

Paper-ID: VGI_195106



Zur logarithmischen Berechnung des Rückwärtseinschnittes

Karl Hubeny ¹

¹ *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **39** (2), S. 33–37

1951

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Hubeny_VGI_195106,  
Title = {Zur logarithmischen Berechnung des R{"u}ckw{"a}rtseinschnittes},  
Author = {Hubeny, Karl},  
Journal = {"Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen"},  
Pages = {33--37},  
Number = {2},  
Year = {1951},  
Volume = {39}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ
des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppe Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

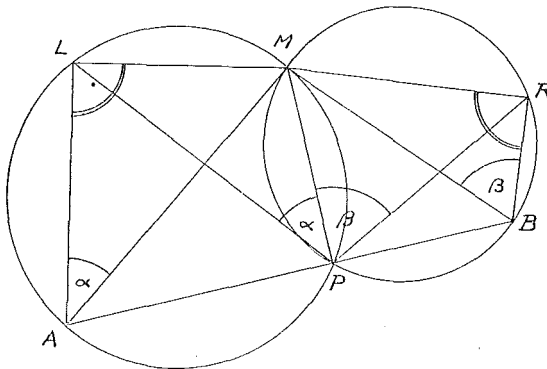
REDAKTION:
Hofrat Prof. Dr. Dr. Dr. h. c. E. D o l e ž a l,
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. L e g o und o. ö. Professor Dipl.-Ing. Dr. H. R o h r e r

Nr. 2 Baden bei Wien, Ende April 1951 XXXIX. Jg.

Zur logarithmischen Berechnung des Rückwärts- einschnittes

Von Karl H u b e n y, Graz

Während die Berechnung des Rückwärtseinschnittes mit Hilfe der Rechenmaschine auf Grund einer Reihe verschiedener geometrischer und rechentechnischer Überlegungen ausgeführt wird, scheint für dessen logarithmische Durchrechnung die Lösung nach Kästner [1] der kürzeste Weg zu sein. Alle anderen Methoden (Collin'scher Hilfspunkt, Cassini'sche Figur, Gauß'sche Abbildung durch reziproke Entfernungen usw., siehe z. B. [2]) bestehen im wesentlichen darin, nach einigen vorbereitenden Rechnungen das gestellte Problem auf Vorwärtseinschnitte zurückzuführen. Meist ergibt sich dabei keine Ersparnis an Rechenarbeit gegen [1]; im Gegenteil, der Gang der Rechnung erscheint weniger flüssig.



Im Hinblick auf den ziemlich großen Arbeitsaufwand auch bei der Kästner'schen Lösung scheint es aber doch von gewisser Bedeutung, andere Wege einzuschlagen

und es soll daher im Folgenden auf einige, bisher wenig beachtete Zusammenhänge eingegangen werden.

Als Grundlage sei die bekannte Cassini'sche Figur gewählt; im üblichen Rechengang wird die Lösung über die Hilfspunkte A, B (Cassini'sche Hilfspunkte) durch Vorwärtseinschneiden des Punktes P aus A und M , bzw. M und B gewonnen.

Die Koordinaten der Hilfspunkte sind aus den gegebenen Stücken leicht angebbbar; es ist

$$\overline{LA} = \overline{LM} \cdot \text{ctg } \alpha$$

und

$$x_A - x_L = \overline{LM} \cdot \text{ctg } \alpha \cdot \cos ((LM) + 90^\circ)$$

Weiter ist

$$\overline{LM} = \frac{y_M - y_L}{\sin (LM)}$$

woraus

$$x_A - x_L = (y_L - y_M) \text{ctg } \alpha$$

folgt.

Auf die gleiche Art erhält man die übrigen Koordinatenunterschiede, so daß die Punkte A und B aus

$$y_A - y_L = (x_M - x_L) \cdot \text{ctg } \alpha$$

$$x_B - x_R = (y_M - y_R) \cdot \text{ctg } \beta$$

$$y_B - y_R = (x_R - x_M) \cdot \text{ctg } \beta$$

gegeben sind.

Gelingt es, das Verhältnis zu bestimmen, in dem der Neupunkt die Strecke AB teilt, so ist die Aufgabe in ziemlich einfacher Weise gelöst, da die Koordinaten der Punkte A und B nach obigen Formeln leicht ausführbar ist.

Die Dreiecke PAM und PMB sind, wie sich aus der Figur ablesen läßt, rechtwinklige Dreiecke mit einer gemeinsamen Kathete PM . Bezeichnet man die Strecken \overline{AP} und \overline{PB} mit a und b , weiterhin die Kreisdurchmesser AM und BM mit d_1 und d_2 , so folgt

$$MP^2 = h^2 = d_1^2 - a^2 = d_2^2 - b^2$$

woraus sich

$$a^2 - b^2 = d_1^2 - d_2^2$$

und

$$(a + b) (a - b) = d_1^2 - d_2^2 \quad (1)$$

ergibt.

Nach der getroffenen Annahme der Strecken a und b ist

$$a + b = \overline{AB}$$

Diese Beziehung ergibt — auch in (1) eingetragen — zwei Gleichungen zur Berechnung von a und b , nämlich

$$a - b = \frac{d_1^2 - d_2^2}{\overline{AB}} \quad (2)$$

$$a + b = \overline{AB}$$

Indem man aus (2) die Strecke a berechnet, läßt sich das Teilungsverhältnis der Strecke AB durch P mit

$$\frac{a}{a+b} = \frac{d_1^2 - d_2^2 + \overline{AB}^2}{2 \overline{AB}^2} \quad (3)$$

angeben; aus

$$\frac{y_P - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_A} = \frac{a}{a+b} \quad (4)$$

ergeben sich die Koordinaten x_P , y_P des zu bestimmenden Punktes P .

In (3) führen wir nun ein

$$\begin{aligned} d_1^2 &= (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 \\ d_2^2 &= (x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2 \\ \overline{AB}^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \end{aligned}$$

woraus sich nach einiger Rechnung ergibt

$$\frac{a}{a+b} = \frac{(y_M - y_A) \operatorname{tg}(AB) + (x_M - x_A)}{(y_B - y_A) \cdot \operatorname{tg}(AB) + (x_B - x_A)} \quad (5)$$

Nach (4) ist

$$\begin{aligned} x_P - x_A &= (x_B - x_A) \frac{a}{a+b} \\ y_P - y_A &= (y_B - y_A) \frac{a}{a+b} \end{aligned} \quad (6)$$

Trägt man hierin (5) ein, so folgt

$$\begin{aligned} x_P - x_A &= \frac{(y_M - y_A) \operatorname{tg}(AB) + (x_M - x_A)}{\operatorname{tg}^2(AB) + 1}; \\ y_P - y_A &= \frac{(y_M - y_A) \operatorname{tg}(AB) + (x_M - x_A)}{\operatorname{tg}(AB) + \operatorname{ctg}(AB)} \end{aligned} \quad (7)$$

wobei diese Werte durch

$$y_P - y_A = (x_P - x_A) \cdot \operatorname{tg}(AB)$$

einander zugeordnet sind.

Für die logarithmische Rechnung ist es zweckmäßig, auf andere trigonometrische Funktionen überzugehen; man erhält durch Multiplikation der Zähler und Nenner von (7) mit $\cos^2(AB)$, bzw. $\sin(AB) \cdot \cos(AB)$

$$\begin{aligned} x_P - x_A &= (y_M - y_A) \sin(AB) \cos(AB) + (x_M - x_A) \cos^2(AB) \\ y_P - y_A &= (y_M - y_A) \sin^2(AB) + (x_M - x_A) \sin(AB) \cos(AB) \end{aligned} \quad (8)$$

Aus diesen Gleichungen können die Koordinaten von P leicht errechnet werden. Wenn man überlegt, daß der Arbeitsaufwand zur Berechnung der Koordinaten von A und B sowie des Richtungswinkels (AB) etwa jenem entspricht, der allein für die Berechnung der Seiten \overline{LM} und \overline{MR} und deren Richtungen in der

Lösung nach Kästner notwendig ist, so ist die Vereinfachung des Vorganges ziemlich offensichtlich. Die Rechnung kann weiterhin noch dadurch mehr schematisiert werden, daß für (8) Vorzeichenregeln gegeben werden. Diese folgen aus der Überlegung, daß in den Gliedern mit $\sin^2(AB)$ und $\cos^2(AB)$ das Vorzeichen durch jenes der Koordinatendifferenz bestimmt wird; in den Gliedern mit $\sin(AB) \cdot \cos(AB)$ ist das Vorzeichen gleich jenem der Koordinatendifferenz, wenn für die Strecke \overline{AB} die Differenzen $y_B - y_A$ und $x_B - x_A$ gleiche Vorzeichen haben. Ist dies nicht der Fall, so ist diesen Gliedern das der Koordinatendifferenz entgegengesetzte Vorzeichen vorzusetzen.

Eine Möglichkeit der Kontrolle ergibt sich durch die Einführung des Verhältnisses $\frac{b}{a+b}$; ohne diese Entwicklung nochmals anzuführen, sei deren Endergebnis (Koordinatenunterschiede von B aus) mit

$$\begin{aligned} x_P - x_B &= (y_M - y_B) \sin(AB) \cos(AB) + (x_M - x_B) \cos^2(AB) \\ y_P - y_B &= (y_M - y_B) \sin^2(AB) + (x_M - x_B) \sin(AB) \cos(AB) \end{aligned} \quad (8a)$$

angegeben.

Eine den Gleichungen (8) entsprechende Lösung kann noch auf Grund anderer Beziehungen gefunden werden. Ist nämlich die Strecke $\overline{MP} = h$ bekannt, so ergibt sich für den Punkt P

$$\begin{aligned} x_P - x_M &= h \cdot \cos((AB) + 90^\circ) \\ y_P - y_M &= h \cdot \sin((AB) + 90^\circ) \end{aligned} \quad (9)$$

und daraus

$$\begin{aligned} x_P - x_M &= -h \cdot \sin(AB) \\ y_P - y_M &= h \cdot \cos(AB) \end{aligned} \quad (10)$$

Die Strecke h könnte aus der der Gleichung (1) zugrundegelegten Beziehung errechnet werden; man erhält sie aber einfacher durch die Überlegung, daß die Fläche des Dreieckes AMB einerseits aus

$$2F = \overline{AB} \cdot h \quad (11)$$

und andererseits aus der Gauß'schen Flächenformel mit

$$\begin{aligned} 2F &= \sum y_n (x_{n-1} - x_{n+1}) \\ 2F &= \sum x_n (y_{n+1} - y_{n-1}) \end{aligned} \quad (11a)$$

gefunden werden kann.

Die Gleichsetzung der Ausdrücke für die doppelte Fläche in (11) und (11a) ergibt

$$h = \frac{(y_M - y_A)(x_A - x_B) - (x_M - x_A)(y_A - y_B)}{\overline{AB}}$$

und

$$h = \frac{-(y_M - y_B)(x_B - x_A) + (x_M - x_B)(y_B - y_A)}{\overline{AB}}$$

Ersetzt man hierin die Strecke \overline{AB} durch die Ausdrücke

$$\overline{AB} = \frac{x_B - x_A}{\cos(AB)} = \frac{y_B - y_A}{\sin(AB)}$$

so folgt

$$\begin{aligned} h &= (y_A - y_M) \cos(AB) + (x_M - x_A) \sin(AB) \\ h &= (y_B - y_M) \cos(AB) + (x_M - x_B) \sin(AB) \end{aligned} \quad (12)$$

Mit (10) folgt daraus

$$\begin{aligned} x_P - x_M &= (y_M - y_A) \sin(AB) \cos(AB) - (x_M - x_A) \sin^2(AB) \\ &= (y_M - y_B) \sin(AB) \cos(AB) - (x_M - x_B) \sin^2(AB) \\ y_P - y_M &= - (y_M - y_A) \cos^2(AB) + (x_M - x_A) \sin(AB) \cos(AB) \\ &= - (y_M - y_B) \cos^2(AB) + (x_M - x_B) \sin(AB) \cos(AB) \end{aligned} \quad (13)$$

Die Koordinatendifferenzen sind hier im Gegensatz zu (12) gleichsinnig geordnet; damit ergeben sich im Aufbau gleiche Formeln, wie sie in (8) mitgeteilt wurden; eine allenfalls erwünschte weitere Möglichkeit der Kontrolle ist mit diesen Formeln gegeben.

Es sei noch an eine Möglichkeit erinnert, eine Rechenkontrolle zu gewinnen. Addiert man in (8) und (8a) gleiche Koordinatenunterschiede, so erhält man, wenn man mit

$$x_s = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_s = \frac{y_A + y_B}{2}$$

die Koordinaten des Halbierungspunktes der Strecke AB einführt, aus

$$\begin{aligned} x_P - x_s &= (y_M - y_s) \sin(AB) \cos(AB) + (x_M - x_s) \cos^2(AB) \\ y_P - y_s &= (y_M - y_s) \sin^2(AB) + (x_M - x_s) \sin(AB) \cos(AB) \end{aligned} \quad (14)$$

die auf den Halbierungspunkt der Strecke \overline{AB} bezogenen Koordinatenunterschiede.

Ebenso ergeben sich diese Gleichungen aus (13), womit die Formelsysteme (8), (8a) und (13) miteinander verbunden und kontrolliert sind.

L i t e r a t u r

- [1] J o r d a n - E g g e r t, Handbuch der Vermessungskunde II/1, § 94, Seite 433.
[2] Derselbe, § 94, Seite 435 ff.

Die Näherungsmethoden des astronomischen Nivellements und das Geoid im Nordteil des Meridianbogens Großenhain—Kremsmünster—Pola

Von Karl Ledersteger, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

Zusammenfassung: Ö l a n d e r s Näherungsformel für das astronomische Nivellement wird aus der Voraussetzung gleichmäßiger Krümmung des Geoids entwickelt und auf den Nordteil des Meridianbogens Großenhain—Pola angewendet. Es zeigt sich deutlich ein Genauigkeitsabfall vom Flachland zum Hochgebirge. Während im Alpenvorland das Dreiecksnetz 1. Ordnung im allgemeinen ausreicht, ist bei der Annäherung an das Gebirge stellenweise eine Verdichtung durch Punkte 2. Ordnung erwünscht. Die Ergebnisse gestatten eine Überprüfung der wesentlich verschiedenen, originellen Methode A. P r e y s. Schließlich werden möglichst absolute Geoidhöhen von 35 Punkten abgeleitet, wozu die absolute Lage des europäischen Netzverbandes auf dem