]) K. Ledersteger, Über die Minimumeigenschaft der Schwerestörungen, Zeitschrift f. Geophysik 1935, S. 23—29.

[4]) K. Jung, Einige Zahlen über Normalschwere und Abplattung, Zeitschrift f. Geophysik 1935, S. 188—192.

Bestimmungen auf rund 1 : 295. Gegenwärtig scheint es noch am zweckmäßigsten, die Hayfordsche Abplattung festzuhalten[5]).

Schreitet man vom Normalsphäroid zum Geoid vor, so gelangt man zum Begriff der Undulationen. Auch hier haben wir wieder ein mehr geometrisches und ein rein physikalisches Verfahren zu unterscheiden. Die Lotabweichungen als die Unterschiede zwischen den physikalischen Lotrichtungen und den Normalen des Referenzellipsoides führen vermittels des astronomischen Nivellements zu den Erhebungen des Geoides über dem Ellipsoid. Diese Geoidhöhen sind wie die Lotabweichungen selbst in zweierlei Hinsicht relativ, nämlich hinsichtlich der Wahl der Bezugsfläche und hinsichtlich des willkürlichen Fundamentalpunktes des zugrundeliegenden Lotabweichungssystems. Hinzu tritt noch eine unbekannte Konstante, das heißt ein willkürlicher Höhen-Nullpunkt. Diese relativen Geoidhöhen ändern sich also mit der Verschiebung des Triangulierungsnetzes in seine „absolute" Lage und mit jedem Ellipsoidübergang.

Wesentlich verschieden hiervon sind die aus den Schwerestörungen mit Hilfe der Stokesschen Formel oder einer Kugelfunktionsentwicklung abgeleiteten Undulationen des Geoides. Sie dürfen als absolute Geoidhöhen bezeichnet werden, weil sie sich auf das Normalsphäroid beziehen, dessen kleine Achse mit der Rotationsachse der Erde zusammenfällt, und weil sie weitgehend unabhängig sind von den Dimensionen dieser Bezugsfläche, für die, wie schon gesagt, gegenwärtig meist an Stelle des mittleren Erdellipsoides das Internationale Ellipsoid verwendet wird. Schreiben wir das Stokessche Integral für die Undulationen in der Helmertschen Form:

$$N = \frac{R}{G} \int_0^\pi F(\omega)\, \Delta g_\omega\, d\omega, \qquad (6)$$

in der R den mittleren Radius des Normalsphäroids, G die mittlere Schwerebeschleunigung, F die Stokessche Funktion und ΔG_w den Mittelwert der Schwerestörung auf einem Kleinkreis vom sphärischen Radius w bedeuten, so erkennt man sofort, daß ein Fehler von 1 *km* in R vermöge:

$$N : 6371 = (N + dN) : 6372$$

nur einen Fehler:

$$dN = \frac{N}{6371} \qquad (7)$$

in der Undulation nach sich zieht, was z. B. bei einer Undulation von 50 *m* erst rund 8 *mm* ausmacht. Hingegen ist die Abplattung in den Schwerestörungen infolge des zusammengehörigen Wertesystems (4) und (5) vorweggenommen.

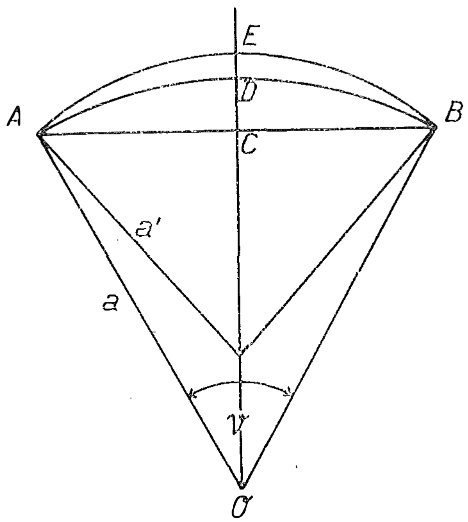
2

Jetzt sind wir in der Lage, zunächst die nicht unbedeutenden Unterschiede in den Achsen verschiedener bestanschließender Ellipsoide aus den Geoidundulationen zu erklären. Der Umstand, daß sich Krümmungsschwankungen des Geoides

---

[5]) H. Jeffreys, On the Figures of the Earth and Moon, Second Paper, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 101, London 1941.

hauptsächlich in der Achse des bestanschließenden Ellipsoides auswirken, legt den Gedanken nahe, den Zusammenhang zwischen der Geoidhebung, dem zugehörigen Öffnungswinkel und dem Achsenverhältnis zu verfolgen. Die gleiche Überlegung konnte bereits die auffallende Achsenverkürzung für das bestanschließende Ellipsoid der alten Donaumonarchie erklären [6]). Geht man unter Vernachlässigung der Abplattung von der mittleren Erdkugel ($a = 6371$ *km*) aus, so wird jede syste-



matische Geoidhebung entsprechend der Größe des herangezogenen Gebietes in einer mehr oder minder starken Achsenverkürzung des bestanschließenden Ellipsoides zum Ausdruck kommen. Auf Grund der obenstehenden Figur läßt sich ganz elementar die folgende kleine Tabelle berechnen, die die Geoidhöhen DE in Funktion des Öffnungswinkels ν und der Achsenverkürzung $d\,a = (a - a')$ gibt:

da \ ν	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
100 m	0.4 m	1.6 m	3.5 m	6.4 m	10.4 m	15.5 m	22.0 m	30.5 m
200	0.8	3.2	6.9	12.8	20.7	30.9	44.0	61.1
300	1.1	4.7	10.4	19.2	31.1	46.4	66.1	91.6
400	1.5	6.3	13.9	25.6	41.5	61.9	88.1	122.2
500	1.9	7.9	17.3	32.0	51.8	77.3	110.1	152.7
600	2.3	9.5	20.8	38.5	62.2	92.8	132.1	183.3
700	2.6	11.0	24.3	44.9	72.6	108.3	154.1	213.8
800	3.0	12.6	27.7	51.3	82.9	123.7	176.1	244.3
900	3.4	14.2	31.2	57.7	93.3	139.2	198.2	274.9
1000	3.8	15.8	34.7	64.1	103.7	154.7	220.2	305.4

[6]) K. Ledersteger, Theoretische und numerische Studien zur genäherten Ableitung eines bestanschließenden Ellipsoides für Europa, Sitz. Ber. d. Akad. d. Wiss. Wien, Bd. 156, Wien 1947.

Diese Geoidhöhen sind in noch viel höherem Maße als die aus der Stokesschen Formel folgenden Undulationen von der absoluten Größe der angenommenen Erdkugel unabhängig. Man erkennt dies unmittelbar aus der Proportionalität zwischen Hebung und Achsenverkürzung bei gegebenem Öffnungswinkel. Tatsächlich ändern sich die Tabellenwerte kaum, selbst wenn man a um $\pm$ 1000 *km* variiert. Der größte Wert (305.4) wird dabei z. B. bloß um etwas mehr als 1 *dm* geändert! Man darf also die Tabellenwerte mit den absoluten Undulationen vergleichen, d. h. die angenommene mittlere Erdkugel für das Normalsphäroid, die verkleinerte Kugel für das bestanschließende Ellipsoid oder das Geoid in dem fraglichen Bereiche nehmen.

Aus unserer Übersicht geht klar hervor, daß für kleinere Gebiete schon eine Geoidhebung von wenigen Metern eine beträchtliche Verkürzung der Achse des bestanschließenden Ellipsoides nach sich zieht. Obwohl die Potentialfunktion der Erde analytisch nicht fortsetzbar ist und daher theoretisch nur kleinere Stücke des Geoides mit großer Schärfe durch Stücke von Rotationsellipsoiden approximierbar sind, ist es wegen der großen damit verbundenen Achsenschwankungen praktisch sinnlos, für einzelne Landestriangulationen eigene bestanschließende Ellipsoide zu berechnen. Es widerspricht dies außerdem den modernen Bestrebungen nach weitgehender Vereinheitlichung der geodätischen Grundlagen und der Idee kontinentaler Zusammenschlüsse.

Speziell für Europa zeigt diese Überlegung unmittelbar, daß, ausgehend von dem annähernd zentral gelegenen Österreich, mit der Erweiterung des Lotabweichungssystems die Achse des bestanschließenden Ellipsoides ständig zunehmen muß. Denn mit wachsender meridionaler Entfernung von den Alpen wird der Geoidanstieg immer flacher verlaufen und schließlich der Einfluß des Ostseebeckens einerseits und des Mittelmeerbeckens andererseits hinzutreten. Ganz ähnlich wird mit wachsender östlicher Ausdehnung der mittlere Geoidanstieg vom atlantischen Ozean her ständig sinken und eine Vergrößerung der Achse des bestanschließenden Ellipsoides bewirken. Darum hat auch tatsächlich der Anschluß des Ostseeringes an das europäische Lotabweichungssystem die erwartete Achsenvergrößerung ergeben [7]).

Damit führte das bisher umfassendste europäische Lotabweichungssystem auf den Wert:

$$a = 6\ 377\ 879\ m \pm 37\ m, \tag{8}$$

der durch die Einbeziehung des europäischen Teiles der USSR. noch weiter ansteigen kann. Betrachtet man aber den Wert 6 378 000 *m* als Majorante für die Achse des bestanschließenden Ellipsoides von Europa, so erhebt sich sofort die Frage, warum dieses Ellipsoid um rund 400 *m* kleiner als das Internationale Haysche Ellipsoid ist. Ein unmittelbarer Vergleich dieser beiden Ellipsoide scheitert aber an dem Umstand, daß das Hayfordsche Ellipsoid aus isostatisch reduzierten Lotabweichungen berechnet wurde und die isostatische Reduktion bekanntlich auf die Undulationen des Geoides einebnend einwirkt. Rein qualitativ

[7]) K. Ledersteger, Der Anschluß des Ostseeringes an das europäische Lotabweichungssystem, Österr. Zeitschrift f. Vermessungswesen, 37. Jg., 1949.

ist es aber wahrscheinlich, daß das bestanschließende Ellipsoid von Amerika eine größere Achse besitzt als das bestanschließende Ellipsoid von Europa. Denn während in Europa die annähernd ostwestlich verlaufende Hochgebirgskette ziemlich zentral gelegen ist, folgt das Hochgebirge in Amerika im wesentlichen der Küste des Stillen Ozeans. Dadurch wird für das Innere des Kontinents die Wirkung dieses Weltmeeres weitgehend kompensiert. Würde der Gebirgskamm etwa im Mittelmeridian 100⁰ West verlaufen, so würde dies im Verein mit dem Stillen und Atlantischen Ozean eine stärkere Krümmung des Geoides und damit eine kleinere Achse des bestanschließenden Ellipsoides zur Folge haben.

Um diese Verhältnisse auch einer quantitativen Abschätzung zu unterziehen, benützen wir Tannis[8]) Tabelle der kontinentalen Undulationen des aktuellen Geoides bezüglich des Hayfordschen Ellipsoides. Diese zeigen für Nordamerika im Parallelkreis 45⁰ von der Ostküste (60⁰W) an zuerst einen Geoidabfall gegen das Innere des Kontinentes, dem in der Westhälfte ein rascher Geoidanstieg folgt, der bei Überschreiten des Felsengebirges sein Maximum erreicht. Dieser asymmetrische Geoidverlauf dürfte sich nicht zu sehr auf die Achse des bestanschließenden Ellipsoides von Amerika auswirken, noch weniger wegen der isostatischen Reduktion auf das Hayfordsche Ellipsoid. Auch fehlen zu einer besseren Beurteilung die Geoidhöhen nördlich 45⁰.

Viel klarer läßt sich der Einfluß des Geoidverlaufs in Europa verfolgen. Tanni hat, dem Beispiel Hirvonens[9]) folgend, die kontinentalen Undulationen des aktuellen Geoides für 218 Eckpunkte der 5⁰-Felder des geopraghischen Netzes berechnet. Die folgende kleine Tabelle gibt einen für die späteren Rechnungen benötigten Auszug aus den europäischen Werten bis einschließlich 30⁰ östlicher Länge:

φ \ λ	-10^0	-5^0	0^0	$+5^0$	$+10^0$	$+15^0$	$+20^0$	$+25^0$	$+30^0$
60⁰					+20.9	+14.2	+ 7.9	+ 6.8	+ 6
55⁰			30	28	+27.0	+23.4	+18.6	+16.4	+13
50⁰	+34	+31	+31.6	+32.6	+32.6	+32.6	+30.2	+25.4	+20
45⁰	+27	+18	+34.7	+40.7	+39.3	+39	+37	+32	+24
40⁰	+38	+41	+42	+36	+40	+39	+36	+31	+32
35⁰	+32	+44	+46	+43	+42	+35	+19	+24	+19

(Einheit: Meter)

Wir betrachten den Geoidverlauf für den Meridian 15⁰ Ost und den Parallelkreis 45⁰ und ziehen zur Versicherung und Glättung je zwei symmetrisch gelegene Meridiane und Parallelkreise heran. Man sieht, daß die Höhenlinie ungefähr im

[8]) L. Tanni, On the Continental Undulations of the Geoid as Determined from the Present Gravity Material, Veröff. d. Isost. Inst. Nr. 18, Helsinki 1948.

[9]L. Tanni, The Regional Rise of the Geoid in Central Europe, Veröff. d. Isostat. Inst. Nr. 22, Helsinki 1949.

) R. A. Hirvonen, The Continental Undulations of the Geoid, Veröff. d. Finnischen Geodät. Instit. Nr. 19, Helsinki 1934.

Parallel 45° verläuft. Der Geoidanstieg von 60° bis 45° geogr. Breite ist in den drei Meridianen 10°, 15° und 20° östl. Greenwich der Reihe nach: 18 *m*, 25 *m* und 29 *m*, im Mittel also 24 *m*. Der Abstieg gegen Süden ist nicht so klar ausgeprägt, schon weil die Werte für — 30° fehlen; er ist aber durch das Mittelmeerbecken recht plausibel. Um eine möglichst gleiche lineare Ausdehnung in ostwestlicher Richtung zu erzielen, betrachten wir für die Parallelkreise 50°, 45° und 40° den Geoidverlauf für je 20 Längengrade symmetrisch zu der annähernd in 10° Ost liegenden Höhenlinie. Man findet die An- und Abstiege:

$$\begin{array}{ll} \text{von } 10^0\,\text{W bis } 10^0\,\text{O}: & -\ 1.4\,m,\ +12.3\,m,\ +2.0\,m, \\ \text{von } 10^0\,\text{O bis } 30^0\,\text{O}: & +12.6\,m,\ +15.3\,m,\ +8.0\,m, \end{array}$$

im Mittel also + 8 *m*. Somit ist im Mittel aus den beiden senkrechten Richtungen der Geoidanstieg für den halben Öffnungswinkel $\frac{\nu}{2} = 15^0$ rund 16 *m*, wofür aus unserer Tabelle eine Achsenverkürzung von 460 *m* folgt. Diese Abschätzung läßt sofort einige Schlüsse zu:

1. Die Achse des bestanschließenden Ellipsoides von Europa muß um fast 500 *m* kleiner sein als die Achse des Normalsphäroides.

2. Mithin stellt im Hinblick auf (8) die auf isostatischer Grundlage gewonnene Achse des Internationalen Ellipsoides bereits eine recht gute Annäherung des gesuchten Achsenwertes des mittleren Erdellipsoides dar.

3. Schließlich scheinen damit die Bedenken Heiskanens[10]) entkräftet, daß die mangelnde Gewichtsbestimmung bei der Ableitung des Ellipsoides (8) — auf deren Schwierigkeiten ich hinlänglich hingewiesen zu haben glaube — das Resultat für die Achse ungünstig beeinflußt hat.

Aus dieser Betrachtung geht also klar hervor, daß die Achse eines bestanschließenden Ellipsoides selbst bei kontinentaler Ausdehnung des Lotabweichungssystems noch um mehrere 100 *m* von der Achse des mittleren Erdellipsoides verschieden sein kann. Der früher betonte, entgegengesetzte Effekt der mangelhaften Reduktion der Grundlinien[11]) wird von der Achsenverkürzung weit überkompensiert, worin man einen Beweis für die Kleinheit der Geoidundulationen erblicken darf. Man kann daher auch nicht behaupten, daß man im Mittel aus mehreren derartigen Ellipsoiden der Wahrheit näher kommt. Vielmehr ist es wahrscheinlich, daß die wahre Erdachse eine Majorante aller durch den Ausgleich von Lotabweichungssystemen gewonnenen Achsenwerte ist, solange man von einer isostatischen Reduktion absieht. Denn die kontinentalen Geoidhebungen werden stets eine Achsenverkürzung nach sich ziehen. Diese ist umso stärker, je größer der systematische Anteil in der kontinentalen Krümmung des Geoides ist.

Ferner ist es selbstverständlich, daß aus Lotabweichungen und astronomischen Nivellements über die absolute Größe der Geoidundulationen nichts ausgesagt werden kann. Die oben gefundenen Übereistimmung mit Tannis Geoid gilt daher nur relativ, d. h. für das Geoidgefälle.

---

[10]) W. Heiskanen, On the Isostatic Structure of the Earth's Crust. Veröff. d. Isostatischen Institutes, Nr. 24, Helsinki 1950, Seite 18.

[11]) Siehe l. c. 7), Seite 119.

3.

Die vorhergehenden Überlegungen zeigen, daß die Achsenverbesserung bei Ausgang von einem beliebigen Referenzellipsoid wegen der starken systematischen Einflüsse nicht nach dem Minimumprinzip für die restlichen Lotabweichungen bestimmt werden darf. Die Anwendung des Minimumprinzipes wäre wie bei den Schwerestörungen nur bei gleichmäßiger Verteilung der astronomischen Stationen über die ganze Erde korrekt, was natürlich eine unerfüllbare Bedingung ist. Es gibt aber einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit: man bestimmt die Achsenverbesserung so, daß nachträglich allerorts beliebige astronomische Nivellements dieselbe systematische Geoidneigung liefern wie die absoluten Undulationen. Bei einer derartigen Ausgleichung wird man nicht nur dem systematischen Anteil in den Lotabweichungen gerecht, sondern bis zu einem gewissen Grade unabhängig von der räumlichen Ausdehnung des Lotabweichungssystemes, d. h. jede Teilausgleichung, z. B. getrennt für Nordamerika und Europa, müßte dann theoretisch auf dieselbe Achse, eben die große Halbachse des Normalsphäroides führen.

Der Grundgedanke der hier vorgeschlagenen direkten Methode zur Bestimmung der Erdachse besteht also in einer Kombination der Lotabweichungsausgleichung mit der Geoidbestimmung nach der Stokesschen Formel. Letztere ist nämlich, wie oben schon bewerkt wurde, weitgehend unabhängig von dem Fehler in der angenommenen Erdachse und vermag daher die Sollwerte für die systematischen Lotabweichungen zu liefern. Liegt dann auf einer beliebigen Referenzfläche ein Lotabweichungssystem vor, so kann die Achsenverbesserung so ermittelt werden, daß die gegebenen Lotabweichungen möglichst vollständig in die Sollwerte übergeführt werden. Dann sind wirklich nur zufällige Fehler auszugleichen, wenn auf den systematischen Charakter des Geoidgefälles oder der Lotabweichungen dasselbe Gewicht gelegt wird wie auf den repräsentativen Charakter der Schwerestörungen, die in das Stokessche Integral eingeführt werden.

Derart repräsentative, d. h. für größere Gebiete typische Lotabweichungswerte liefern aber mehr oder weniger die Elemente der Partialsysteme [6]) eines kontinentalen Lotabweichungssystems. Der geometrische Sinn dieser Elemente wurde erst kürzlich dargelegt [7]). Man denke sich einen geschlossenen trigonometrischen Netzverband, der nach der Minimumforderung für die restlichen Lotabweichungen und Laplaceschen Widersprüche „absolut" gelagert wird. Dann ist der Schwerpunkt des astronomisch-geodätischen Netzes invariant gegenüber jedem beliebigen Ellipsoidübergang. Damit ist gemeint, daß seine geodätischen Koordinaten und die Ausgangsorientierung beibehalten werden können, ohne daß das Lotabweichungssystem durch den Wechsel der Referenzfläche seinen absoluten Charakter verliert. Wird dieses Netz nachträglich, und zwar am besten nach topographischen Gesichtspunkten, in größere Partialsysteme zerlegt, so werden diese Teilnetze bei getrennter Ausgleichung entsprechend dem regionalsystematischen Verhalten der Lotabweichungen verschoben und verdreht; sie gleiten gleichsam in der Fallinie des Geoides ab, selbstverständlich umso stärker, je größer das Geoidgefälle in dem betreffenden Teilbereich ist. Dadurch werden die Partialnetze auseinandergerissen oder übereinandergeschoben und man kann die

Paramcter des bestanschließenden Ellipsoides so definieren, daß diese Klaffungen unter Beibehaltung der geographischen Koordinaten der Schwerpunkte der einzelnen Partialsysteme so weit als möglich rückgängig gemacht werden.

Nunmehr wollen wir versuchen, die früher [12]) berechneten 16 Partialsysteme Europas für eine direkte Bestimmung der großen Achse des Normalsphäroids zu verwerten. Die Koordinaten und Korrektionen ihrer Schwerpunkte beziehen sich auf das System der preußischen Landesaufnahme auf dem verkleinerten Besselschen Ellipsoid. Diese Partialsysteme haben in Anbetracht ihrer verschiedenen räumlichen Ausdehnung und der ungleichmäßigen Verteilung der astronomischen Stationen sehr verschiedenes Gewicht. Aber die Schwerpunktskorrektionen stellen, weil sie ja nahe mit den Mittelwerten der ursprünglichen Lotabweichungen zusammenfallen, gerade den regionalsystematischen Anteil der Lotabweichungen dar, so daß die Einführung von Gewichten nach formalen Gesichtspunkten gänzlich unberechtigt erscheint. Letztere würden viel eher die physikalischen Verhältnisse störend beeinflussen. An ihre Stelle wird später eine gewisse kritische Auswahl treten. Wir betrachten also die 16 Schwerpunkte zunächst als gleichgewichtige Lotabweichungspunkte und die zugehörigen Elemente als primäre, jedoch bereits repräsentative Lotabweichungskomponenten (siehe Tabelle).

Die Mittelwerte dieser Komponenten:

$$\begin{aligned} d\,\varphi_0 &= -\,1.677'' \\ d\,\lambda_0 &= -\,2.527'' \\ d\,\alpha^0 &= +\,0.688'' \end{aligned} \tag{9}$$

stellen dann mit genügender Annäherung die Korrektionen auf das bestgelagerte Gesamtnetz im gemeinsamen Schwerpunkt:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 48^0\,08'\,57'' \\ \lambda_0 &= 13^0\,42'\,10'' \end{aligned} \tag{9a}$$

dar. Subtrahiert man die Differenzbeträge:

	φ	λ	$(\varphi'-\varphi)$	$(\lambda'-\lambda)$	$(\alpha'-\alpha)$
Deutschland	52° 35′ 24″	+ 14° 03′ 11″	− 1.594″	− 2.160″	+ 1.01″
Böhmen, Mähren	49° 45′ 09″	+ 14° 41′ 05″	− 1.110	− 2.991	+ 0.32
Slowakei	48° 27′ 27″	+ 20° 44′ 38″	− 1.192	− 4.374	− 0.66
Polen	52° 12′ 17″	+ 23° 45′ 19″	− 2.599	− 3.565	− 0.32
Ungarn	47° 48′ 32″	+ 20° 49′ 56″	− 0.743	− 3.422	− 0.06
Rumänien	46° 35′ 52″	+ 25° 50′ 00″	− 0.843	− 4.696	+ 0.41
Jugoslawien	44° 29′ 53″	+ 17° 34′ 03″	− 3.641	− 6.254	− 1.98
Bulgarien	42° 56′ 46″	+ 25° 00′ 08″	+ 2.693	− 6.178	− 0.80
Österreich	47° 29′ 55″	+ 13° 45′ 18″	+ 1.876	− 3.986	− 1.80
Italien	42° 26′ 02″	+ 12° 10′ 28″	− 0.432	− 2.736	− 0.34
Schweiz	46° 53′ 57″	+ 7° 55′ 16″	− 2.313	− 0.605	+ 1.71

[12]) Siehe Anmerkung 7 und K. Ledersteger, Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid, Sonderheft 3 der Österr. Zeitschrift f. Vermessungswesen, Wien 1949.

Niederlande	52° 13′ 22″	+ 5° 12′ 14″	— 2.121	— 2.161	+1.76
Frankreich	46° 45′ 12″	+ 2° 56′ 56″	— 1.514	— 1.264	+1.52
Großbritannien	51° 43′ 57″	— 5° 06′ 18″	— 5.000	+ 5.900	+7.40
Ost-Spanien	39° 49′ 30″	— 0° 25′ 41″	— 1.533	+ 3.587	+5.33
Ostseering	58° 09′ 50″	+ 20° 18′ 12″	— 6.772	— 5.535	— 2.50
Mittel	48° 08′ 57″	+ 13° 42′ 10″	— 1.677	— 2.527	+0.688

$w_m = +2'' 57$

	$\Delta\varphi_B$	$\Delta\lambda_B$	$\Delta\varphi_{BH}$	$\Delta\lambda_{BH}$	ξ_{Soll}	$\Delta\eta_{Soll}$
Deutschland	+0.086″	+0.292″	+0.00″	+0.31″	+3.16″	+2.10″
Böhmen, Mähren	+0.575	+0.460	+0.53	— 0.41	+2.49	0.00
Slowakei	+0.528	— 1.618	+0.51	— 1.28	+2.52	+4.11
Polen	— 0.868	— 0.733	— 0.97	— 0.20	+3.58	+3.49
Ungarn	+0.978	— 0.656	+0.98	— 0.31	+2.52	+4.03
Rumänien	+0.894	— 1.759	+0.92	— 1.19	+2.29	+5.57
Jugoslawien	— 1.937	— 3.553	— 1.80	— 3.38	— 0.19	+1.52
Bulgarien	+4.427	— 3.251	+4.62	— 2.75	— 0.37	+3.35
Österreich	+3.553	— 1.445	+3.57	— 1.44	+2.49	0.00
Italien	+1.232	— 0.157	+1.47	— 0.22	+0.15	+0.32
Schweiz	— 0.691	+1.767	— 0.66	+1.49	+2.71	+0.64
Niederlande	— 0.530	— 0.027	— 0.63	— 0.48	+1.71	+0.50
Frankreich	+0.048	+0.964	+0.07	+0.46	+2.24	— 3.20
Großbritannien	— 3.561	+7.704	— 3.72	+6.72	— 2.77	+1.07
Ost-Spanien	— 0.019	+5.918	+0.35	+5.32	+1.46	— 0.65
Ostseering	— 5.053	— 2.922	— 5.13	— 2.52	+3.95	+1.93

$$\begin{aligned} d\varphi_k &= -1.677'' \cos l - 0.460'' \sin l \\ d\lambda_k &= -2.527'' - 1.672'' \operatorname{tg} \varphi_k \sin l + p_5 \sec \varphi_k \,.\, 334 \,.\, 10^{-8} \end{aligned} \qquad (10)$$

von den ursprünglichen Elementen, so gewinnt man die „absoluten“ Lotabweichungen $\Delta\varphi_B$ und $\Delta\lambda_B$ auf dem Besselschen Ellipsoid.

Weil aber den von Tanni berechneten Geoidundulationen die Hayfordsche Abplattung zugrundeliegt, ist noch der weitere Übergang auf diese erforderlich. Die Zunahme der Besselschen auf die Hayfordsche Abplattung:

$$d\alpha = +2423 \,.\, 10^{-8}$$

führt auf die zusätzlichen Verschiebungen:

$$\begin{aligned} d\varphi_k &= (2\, b'' \cos^2 \varphi_m - p_5 \sin^2 \varphi_m) \,.\, 2423 \,.\, 10^{-8} \\ d\lambda_k &= -l'' \cos \varphi_0 \sec \varphi_k \sin^2 \varphi_0 \,.\, 2423 \,.\, 10^{-8} = -l'' \sec \varphi_k \,.\, 897 \,.\, 10^{-8} \end{aligned} \qquad (11)$$

die, von den $\Delta\varphi_B$ und $\Delta\lambda_B$ subtrahiert, die absoluten Lotabweichungen auf einem Ellipsoid von der Besselschen Halbachse und der Hayfordschen

Abplattung ($\Delta\varphi_{BH}$, $\Delta\lambda_{BH}$) ergeben. Damit sind die Ausgangswerte für die folgende Ausgleichung gewonnen.

Die Sollwerte müssen aus den kontinentalen Undulationen des aktuellen Geoides abgeleitet werden (siehe die frühere Tabelle nach T a n n i). Die bekannte Grundformel des astronomischen Nivellements:

$$d\,N = \varepsilon\,d\,s = (\xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha)\,d\,s, \tag{12}$$

die die Erhebungen des Geoids liefert, wenn man in der der ε-Komponente der Lotabweichung abgewendeten Richtung vorwärtsschreitet, kann sofort für die beiden Hauptrichtungen des Meridians und Parallels ($\alpha = 0^0$ und 90^0) spezialisiert werden, in denen wir jeweils lineares Gefälle des Geoides innerhalb der 5^0-Felder voraussetzen. Drückt man noch $d\,s$ in Einheiten von 206 265 m aus, so ergibt sich für $d\,N$ in Metern:

$$\left.\begin{aligned} d\,N &= -\frac{\xi''}{\rho''}\,ds = -\,\xi''\left(\frac{ds_m}{206\ 265''}\right) \\ \text{und:}\quad d\,N &= -\frac{\eta''}{\rho''}\,ds = -\,\Delta\lambda''.\cos\varphi\,.\left(\frac{ds_p}{206\ 265''}\right), \end{aligned}\right\} \tag{13a}$$

aus welchen Gleichungen die Sollwerte der repräsentativen Lotabweichungskomponenten folgen:

$$\xi'' = -\,m\,d\,N;\quad \Delta\lambda'' = -\,p\,d\,N. \tag{13b}$$

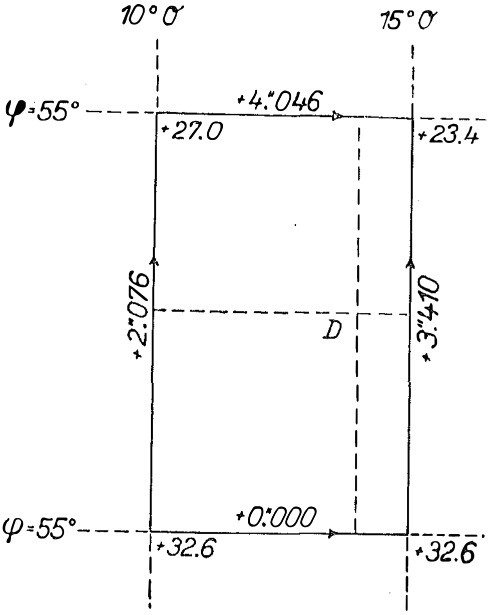
Zur Berechnung der Koeffizienten:

$$m = \frac{206\ 265''}{ds_m};\quad p = \frac{206\ 265''}{\left(\dfrac{N\cos\varphi}{\rho''}\right) 18000''\cos\varphi} \tag{13c}$$

entnimmt man den Tafeln für das Internationale Ellipsoid für die gegebenen sechs Breitenwerte die Meridianbogenlängen B und die linearen Beträge der Sekundenbögen der Parallelkreise:

φ	$B\,(m)$	$d\,s_m$	m	$\left(\frac{N\cos\varphi}{\rho''}\right)$	p
60^0	6 654 228			15.500 776	1.4785
		556 865	0.3704		
55^0	6 097 363			17.777 015	1.1238
		556 404	0.3707		
50^0	5 540 959			19.916 437	0.8951
		555 922	0.3710		
45^0	4 985 037			21.902 916	0.7399
		555 432	0.3714		
40^0	4 429 605			23.721 588	0.6306
		554 951	0.3717		
35^0	3 874 654			25.358 940	0.5516

Die einfache numerische Berechnung der Sollwerte sei für den Schwerpunkt des Partialsystems Deutschland gezeigt. In den Randlinien des zugehörigen Feldes ist:



Meridian 10^0 Ost	: $dN = -5.6\ m$	;	$\xi = +2.076''$
Meridian 15^0 Ost	: $dN = -9.2\ m$	;	$\xi = +3.410$
Parallel 50^0	: $dN = 0.0\ m$	;	$\Delta\lambda = 0.000$
Parallel 55^0	: $dN = -3.6\ m$	;	$\Delta\lambda = +4.046$

Durch lineare Interpolation findet man schließlich die gesuchten Sollwerte.

$$\xi = +3.16''; \quad \Delta\lambda = +2.10''$$

Bei der Aufstellung der Fehlergleichungen für die Verbesserung der großen Halbachse:

$$\Delta\varphi_{BH} + \mathfrak{p}_5 \frac{da}{a} = \xi_{\,Soll}$$

$$\Delta\lambda_{BH} + l'' \cos\varphi_0 \sec\varphi_K \cdot \frac{da}{a} = \Delta\lambda_{Soll}, \tag{14}$$

in denen wie auch in (10) und (11) $\mathfrak{p}_5$ den bekannten H e l m e r t schen Koeffizienten:

$$\mathfrak{p}_5'' = b'' - \frac{l''^2}{4\rho''} \sin(\varphi_0 + \varphi_K) \text{ mit: } \begin{matrix} b'' = (\varphi_K - \varphi_0)'' \\ l'' = (\lambda_K - \lambda_0)'' \end{matrix}$$

darstellt, machen sich nun gewisse Unzulänglichkeiten bemerkbar, die weniger in der Unsicherheit der kontinentalen Undulationen als vielmehr in dem Umstand gelegen sind, daß die Ausgangswerte der 16 Partialsysteme nicht genügend repräsentativ sind. Sie bringen ja den regionalsystematischen Charakter der Lotabweichungen für ein teilweise verhältnismäßig kleines Gebiet zum Ausdruck und können daher nicht in allen Fällen mit den mittleren Lotabweichungskomponenten der

5^0-Felder Tannis verglichen werden. Aus demselben Grunde erschienen auch bei Tanni die kontinentalen Undulationen von einem regionalen Anteil überlagert, der dort, wo genügend viele Schweremessungen vorliegen, aus den kleineren 1^0-Feldern berechnet wurde. Am auffallendsten ist dieser Mangel beim Partialsystem Ost-Spanien, das sich auf einen schmalen Streifen nahe der Ostküste des Landes stützt und daher den regionalsystematischen südöstlichen Geoidabfall gegen das Mittelmeer zeigt. Es scheint daher am besten, dieses Partialsystem von der weiteren Rechnung auszuschließen. Ähnliches gilt für die meridionale Lotabweichungskomponente in Jugoslawien. Hier läuft die Küstenlinie der Adria quer durch das 5^0-Feld, so daß für die überwiegenden Küstenstationen ein starker regionaler Einfluß im Sinne eines nördlichen Geoidanstieges zu erwarten ist. Ohne Kombination mit italienischen Stationen, die in dasselbe Feld fallen, kann daher diese Komponente nicht für genügend repräsentativ gelten.

Ein weiterer Grund für die völlige Unbrauchbarkeit einiger Fehlergleichungen liegt in dem Umstand, daß sich an einigen Stellen ein empfindlicher Materialmangel schon bei der Berechnung des europäischen Lotabweichungssystems [12]) recht unangenehm fühlbar gemacht hat. So wurde schon dort (Seite 113) der Schweizer Breitenwert als „bis zu einem gewissen Grade zufällig" bezeichnet, weil die ursprünglichen meridionalen Lotabweichungen zwischen $+17''$ und $-25''$ schwanken. Ferner ist für das Partialsystem Niederlande und Belgien „die Längenkorrektion mit einer größeren Unsicherheit behaftet" (Seite 113), was schließlich auch für Großbritannien gilt. In letzterem Falle ist übrigens auch die Berechnung des Sollwertes auf eine Abschätzung beschränkt, weil die Geoidhöhe für den Punkt 55^0 Nord und 5^0 West nicht vorliegt. Hier konnte der ξ-Wert nur als allgemeines arithmetisches Mittel der meridionalen Lotabweichungskomponenten des darunter liegenden 5^0-Streifens für die Meridiane 10^0 W ($-2.597''$, $q=1$), 5^0 W ($-4.823''$, $q=2$) und 0^0 ($+1.150''$, $q=1$) definiert werden, während sich der Längenwert als Mittel aus den beiden symmetrischen Beträgen im Parallel 50^0 ($+2.685''$ und $-0.536''$) ergab. Eine ähnliche Mittelung des Längenwertes war auch für das Partialsystem Bulgarien notwendig, weil dessen Schwerpunkt genau im Meridian 25^0 liegt. Die beiden, direkt für den Parallel des Schwerpunktes berechneten $\Delta\lambda$-Komponenten ($+3.476''$ und $+3.233''$) differieren hier aber nur geringfügig, so daß das Mittel sehr verläßlich erscheint.

Schon alle diese Bemerkungen zeigen, daß die folgende Rechnung nur einen orientierenden Charakter haben kann. Ihr Zweck ist lediglich der Nachweis, daß die vorgeschlagene Methode praktisch brauchbar ist und daß die oben gemachten Schlüsse sich numerisch belegen lassen.

Nach Ausschluß der erwähnten Lotabweichungskomponenten stehen für die direkte Bestimmung der großen Halbachse des Normalsphäroids 13 Breiten- und ebensoviele Längengleichungen zur Verfügung. Letztere werden zwecks Rückführung auf gleiches Gewicht sofort mit dem jeweiligen Cosinus der geographischen Breite multipliziert. Als Unbekannte wird der Wert:

$$u = 10\,000 \, \frac{da}{a} \tag{15}$$

eingeführt. Außer den Fehlergleichungen werden in der folgenden Tabelle noch die restlichen v-Werte ausgewiesen. Die Gleichungen mit negativem Koeffizienten von u sind selbstverständlich vorher mit — 1 multipliziert worden.

	Breitengleichungen:			Längengleichungen:		
	$0.0001\, \mathfrak{p}_5\, u$		v	$0.0001\, k_1 . u$		v
Deutschland	$1.5985\, u =$	$+3.16''$,	$-0.49''$;	$0.0841\, u =$	$+1.09''$,	-0.95
Böhmen, Mähren	0.5757	$+1.96$	-1.00	0.2358	$+0.26$	$+0.13$
Slowakei	0.0336	$+2.01$	-1.95	1.6912	$+3.57$	-0.75
Polen	1.3039	$+4.55$	-2.37	2.4145	$+2.26$	$+1.77$
Ungarn	0.2019	-1.54	$+1.88$	1.7124	$+2.91$	-0.05
Rumänien	0.7888	-1.37	$+2.69$	2.9137	$+4.64$	$+0.23$
Jugoslawien				0.9282	$+3.50$	-1.95
Bulgarien	2.0736	$+4.99$	-1.53	2.7140	$+4.47$	$+0.06$
Österreich	0.2342	$+1.08$	-0.69	0.0125	$+0.97$	-0.95
Italien	2.0612	$+1.32$	$+2.12$	0.3671	-0.40	$+1.01$
Schweiz				1.3887	$+0.58$	$+1.74$
Niederlande	1.3549	$+2.34$	-0.08			
Frankreich	0.6834	-2.17	$+3.31$	2.5830	$+2.51$	$+1.80$
England	0.7425	$+0.95$	$+0.29$			
Ostseering	3.5397	$+9.08$	-3.17	1.5854	$+2.35$	$+0.30$

Die Ausgleichung liefert:

$$\frac{da}{a} = +0.0001\ 6702 \pm 0.0000\ 3200 \tag{16a}$$

oder, ausgehend von der Besselschen Achse 6 377 397 m:

$$d\,a = +(1065 \pm 204)\ m, \tag{16b}$$

also die Achse des Normalsphäroides oder des mittleren Erdellipsoides:

$$a = 6\ 378\ 462\ m \pm 204\ m. \tag{16c}$$

Trotz der relativ großen Unsicherheit dieser Überschlagsrechnung darf das Ergebnis als recht befriedigend bezeichnet werden. Gegenüber dem bestanschließenden Ellipsoid (8) ist die Achse um fast 600 m gestiegen, was wohl auf den prinzipiellen Unterschied zwischen bestanschließendem Ellipsoid und Normalsphäroid hindeutet. Sodann ist der gefundene Wert nur wenig größer als Hayfords Resultat. Der frühere Schluß hinsichtlich dieses Ellipsoides scheint damit bestätigt. Derzeit besteht nicht der geringste Grund, das Internationale Ellipsoid aufzugeben.

Die Mängel und der provisorische Charakter der vorhergehenden Ausgleichung wurden schon genügend betont. Höchstwahrscheinlich kann die Sicherheit in der Bestimmung der Achse des Normalsphäroids auch bei dem derzeit vorliegenden, noch recht mangelhaften Material beträchtlich gesteigert werden, wenn die Partialsysteme entsprechend den 5^0-Feldern Tannis gewählt werden. Auch ist es sicher korrekter, die Verschiebungsgrößen des trigonometrischen Netzverbandes gleichzeitig mit der Achsenverbesserung als Unbekannte anzusetzen. Damit gewinnt man dann auch eine von der Minimumbedingung für die restlichen Lotabweichungen unabhängige, wahrhaft absolute Lagebestimmung und Orientierung des Netzverbandes. Auf Grund ähnlicher Überlegungen hat jüngst Ö l a n d e r[13]) aus genäherten astronomischen Nivellements durch Vergleich mit T a n n i s aktuellem Geoid die absolute Orientierung des Ostseeringes zu bestimmen versucht. Denn jede Minimumbedingung für die Lotabweichungen kann grundsätzlich nur für die bestanschließenden Ellipsoide, niemals aber für das Normalsphäroid einen klaren Sinn haben. Das Wesen der hier entwickelten Methode zur Bestimmung der wahren Erdachse beruht ja gerade in der vollständigen Bedachtnahme auf die systematischen Anteile in den Lotabweichungen.

Eine unter diesen Gesichtspunkten breiter angelegte Untersuchung und deren Ausdehnung auf Amerika ist geplant. Freilich werden sich definitive Ergebnisse erst in einigen Jahrzehnten nach planmäßiger Durchführung der Weltschwerevermessung und der kontinentalen astronomischen Vermessungen und Netzzusammenschlüsse erzielen lassen.

Abschließend scheint es vielleicht nicht überflüssig, den prinzipiellen Unterschied zwischen bestanschließendem Ellipsoid und mittlerem Erdellipsoid noch schärfer zu betonen, weil man bisher vielfach mit „bestanschließenden Ellipsoiden" das Normalsphäroid approximieren wollte und dabei auf die Vorzüge der isostatischen Reduktion hinwies. Jedes wahrhaft bestanschließende Ellipsoid stellt aber, wie schon der Name besagt, selbst bei kontinentaler Ausdehnung des Lotabweichungssystems ein Ellipsoid dar, das sich möglichst enge an einen bestimmten Ausschnitt des tatsächlichen Geoids anschmiegen soll. Wegen der Weltmeere gibt es also nicht ein bestanschließendes Ellipsoid schlechtweg, sondern nur etwa ein bestanschließendes Ellipsoid von Amerika oder Europa. Hält man hieran fest, so darf man meiner Meinung nach die Lotabweichungen nicht isostatisch reduzieren. Man würde ja sonst gerade die die Krümmung des betreffenden Geoidteiles wesentlich bestimmenden regionalsystematischen Eigenheiten wegrechnen und müßte nachträglich diese Reduktion wieder rückgängig machen, ganz ähnlich wie man bei der Geoidbestimmung nach der S t o k e s schen Formel zwischen dem Co-Geoid und dem aktuellen Geoid zu unterscheiden hat. Auf diese Weise können die bestanschließenden Ellipsoide geradezu der Geoidforschung dienstbar gemacht werden.

Ganz anders liegen aber die Verhältnisse, wenn die Lotabweichungsausgleichung die Approximation des mittleren Erdellipsoides zum Ziel hat. Sucht man die Normalfigur der Erde, so ist die isostatische Reduktion ein geeignetes Mittel, von der natürlichen Beschränkung der Lotabweichungssysteme unabhängig zu werden und „repräsentative" Werte zu schaffen, die die Verhältnisse der Normalfigur der Erde widerspiegeln. Die große Bedeutung einer einheitlichen Bezugsfläche für alle Triangulierungen der Erde ist unbestritten. Ebenso selbstverständlich aber ist es dann, daß als solche am besten jenes Ellipsoid in Frage kommt, das mit dem Normalsphäroid nahe zusammenfällt. Die bisher beste Approximation des mittleren Erdellipsoides stellt nun anscheinend das H a y f o r d sche Ellipsoid dar, gerade weil es auf isostatisch reduzierten Lotabweichungen beruht.

---

[13]) V. R. Ö l a n d e r, On the Geoid in the Baltic Area and the Orientation of the Baltic Ring, Veröff. d. Finnisch-geodät. Institutes, Nr. 38, Helsinki 1950.

Das Internationale Ellipsoid ist eben gar nicht das bestanschließende Ellipsoid von Amerika. Damit steht im Einklang, daß Jeffreys[14]) aus nicht isostatisch reduzierten Lotabweichungen den kleineren Achsenwert 6 378 099 *m* gefunden hat. Unser Vergleich in Abschnitt 2 ist also ein Vergleich zwischen dem bestanschließenden Ellipsoid von Europa und dem mittleren Erdellipsoid und nicht ein Vergleich zwischen zwei bestanschließenden Ellipsoiden. Dann aber scheint dieser Vergleich und das damit halbwegs übereinstimmende provisorische Ergebnis für die Achse des Normalspäroids umgekehrt auch die Berechtigung dafür zu erweisen, daß das bestanschließende Ellipsoid von Europa ohne isostatische Reduktion berechnet wurde. Andererseits gewinnt dadurch Heiskanens älterer Achsenwert aus den europäischen Gradmessungen[15]), der bekanntlich vom Hayfordschen Wert nur um 9 *m* abweicht, erhöhte Bedeutung. Jeder Widerspruch scheint zu schwinden, wenn man nur bestanschließendes Ellipsoid und die Approximation des mittleren Erdellipsoides scharf auseinanderhält. Nur für ein fiktives Lotabweichungssystem, das sich gleichmäßig über die ganze Erde erstreckt, würden beide zusammenfallen.

Es gibt also prinzipiell zwei Methoden zur Bestimmung des Normalsphäroides: einmal die Ausgleichung isostatisch reduzierter Lotabweichungen, die gegenüber der Verwendung unreduzierter Werte immer eine Achsenvergrößerung ergeben muß, welche auch den Betrag von 500 *m* erreichen oder sogar übersteigen kann. Je besser dabei die gemachten Annahmen der tatsächlichen Massenlagerung in der Erdkruste entsprechen, umso eher müssen verschiedene Kontinente fast denselben Achsenwert liefern.

Sodann die hier vorgeschlagene direkte Methode. Diese vermeidet bewußt die isostatische Reduktion und operiert dementsprechend mit den kontinentalen Undulationen des aktuellen Geoids. Gerade durch diese Unabhängigkeit von isostatischen Voraussetzungen kann sie ein weiteres Glied in der Beweiskette für das tatsächliche Bestehen des näherungsweisen Massenausgleiches in der Erdkruste bilden.

Über Form- und Größenänderungen von photographischen Platten und Filmen für Meßzwecke

Von Dr. Ernst Rüst, Heerbrugg

Die Maßhaltigkeit von Filmen und Platten ist eine für den Photogrammeter außerordentlich wichtige Frage. Die immer höheren Genauigkeitsforderungen für Aufnahme- und Auswertegeräte bedingen ein genaues Studium der Eigenschaften der Aufnahmeschichten. Durch die kriegsbedingte Abgeschlossenheit fehlt jedoch der Überblick über die in den letzten Jahren gesammelten Kenntnisse teilweise und es scheint daher geboten, wenigstens kurz über den heutigen Stand zu berichten.

[14]) H. Jeffreys, On the Figures of the Earth and Moon, Third Paper, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Geophys. Suppl. Vol. V, Nr. 7, London 1948.

[15]) W. Heiskanen, Die Erddimensionen nach den europäischen Gradmessungen, Veröff. d. Finnisch-geodät. Institutes, Helsinki 1926.