

Paper-ID: VGI_195016



Über Gewichte beim gemeinsamen Ausgleich von Seiten und Winkeln

Wilhelm Embacher ¹

¹ *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **38** (5–6), S. 137–140

1950

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Embacher_VGI_195016,  
  Title =  {"\U}ber Gewichte beim gemeinsamen Ausgleich von Seiten und Winkeln},  
  Author = {Embacher, Wilhelm},  
  Journal = {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {137--140},  
  Number = {5--6},  
  Year = {1950},  
  Volume = {38}  
}
```



Literatur:

Allg. Verm. Nachr. 1934, S. 472, K e r r l.

Zeitschr. f. Verm.Wesen 1933, F ö r s t n e r, Ausgleich von Pol. Zügen u. Netzen.

Zeitschr. f. Verm.Wesen 1939, H u b e r - R i n n e r, Triangulierung mit Pol.Zügen hoher Genauigkeit.

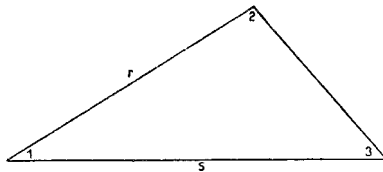
Zeitschr. f. Verm.Wesen 1941, R i n n e r, Kniffe für die Kleintriangulierung.

Über Gewichte beim gemeinsamen Ausgleich von Seiten und Winkeln

Von Dipl.-Ing. Dr. techn. Wilhelm E m b a c h e r

Bei der Gewichtsbestimmung verschiedenartiger Größen ist das Resultat nach dem Ausgleich von der Wahl der Einheiten der mittleren Fehler unabhängig, wenn nur die Widersprüche in denselben Einheiten ausgedrückt und die Seiten zur Berechnung der Koeffizienten in denselben Einheiten, bzw. die logarithmischen Differenzen für dieselben Einheiten eingeführt werden.

Das läßt sich an einem einfachen Beispiel, einem Dreieck mit zwei gemessenen Seiten und drei gemessenen Winkeln zeigen. Es seien m_r und m_s die mittleren Fehler der Seiten r und s (Fig. 1), während m_w der für alle drei Winkel gleich große mittlere



Fehler sein soll. Für den Ausgleich nach bedingten Beobachtungen sind zwei Bedingungsgleichungen notwendig. Eine lineare Polyongleichung:

$$[1] + [2] + [3] - 180^\circ = 0$$

und eine Basisgleichung:

$$[r] \sin [2] - [s] \sin [3] = 0,$$

wenn die Werte in den eckigen Klammern die theoretisch richtigen Werte bedeuten. Die Verbesserungsgleichungen dazu werden die Form haben:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + w_1 = 0$$

und

$$b_r v_r + b_s v_s + b_2 v_2 + b_3 v_3 + w_2 = 0.$$

Der Koeffizientenspiegel für die Aufstellung der Korrelatengleichungen lautet also:

a	b	$\frac{1}{p}$	$\frac{aa}{p}$	$\frac{ab}{p}$	$\frac{bb}{p}$
.	b_r	m_r^2	.	.	$b_r^2 m_r^2$
.	b_s	m_s^2	.	.	$b_s^2 m_s^2$
1	.	m_w^2	m_w^2	.	.
1	b_2	m_w^2	m_w^2	$b_2 m_w^2$	$b_2^2 m_w^2$
1	b_3	m_w^2	m_w^2	$b_3 m_w^2$	$b_3^2 m_w^2$

Werden die mittleren Fehler der Seiten in der nächst größeren Einheit ausgedrückt, also z. B. in *cm* statt in *mm*, so ändert sich die zweite Verbesserungsgleichung

$$b_r \nu_r + b_s \nu_s + \frac{b_2}{10} \nu_2 + \frac{b_3}{10} \nu_3 + \frac{w_2}{10} = 0$$

oder

$$10 b_r \nu_r + 10 b_s \nu_s + b_2 \nu_2 + b_3 \nu_3 + w_2 = 0.$$

In diesem Fall sieht der Koeffizientenspiegel folgendermaßen aus:

<i>a</i>	<i>b'</i>	$\frac{1}{p}$	$\frac{aa}{p}$	$\frac{ab'}{p}$	$\frac{b'b'}{p}$
.	10 <i>b_r</i>	$\frac{m_r^2}{100}$.	.	<i>b_r</i> ² <i>m_r</i> ²
.	10 <i>b_s</i>	$\frac{m_s^2}{100}$.	.	<i>b_s</i> ² <i>m_s</i> ²
1	.	<i>m_w</i> ²	<i>m_w</i> ²	.	.
1	<i>b₂</i>	<i>m_w</i> ²	<i>m_w</i> ²	<i>b₂</i> <i>m_w</i> ²	<i>b₂</i> ² <i>m_w</i> ²
1	<i>b₃</i>	<i>m_w</i> ²	<i>m_w</i> ²	<i>b₃</i> <i>m_w</i> ²	<i>b₃</i> ² <i>m_w</i> ²

Man erhält also in beiden Fällen die gleichen Koeffizienten und daher auch die gleichen Korrelaten. Aus der Verbesserungsgleichung

$$\nu_i = \frac{1}{p_i} (a_i k_1 + b_i k_2)$$

ist zu ersehen, daß auch die Verbesserungen unabhängig von der Größe der Einheiten der mittleren Fehler sind. Werden dagegen keine Gewichte eingeführt, so erhält man verschiedene Lösungen, je nachdem die Seitenwidersprüche in Millimetern, Zentimetern oder Metern oder die Winkelwidersprüche in Sekunden, Minuten, in Alt- oder Neusekunden ausgedrückt werden. Es sei hier die oben angeführte Aufgabe mit einem zahlenmäßigen Beispiel angeführt:

	Gemessene Winkel:	Gemessene Seiten:
(1)	28° 12' 50''	<i>r</i> = 45,501 <i>m</i>
(2)	136° 03' 00''	<i>s</i> = 116,400 <i>m</i>
(3)	15° 43' 50''	

Man erhält folgende Verbesserungen für die Winkelwidersprüche in Sekunden und Seitenwidersprüche jeweils in Millimeter, Zentimeter und Meter eingeführt

	<i>w_{mm}</i>	<i>w_{cm}</i>	<i>w_m</i>
<i>ν_r</i>	-15,9 <i>mm</i>	-2,1 <i>cm</i>	-0,022 <i>m</i>
<i>ν_s</i>	+ 6,1 <i>mm</i>	+0,7 <i>cm</i>	+0,008 <i>m</i>
<i>ν₁</i>	+ 1'' 4	+6'' 6	+6'' 7
<i>ν₂</i>	+ 5'' 0	+6'' 6	+6'' 7
<i>ν₃</i>	+13'' 6	+6'' 8	+6'' 7

Die Rechnung wurde ohne Gewichte, bzw. mit dem Gewicht 1 für alle Größen durchgeführt. Das entspricht einem mittleren Fehler von $\pm 1 \text{ mm}$, $\pm 1 \text{ cm}$, $\pm 1 \text{ m}$ der Seiten gegenüber einem mittleren Fehler von $\pm 1''$ der Winkel. Offensichtlich ist die Änderung der Verbesserungen von der Reihe mit den Widersprüchen in Zentimetereinheiten zur Reihe mit den Widersprüchen in Metern wesentlich kleiner als die Änderung der Verbesserungen von der ersten zur zweiten Reihe. Das läßt sich auch allgemein zeigen.

Wird angenommen, es wären zwei Bedingungsgleichungen vorhanden, so haben die Verbesserungsgleichungen die Form:

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2. \quad (1)$$

Sind a , b und damit k_1 und k_2 variabel, so ist die Änderung der Verbesserung

$$\Delta v_i = k_1 \Delta a_i + a_i \Delta k_1 + k_2 \Delta b_i + b_i \Delta k_2, \quad (2)$$

wenn

$$\begin{aligned} \Delta k_1 = & \frac{\partial k_1}{\partial a_1} \Delta a_1 + \frac{\partial k_1}{\partial a_2} \Delta a_2 + \dots + \frac{\partial k_1}{\partial a_n} \Delta a_n + \frac{\partial k_1}{\partial b_1} \Delta b_1 + \\ & + \frac{\partial k_1}{\partial b_2} \Delta b_2 + \dots + \frac{\partial k_1}{\partial b_n} \Delta b_n \end{aligned} \quad (3)$$

und

$$\begin{aligned} \Delta k_2 = & \frac{\partial k_2}{\partial a_1} \Delta a_1 + \frac{\partial k_2}{\partial a_2} \Delta a_2 + \dots + \frac{\partial k_2}{\partial a_n} \Delta a_n + \frac{\partial k_2}{\partial b_1} \Delta b_1 + \\ & + \frac{\partial k_2}{\partial b_2} \Delta b_2 + \dots + \frac{\partial k_2}{\partial b_n} \Delta b_n \end{aligned} \quad (4)$$

bedeutet. Die Änderung von a und b ist durch die Änderung der Wahl der Einheit vorgegeben, es muß also noch Δk_1 und Δk_2 , d. h. die Korrelatenänderung, untersucht werden. Aus den Korrelatengleichungen

$$\left. \begin{aligned} [aa] k_1 + [ab] k_2 + w_1 &= 0 \\ [bb] k_2 + w_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ergeben sich die Korrelaten mit

$$k_2 = - \frac{w_2 - w_1 \frac{[ab]}{[aa]}}{[bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]}} = - \frac{w_2 - w_1 \frac{b_2 + b_3}{3}}{(b_r^2 + b_s^2 + b_2^2 + b_3^2) - \frac{(b_2 + b_3)(b_2 + b_3)}{3}} \quad (6)$$

und

$$k_1 = - \frac{w_1 + [ab] k_2}{[aa]} = - \frac{w_1 + (b_2 + b_3) k_2}{[aa]} \quad (7)$$

Veränderlich ist nur b_r und b_s , also folgt für die Änderung von k_2 und k_1

$$\Delta k_2 = \frac{2 \left(w_2 - w_1 \frac{b_2 + b_3}{3} \right) \left(b_r \Delta b_r + b_s \cdot \Delta b_s \right)}{\left[(b_r^2 + b_s^2 + b_2^2 + b_3^2) - \frac{(b_2 + b_3)(b_2 + b_3)}{3} \right]^2} \quad (8)$$

und

$$\Delta k_1 = - \frac{b_2 + b_3}{3} \Delta k_2. \quad (9)$$

Die Korrelaten ändern sich bei kleinem b_r und b_s sehr rasch, ihre Änderung nimmt bei zunehmendem b_r und b_s , also wenn die Seiten in größeren Einheiten ausgedrückt werden, ab. Die Abnahme der Änderung erfolgt nicht linear, was besonders bei Δk_2 deutlich zu sehen ist, wo b_r und b_s im Zähler linear, aber im Nenner in der vierten Potenz vorkommen. k_2 absolut genommen wird kleiner, je größer die Einheit für die Seiten gewählt wird, während der absolute Betrag der ersten Korrelate zunimmt. Formel (7) zeigt, daß k_1 bei immer kleiner werdendem k_2 in

$$k_1 = - \frac{w_1}{[aa]} \quad (10)$$

übergeht.

Das praktische Ergebnis dieser Untersuchung besteht darin, daß der strenge Ausgleich von Seiten und Winkeln durch einen Näherungsausgleich vollwertig ersetzt werden kann, wenn die mittleren Fehler der gemessenen Größen Unterschiede aufweisen, die etwa dem Gewichtsverhältnis 1:10 in dem oben gezeigten Beispiel entsprechen. In einem solchen Fall ist es dann einfacher, die Gewichte wegzulassen, die Widersprüche beispielsweise in Sekunden und Metern einzuführen und die Korrelatengleichungen getrennt aufzulösen.

Referate

Die geodätische Woche Köln 1950

Von Prof. Dr. K. H u b e n y, Graz

Vom 2. bis 8. Augustl. J. fand zum erstenmale seit Kriegsende in Köln eine Tagung geodätisch interessierter Kreise der deutschen Bundesrepublik statt. Eine besondere Bedeutung erhielt diese Tagung dadurch, daß sie von zahlreichen Vertretern des Auslandes als Tagungsteilnehmer und als Aussteller besucht war. Neben vielen anderen Ländern war die Schweiz durch eine stattliche Delegation von Tagungsteilnehmern und Ausstellern mit dem eidgenössischen Vermessungsdirektor Dipl.-Ing. H ä r r y an der Spitze und Österreich im Rahmen der österreichischen Kommission für internationale Erdmessung, des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen und der österreichischen Hochschulen vertreten. (Präsident a. D. Dipl.-Ing. L e g o, Hofrat Ing. N e u m a i e r, Prof. Dr. H u b e n y und Oberrat des Vermessungsdienstes Dr. B a r v i r.) Mit der Tagung verband sich eine sehr eindrucksvolle sehenswerte Ausstellung, die einen vorzüglichen Überblick über alle Gebiete des Vermessungswesens bot.

Zusammenfassend kann man sagen, daß sowohl das fachliche Niveau der einzelnen Vorträge als auch die in der Ausstellung gezeigte Schau geleisteter Arbeiten, neuer Entwicklungen im Instrumentenbau usw., die Leistungen und Aufgaben des Vermessungswesens in sehr wirkungsvoller Weise zeigten. Die nachfolgenden Zeilen sollen einige Auszüge aus jenen Vorträgen bringen, die mir für die österreichischen Fachkollegen von besonderem Interesse erscheinen.