

Paper-ID: VGI_195118



Über die Grundlagen eines staatlichen Höhennetzes

Josef Litschauer ¹

¹ *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **39** (6), S. 163–174

1951

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Litschauer_VGI_195118,  
Title = {{\U}ber die Grundlagen eines staatlichen H{"o}hennetzes},  
Author = {Litschauer, Josef},  
Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
Pages = {163--174},  
Number = {6},  
Year = {1951},  
Volume = {39}  
}
```



Über die Grundlagen eines staatlichen Höhennetzes

Von Dr. Josef L i t s c h a u e r, Wien

I. Die bestehenden Möglichkeiten

Die Aufgabe, die Höhenlage eines Punktes P im Landinnern möglichst genau zu bestimmen, bedingt bekanntlich ein Nivellement hoher Präzision von einem Küstenpunkt Q des Meeresspiegels bis P . Dabei werden abwechselnd an mehr oder weniger dicht gewählten Zwischenpunkten durch entsprechende instrumentelle Anordnung die Lotrichtungen aufgesucht und als Normale dazu Teile der örtlichen Horizonte ersichtlich gemacht, andererseits die Abstände Δh aufeinanderfolgender solcher Horizontalflächen gemessen. Durch Summieren dieser Werte erhält man $h = \Sigma \Delta h$ (diese wie auch die folgenden Summen sind über den Nivellementweg von Q bis P zu erstrecken), die r o h e M e e r e s h ö h e des Punktes P . Diese einfache Rechenweise ist aber nur soweit einwandfrei, als die Erde als kugelförmiger, mindestens schalenweise homogener Körper angesehen werden darf. Nur in diesem Falle sind ja die verwendeten Horizontalen, die Niveauflächen, konzentrische Kugelflächen.

Schon bei einem homogenen Ellipsoid und erst recht bei Beachtung der wahren Gestalt und Massenverteilung der Erde sind die Abstände zweier bestimmter Niveauflächen örtlich verschieden und der Wert h wird bei verschiedenen Nivellementwegen verschieden groß. Um diese Unbestimmtheit zu umgehen, betrachten wir die Niveauflächen nicht nur geometrisch, als orthogonale Trajektorien der empirisch festgestellten Lotrichtungen, sondern mechanisch, als Flächen gleichen Potentials, was bekanntlich besagt, daß bei jedem Punkt einer bestimmten solchen Fläche dieselbe Arbeit nötig ist, um die Masseneinheit von diesem Punkt unter Überwindung der Schwerkraft von der Erde weg ins Unendliche zu bewegen. Durch die bestimmte Größe dieser Arbeit ist also eine bestimmte Niveaufläche eindeutig festgelegt. Um im Endlichen zu bleiben, ändern wir alle diese Arbeitswerte um einen konstanten Betrag derart, daß der Niveaufläche im Meeresspiegel, also dem Geoid, der Wert Null zukommt, und nennen das Ergebnis *A r b e i t s k o t e n*. Ihre Differenz zwischen zwei benachbarten Niveauflächen ist Masseneinheit \times örtliche Schwerebeschleunigung \times Niveauflächenabstand, also $\Delta k = 1 \cdot g \cdot \Delta h$ und damit $k = \Sigma g \Delta h$.

Um von der Dimension „Arbeit“ auf die Dimension „Länge“ überzugehen, dividieren wir alle Arbeitskoten durch eine konstante Zahl der Dimension „Kraft“, üblicherweise durch die Normalschwerkraft im Meeresspiegel unter 45° Breite, und erhalten damit die dynamischen oder *A r b e i t s h ö h e n* a : $\Delta a = \frac{g}{\gamma_{45}} \Delta h$ und $a = \Sigma \frac{g}{\gamma_{45}} \Delta h$. Für die Zahlenrechnung ist es meist vorteilhaft, die sogenannte dynamische Reduktion d einzuführen durch die Zerlegung

$$\Delta a = \Delta h + \frac{g - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \Delta h = \Delta h + \Delta d$$

und
$$a = \sum \Delta h + \sum \frac{\bar{g} - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \Delta h = h + d.$$

Die Arbeitshöhe des Punktes P ergibt sich unabhängig vom Weg immer mit demselben Betrag, also auch dann, wenn als Weg ein entsprechender Geoidbogen und anschließend die Lotlinie durch P angenommen wird. Nennen wir die auf diesem besonderen Weg erhaltenen Messungsgrößen Δl und \bar{g} , so ist $a = \sum \Delta l + \sum \frac{\bar{g} - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \Delta l$ und die sogenannte orthometrische Höhe, das ist der Abstand des Punktes P vom Geoid, gemessen entlang der Lotlinie, ist $l = \sum \Delta l = \sum \Delta h + \sum \frac{\bar{g} - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \Delta h - \sum \frac{\bar{g} - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \Delta h$, wobei die Einführung von Δh statt Δl im letzten Glied nur einen Einfluß von höherer Kleinheitsordnung mit sich bringt. Die Länge der direkten Messung ja nicht zugänglichen Lotlinie kann also bestimmt werden, wenn die Schwerebeschleunigung \bar{g} in jedem Punkt des gesuchten Lotlinienstückes bekannt ist. Dies ist aber nicht der Fall und „wir erkennen daraus, daß wir orthometrische Höhen im allgemeinen überhaupt nicht in Strenge ermitteln können“ (Baeschlin¹⁾). Die Werte von \bar{g} können vielmehr nur auf Grund von Annahmen aus den an der physischen Erdoberfläche gemessenen Werten g abgeleitet werden und je nach der Art dieser Annahmen sind verschiedene Rechenverfahren möglich:

Bei der sphäroidischen Reduktion²⁾ wird unter Verzicht auf jede örtliche Sonderuntersuchung nur der Normalwert der Schwere berücksichtigt, entsprechend der internationalen Formel, die durch Interpolation zwischen verhältnismäßig wenige, über die ganze Erde verstreute Schwerewerte unter der Annahme eines Ellipsoides, bzw. Niveausphäroides als mathematischer Erdfigur entstanden ist.

Die Reduktion nach Helmer³⁾ (übersichtlicher dargestellt bei Baeschlin⁴⁾) geht von dem auf der Erdoberfläche gemessenen Schwerewert aus und spaltet davon diejenigen Einflüsse ab, die von den außerhalb des Geoides gelegenen Gesteinsmassen der Umgebung ausgehen, wobei die unregelmäßige Erdoberfläche durch eine Horizontale angenähert wird. Die so entstandene Platte mit angenommener Durchschnittsdichte einerseits, die Hauptmasse innerhalb des Geoides andererseits sind der rechnerischen Behandlung zugänglich und ermöglichen es, die Änderung der Schwere entlang der Lotlinie zu verfolgen.

Die Reduktion nach Niethammer⁵⁾ verwendet denselben Grundgedanken, nur werden die Geländeunregelmäßigkeiten schärfer angenähert: Anstelle der einen Platte werden 136 passend gewählte regelmäßige Teilkörper in die Rechnung eingeführt. Zwischen den beiden letzterwähnten Reduktionsmetho-

1) Baeschlin C. F., Lehrbuch der Geodäsie; Zürich, 1948.

2) z. B. Jordan-Egger, Handbuch der Vermessungskunde; III. Band.

3) Helmer F. R., Die Schwerkraft im Hochgebirge; Berlin 1890.

4) Baeschlin F., Untersuchungen über die Reduktion der Präzisions-Nivellements; Bern, 1925.

5) Niethammer Th., Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen; Bern, 1932.

den sind mancherlei Zwischenstufen denkbar, die aber hier zur Wahrung der Übersichtlichkeit je nach Umständen dem einen oder anderen Verfahren zugerechnet werden sollen, da die Abweichungen der Ergebnisse untereinander gering sind im Verhältnis zu den Unterschieden, die diese Gruppe von den übrigen Verfahren trennen.

II. Theoretische und praktische Beurteilung

Die im vorigen Abschnitt aufgezählten Berechnungsweisen sollen nun in ihren Eigenschaften einander gegenüber gestellt und dabei vor allem drei Gesichtspunkte herausgegriffen werden: ihre Wissenschaftlichkeit, Einfachheit und Verwendbarkeit.

Die wissenschaftliche Erforschung der Erdgestalt, wie sie an Hochschul- und ähnlichen Instituten beheimatet ist, hat den aller wissenschaftlichen Arbeit eigenen Gesetzen zu folgen, also insbesondere nur eindeutige, klar definierte Begriffe zu verwenden und unwahre Grundlagen möglichst auszuschalten, seien diese nun vereinfachende Annahmen bekannter, aber unübersichtlicher Verhältnisse oder durch Unkenntnis des Tatsächlichen erzwungene Arbeitshypothesen. Auch das staatliche Vermessungswesen, also ein Teil der wirtschaftlichen Funktion des Staates, wird natürlich die theoretisch begründeten Regeln beachten, soweit nicht andere, gewichtigere Forderungen dem entgegenstehen. Von vorne herein auszuschneiden ist daher die Verwendung roher Meereshöhen; ihre Mehrdeutigkeit würde sich bei Arbeiten größeren Umfanges auch in zahlenmäßigen Widersprüchen äußern, bei Beschränkung auf kleinere Gebiete müßte der wichtige Grundsatz der Stetigkeit des Höhennetzes aufgegeben werden. Die dynamischen Systeme, Arbeitskoten und Arbeitshöhen, sind theoretisch am besten fundiert; sie lassen sich, wenn vom Einfluß der reinen Beobachtungsfehler abgesehen wird, aus den Messungsergebnissen eindeutig und hypothesenfrei herleiten. Bei den orthometrischen Höhen sind, wie schon erwähnt, Hypothesen nicht zu vermeiden; sie sind bei der Reduktion nach Niethammer noch am ehesten erträglich, während die der sphäroidischen Reduktion zugrunde liegende Annahme eine empfindliche Verfälschung der Tatsachen bedeutet, die nur solange hingenommen werden konnte, als mangels genügend dichter Schwermessungen entlang der Nivellementwege eine genauere Erfassung der örtlichen Unregelmäßigkeiten nicht möglich war. Seit aber durch den Bau der statischen Gravimeter die für eine einzelne Schwermessung nötige Zeit von der Größenordnung eines Tages auf wenige Minuten herabgedrückt worden ist, besteht kein Zwang und daher auch keine theoretische Berechtigung mehr, die sphäroidische Reduktion beizubehalten.

Eine ausreichende Einfachheit des Rechenverfahrens ist im praktischen Vermessungswesen nicht zu entbehren. So wie bei manchen Aufgaben der Raumgeometrie eine durch ihren kurzen Ansatz noch so bestrickende vektorielle Lösung mit ganz anderen Augen angesehen wird, wenn es sich um die zahlenmäßige Auswertung handelt, so bedeutet es auch bei geodätischen Arbeiten größeren Umfanges einen gewichtigen Einwand gegen ein Verfahren, wenn es hochwertige Arbeitskräfte langfristig bindet. Am einfachsten gestaltet sich naturgemäß die Berechnung roher Meereshöhen, eine mäßige Erweiterung bedingt die bisher

übliche sphäroidische Reduktion und auch die dynamische Reduktion zur Erzielung von Arbeitshöhen erfordert ungefähr den gleichen Zeitaufwand. Bei der Reduktion nach Helmert ist er schon größer und erreicht bei der nach Niethammer eine Höhe von der Größenordnung eines halben Tages pro Punkt, was bei der großen Punktdichte neuzeitlicher Nivellementnetze und der dementsprechend nach Tausenden zählenden Punktezahl eine beträchtliche Arbeitsdauer bedeutet. Ob dabei individuelle Schweremessungen verwendet oder auch die Schwerewerte an der physischen Erdoberfläche mit Hilfe von Isogammenkarten errechnet werden, hat auf den Zeitaufwand nur wenig Einfluß.

Unter Verwendbarkeit soll hier der Grad verstanden werden, in dem sich die Ergebnisse der einzelnen Rechenverfahren dazu eignen, als Ausgangs- und Kontrolldaten für Höhenmessungen niedrigerer Ordnung benützt zu werden. Da dabei die Art dieser Folgemessungen eine große Rolle spielt, muß zuerst darüber Klarheit herrschen. Es handelt sich um die technischen Nivellements, wie sie teils zur Ergänzung der Katastralvermessung, teils zur Projektierung, Absteckung und Überwachung weiträumiger Ingenieurbauten von den verschiedensten öffentlichen und privaten Stellen ausgeführt werden. Die auf die Messung verwendete Sorgfalt ist dabei je nach dem Zweck graduell verschieden, gemeinsam ist aber, daß es sich um Massenarbeiten handelt, bei denen überwiegend nicht-wissenschaftliches Personal verwendet wird, und daß deshalb einerseits Schweremessungen völlig ausscheiden, andererseits die Rechnung auf der Vorstellung ebener, höchstens konzentrisch-kugeliger Niveauflächen beruhen muß. In vielen Fällen wäre es mit dem Zweck, dem das betreffende Nivellement zu dienen hat, ohne weiteres vereinbar, wenn der Null- oder sonstige Ausgangshorizont beliebig gewählt und jeder Nivellementpunkt in seiner Höhe nur darauf bezogen würde. Daß überhaupt ein Punkt des staatlichen Höhennetzes einbezogen und das örtliche an das Landes-System angeschlossen wird, hat den Zweck, die neu ermittelten Höhenzahlen mit denen angrenzender oder überlappender Arbeitsgebiete vergleichbar zu machen und durch Gegenüberstellung der neuen Werte mit den anderen oder mit weiteren Daten des amtlichen Höhenverzeichnisses Angaben über die Verlässlichkeit der neuen Messungen zu gewinnen. Diese Kontrollfunktion des staatlichen Höhennetzes gibt den angeschlossenen Arbeiten erst ihren vollen Wert, gestattet es, Doppel- oder sonstige Probemessungen wegzulassen, und führt erst in den dadurch ersparten Kosten der Folgemessungen zu einer Amortisation der in die Grundlagenmessungen investierten öffentlichen Mittel.

Für das technische Nivellement muß also der Grundsatz gelten: Eine fehlerfreie Beobachtung liefert für den Höhenunterschied zweier Punkte des staatlichen Höhennetzes unmittelbar denselben Wert, der sich als Unterschied der amtlichen Höhenzahlen der beiden Punkte ergibt; jede Abweichung ist als Fehler der neuen Messung anzulasten. Damit dieser Grundsatz nicht ein unerträgliches Prokrustesbett wird, ist es nötig, daß die beim Präzisionsnivellement an den rohen Höhenunterschieden angebrachten, beim technischen Nivellement aber vernachlässigten Reduktionsgrößen möglichst klein sind im Vergleich zu den für das technische Nivellement vorgesehenen Fehlergrenzen; nur dann kann ja der vernachlässigte Betrag als bescheidener systematischer Anteil des Gesamtmeßfehlers angesehen

und in die übliche Anschlußzwangsausgleichung einbezogen werden. Diese Bedingung ist unter den in Rede stehenden Rechenverfahren bei den rohen Meereshöhen naturgemäß am ehesten erfüllt und auch bei den allgemein eingeführten, sphäroidisch reduzierten orthometrischen Höhen hat sich diesbezüglich keine Schwierigkeit gezeigt. Anders bei den Arbeitshöhen: Ihre Unterschiede weichen von den rohen Höhenunterschieden umso mehr ab, je stärker die örtliche Schwerebeschleunigung von dem konstanten Divisor, z. B. γ_{45} , verschieden ist. Diese Abweichungen können binnen kurzem die Zentimeter, nach wenigen Kilometern die Dezimeter erreichen, so daß die dynamischen Verfahren einhellig als praktisch unbrauchbar abgelehnt werden.

Die orthometrische Reduktion nach Helmert, Niethammer u. dgl. will dem Aufbau des örtlichen Schwerefeldes Rechnung tragen, kann also in ihren Auswirkungen nur an Hand von ausgeführten Messungen abgeschätzt werden, wobei die Verwendbarkeit naturgemäß nach den ungünstigsten, in dem betreffenden Anwendungsbereich auftretenden Verhältnissen zu beurteilen ist. Als ein solches Beispiel sollen die in den letzten Jahren auf der Großlocknerstraße durchgeführten Messungen untersucht werden: Nivelliert wurden hier 129 Teilstrecken mit durchschnittlich $2/3$, zusammen 86 *km* Weglänge in einer Höhenlage zwischen 750 und 2500 *m*. In jedem Festpunkt wurde die Schwerebeschleunigung beobachtet; einer von berufener Seite zu erwartenden eingehenden Darstellung dieser Messungen und ihrer geophysikalischen Auswertung soll hier nicht vorgegriffen, sondern nur ihre Anwendung zur Nivellementreduktion betrachtet werden. Nach einem dem Niethammer'schen analogen Verfahren wurden orthometrische Höhen abgeleitet und deren Unterschiede den rohen Höhenunterschieden gegenübergestellt. Die Abweichungen wurden entsprechend den für die Fehlergrenzen üblichen Formeln auf 1 *km* Meßweg bezogen und nach der durchschnittlichen Neigung der Teilstrecken (ermittelt als Quotient Höhenunterschied durch Meßweg) aufgeschlüsselt, da sich eine leichte Abhängigkeit zwischen diesen beiden Wertegruppen zeigt.

Abweichung pro <i>km</i> Meßweg	Durchschnittliche Neigung			Zusammen
	0—4%	4—8%	8—12%	
0—5 <i>mm</i>	25·2 <i>km</i>	7·5 <i>km</i>	1·8 <i>km</i>	34·5 <i>km</i>
5—10 „	12·6 „	6·0 „	9·3 „	27·9 „
10—15 „	—	1·2 „	14·4 „	15·6 „
15—20 „	—	0·4 „	5·1 „	5·5 „
20—25 „	0·4 „	0·4 „	2·2 „	3·0 „
Zusammen	38·2 <i>km</i>	15·5 <i>km</i>	32·8 <i>km</i>	86·5 <i>km</i>

Die Ergebnisse sind in vorstehender Tabelle zusammengestellt, aus der z. B. zu ersehen ist, daß die Teilstrecken mit durchschnittlichen Neigungen zwischen

8 und 12% zusammen 32·8 km lang sind und daß davon bei 9·3 km eine Höhenverzerrung von 5 bis 10 mm je km auftritt, bei 14·4 km eine solche von 10 bis 15 mm usw. Der größte Betrag ist 24·8 mm/km. Bei Auswertung der Helmert'schen Formeln sind die Verzerrungen noch größer, bis 39 mm/km, da dieses dem Flachland angepaßte Verfahren im Gebirge notwendigerweise zusätzliche Spannungen in die Ergebnisse bringen muß. Ein von Baeschlin⁴⁾ und Niethammer⁵⁾ als Beispiel verwendeter Teil des Schweizer Präzisionsnivelements zeigt etwa halb so große Verzerrungen, was auf den Zufall geringerer Störungen in dem betreffenden Gelände zurückzugehen scheint, da auch der dort ausgewiesene theoretische Schleifschlußfehler und der Unterschied zwischen wahren und sphäroidischem Schlußfehler nur etwa ein Drittel der in den österreichischen Alpen auftretenden Werte sind. Hier sind umgekehrt noch größere Beträge möglich als oben ausgewiesen, etwa wenn größere Höhenunterschiede auf kurzen, der Luftlinie nahekommenden Wegen gemessen werden; tatsächlich wurden bei einzelnen Stichproben an anderen Stellen auch Abweichungen zwischen 20 und 40 mm/km gefunden. Hält man dem die Genauigkeitsanforderungen beim technischen Nivelement entgegen in der Größenordnung von 10, ja 5 mm mittlerem Kilometerfehler, dann ist es offenkundig, daß eine Vernachlässigung dieser Beträge keineswegs mehr einen kleinen systematischen Zuschlag zum zufälligen Meßfehler bedeutet.

Schon für das Präzisionsnivelement selbst entstehen aus der Größe der Reduktionen Schwierigkeiten: Jedes kleinste Seiten-, Anschluß- oder Zusatznivelement, das zu irgend einer Zeit zu irgend welchen Zwecken in das System eingefügt werden soll, müßte mit einer Schweremessung verbunden werden; geschieht dies nicht, wie es aus organisatorischen Gründen wohl nicht immer zu vermeiden sein wird, muß entweder der rohe Höhenunterschied zur Berechnung verwendet werden und dadurch das Operat schon in sich uneinheitlich werden, oder die orthometrische Reduktion ist auf Grund mehr oder weniger scharfer Abschätzungen der örtlichen Schwerebeschleunigung zu berechnen, was wieder entweder einen unverhältnismäßig großen Zeitaufwand erfordert oder durch die Unsicherheit der Reduktion alle Präzision des Nivelliervorganges illusorisch macht. Noch wesentlich schwererwiegend sind die Folgen für das technische Nivelement: Der Beobachter beginnt bei einem Punkt des staatlichen Höhennetzes, mißt im Zuge seiner Arbeiten zu einem weiteren Festpunkt und sieht, daß sein Ergebnis von den amtlichen Daten um einen oder mehrere Zentimeter auf den Kilometer abweicht. Er vermutet vorerst einen groben Fehler in seiner Messung, wiederholt diese und findet sein erstes Ergebnis im Rahmen der ihm vorgeschriebenen Fehlergrenze bestätigt. Bei weiteren Anschlußpunkten zeigt sich das gleiche. Selbst wenn der Bearbeiter den Grund der Abweichungen kennt, kann er sie nicht in seinem Operat mitführen, sondern kommt zwangsläufig dazu, nur für höchstens einen Punkt die amtliche Kote zu übernehmen, für alle übrigen Punkte aber Höhen auf Grund seiner eigenen Messungen anzusetzen und diese durch eigene Doppel- oder sonstige Kontrollmessungen zu verproben. Das Ergebnis ist, daß hier und an unzähligen, über das ganze Land verstreuten Stellen selbständige Höhensysteme entstehen, die nur in sich zusammenhängen, mit benachbarten oder überlappenden Systemen aber grundsätzlich beträchtliche Wider-

sprüche aufweisen. Also der gleiche unselige Zustand, wie er bei der Lagevermessung in Form der Inselpläne aufgetreten ist und durch eine neuzeitliche, geschlossene Landesvermessung ja gerade beseitigt werden soll.

Dieser Nachteil bleibt auch dann bestehen, wenn mehrere, nach Baeschlins⁴⁾ 1) Vorschlag vier verschiedene Systeme nebeneinander geführt werden: orthometrische, dynamische, rohe und Gebrauchs- (also wohl sphäroidische) Höhen. Nur die Kontrollfunktion benachbarter Anschlußpunkte kann dadurch gerettet werden, obzwar auch da Schwierigkeiten zu erwarten sind, wenn nicht ein mit der Theorie wohl vertrauter Bearbeiter zur Verfügung steht. Das Gros des der Höheren Geodäsie fernstehenden technischen Personals muß durch das Nebeneinander unterschiedlicher Systeme verwirrt werden, zumal es angewiesen ist, gerade die eigentlich abzulehnenden rohen Meereshöhen bei seinen Arbeiten zu verwenden, und die theoretisch „richtigen“ orthometrischen Höhen sich als praktisch unverwendbar erweisen. Dazu kommt der langwierige und doch immer durch Mißverständnisse gefährdete Schriftverkehr, wenn nicht der ganze Katalog verfügbar ist, sondern für kleinere Arbeiten ein auf wenige Punkte beschränkter Auszug übermittelt werden soll.

Es ist in diesem Zusammenhang festzustellen, daß es nicht zweckmäßig erscheint, eine einzige Publikation für mehrere, grundsätzlich verschiedene Zweckbestimmungen anzustreben. Statt dessen wären etwa drei Sparten zu unterscheiden: Bei wissenschaftlichen Untersuchungen einzelner Teile ist volle Freizügigkeit selbstverständlich; der Wert solcher Arbeiten ist umso größer, je mehr Rechenverfahren, je mehr Systeme in allen Einzelheiten einander gegenüber gestellt werden. Mitteilungen zum Zwecke des überstaatlichen Zusammenschlusses der einzelnen Höhennetze und sonstiger Belange der Internationalen Erdmessung sind auf Angaben über Punkte an den Grenzen, eventuell noch über geographisch ausgezeichnete Punkte im Innern zu beschränken, nach Möglichkeit in einem einheitlichen, international vereinbarten System; jedenfalls wäre es abwegig, in eine für einen ausländischen Leserkreis bestimmte Publikation alle die tausende Punkte des Landinneren aufzunehmen, die ja doch erst für den sinnvoll werden, der an Ort und Stelle mit diesen Punkten in Berührung kommt. Sie sind vielmehr nur für die dritte Gruppe bereitzustellen, für die inländischen Interessenten, die durch ihre Steuerleistung die grundlegenden Messungen überhaupt erst ermöglichen und daher darauf Anspruch haben, die Ergebnisse in einer Form zu erhalten, die bei Wahrung der theoretischen Begründung die praktische Verwendbarkeit nicht beeinträchtigt.

III. Die niveaumetrische Reduktion

Nachdem sich also gezeigt hat, daß von den bisher in der Literatur behandelten Rechenverfahren keines so recht befriedigen kann, soll nun im folgenden versucht werden, eine Methode zu entwickeln, die die aufgetretenen Mängel vermeidet. Der Leitgedanke ist dabei, die theoretisch einzig einwandfreien dynamischen Systeme, insbesondere die Arbeitshöhen a , als Grundlage zu nehmen und sie nur durch eine einheitliche und eindeutige Umformung für die Folgemessungen unmittelbar brauchbar zu machen.

Da also die Niveauflächen vorangestellt werden und alle Punkte derselben Niveaufläche auch dieselbe Höhe erhalten sollen — was bekanntlich auch den mechanischen Grundlagen von Wasserbauten und Verkehrswegen entspricht —, seien die Endwerte des gesuchten Systems als *Niveauhöhen* u und der Vorgang als niveaumetrische Reduktion bezeichnet. Diese Benennung soll aber nur die Unterscheidung von den anderen Systemen ermöglichen, bei einer allfälligen Anwendung im Rahmen einer Landesvermessung wären die Ergebnisse im geodätischen Alltag eben die Meereshöhen schlechthin.

Daß die Arbeitshöhen durch die dynamisch reduzierten Unterschiede

$$\Delta a = \frac{g}{\gamma_{45}} \Delta h = \Delta h + \frac{g - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \Delta h$$

schnell und eindeutig aus den Höhen- und Schweremessungen aufgebaut werden können, wurde schon eingangs dargestellt. Die unmittelbare Anwendung scheidet an der großen Veränderlichkeit des Quotienten g/γ_{45} ; diese Veränderungen können wir aber ihrer Ursache nach in zwei Teile zerlegen: Einen regelmäßigen, der je nach der Größe des Anwendungsbereiches mehr oder weniger scharf durch eine einfache Formel dargestellt werden kann, und einen unregelmäßigen, der durch die örtlichen Störungen des Schwerefeldes der Erde entsteht. Während dieser eben durch unsere Messungen erfaßt und in den Ergebnissen ausgedrückt werden soll, kann jener in Anpassung an die jeweiligen Erfordernisse in einfacher Weise weg oder dazu genommen werden; die Nachbarschaftstreue hinsichtlich der örtlichen Störungen wird dadurch nicht berührt. Den regelmäßigen Teil der Schwerebeschleunigung setzen wir nach Art der internationalen Schwereformel an mit

$$g_m = \gamma_{45} (1 + \beta'' + \gamma'' \cos 2\varphi + \delta'' a)$$

und wollen ein Niveauhöhendifferential dadurch aus dem entsprechenden Arbeitshöhendifferential gewinnen, daß wir dieses vom Einfluß der regelmäßigen Schwereänderung befreien: $du = \frac{\gamma_{45}}{g_m} da$,

das ist bis auf Glieder höherer Ordnung $du = (1 + \beta' + \gamma' \cos 2\varphi + \delta' a) da$. Vereinfachen wir den Ansatz noch durch Einführung einer Mittelbreite $\cos 2\varphi = \cos 2\varphi_0 - 2 \sin 2\varphi_0 \Delta\varphi$ und integrieren dann, so entsteht die Umformungsgleichung $u = a + \alpha + (\beta + \gamma \Delta\varphi) a + \delta a^2$.

Die Koeffizienten α bis δ wurden bisher absichtlich ganz allgemein angesetzt, ihr Zahlenwert soll empirisch so ermittelt werden, daß für eine über den ganzen Geltungsbereich verteilte Anzahl von Punkten die Niveauhöhe möglichst gut mit der rohen Meereshöhe übereinstimmt. Man könnte natürlich auch darauf ausgehen, schon in den Ansatz für g_m besondere Zahlenwerte einzuführen und damit die endgültigen Koeffizienten herzuleiten. Das ist aber mindestens für δ unzuverlässig, da δ'' von der Dichte der über dem Geoid lagernden Massen abhängig ist. Wird diese Dichte überhaupt gleich Null gesetzt, dann ist $\delta'' = -314 \cdot 10^{-9}$ gemäß der Freiluftformel der Schwereereduktion und damit $\delta = 157 \cdot 10^{-9}$; nimmt man die Dichte mit 2,7, den Punkt also auf einer Gesteinsplatte liegend an, dann wird $\delta = 42 \cdot 10^{-9}$. In gebirgigem Gelände liegt der Durchschnittswert irgendwo dazwischen; bei der Anwendung auf die früher erwähnten zwei Beispiele wurde empirisch $\delta = 97$, bzw. $95 \cdot 10^{-9}$ gefunden, was einer durchschnitt-

lichen Dichte von 1.4 entspricht, einer Zahl, die auf keine andere Art rascher und vor allem sicherer hätte ermittelt werden können. Bei γ liegen die Verhältnisse in schwächerem Maße ähnlich, während bei α und β die möglicherweise unbekanntem Nullpunktskorrekturen des verwendeten Arbeitshöhen- und Schweresystems eine Rolle spielen. Jedenfalls ist immer zu beachten, daß eine Anlehnung dieser nur für das Inland bestimmten Umformungsgleichung an irgend welche international eingeführte Größen keinerlei Vorteil bringt, daß aber jeder Verzicht in der Anpassung an die systematischen Eigenheiten des Schwerfeldes des betreffenden Landes die Verwendbarkeit bei all den vielen Folgemessungen herabmindert.

Wie verhalten sich nun die Niveauhöhen hinsichtlich der im vorigen Abschnitt behandelten drei Kriterien? Wie schon wiederholt erwähnt, sind für den Wissenschaftler nach allgemeiner Ansicht die Arbeitshöhen die besten; mit diesen sind die Niveauhöhen durch eine eindeutige Zuordnung verbunden. Daß bei der Koeffizientenberechnung rohe Meereshöhen herangezogen worden sind, bringt keinen Nachteil, da der Einzelaufbau der Gleichung theoretisch völlig belanglos ist. Wichtig ist in dieser Beziehung nur, daß zu jeder Gruppe von Arbeitshöhen eindeutig eine nachbarschaftstreue Gruppe von Niveauhöhen berechnet werden kann und daß umgekehrt zu jeder vorliegenden Niveauhöhe durch Umkehrung der Umformungsgleichung sofort die zugehörige Arbeitshöhe zu finden ist, so daß damit die Grundlage für beliebige weitere wissenschaftliche Untersuchungen vorliegt. Die übliche Ausgleichung der Schleifenwidersprüche berührt nur die Arbeitshöhen, verwendet also die durch die dynamische Reduktion gewonnenen wahren theoretischen Schlußfehler, während die Niveauhöhen erst aus den ausgeglichenen Werten entstehen.

Man könnte einwenden, daß zum Unterschied von den orthometrischen die Niveauhöhen keine geometrische Bedeutung haben. Dazu ist zu sagen: Selbst wenn die orthometrischen Höhen angesichts der hypothetischen Rechengrundlagen noch als streng richtig angesehen werden, liefern sie nur punktweise den Abstand der physischen von der mathematischen Erdoberfläche, also zweier Flächen, von denen keine in ihrer absoluten Gestalt bekannt ist. Infolgedessen kann auch mit den orthometrischen Höhen kein geometrisch richtiges Profil durch die beiden Flächen gezeichnet werden. Macht man es dennoch, dann nur unter der ausdrücklichen oder stillschweigenden Verfälschung, daß der in seiner Form unbekante Geoidbogen durch eine regelmäßige (gerade, kreis-, ellipsenförmige) Linie ersetzt wird. Nach dem derzeitigen Stande der Geodäsie ist es in absehbarer Zeit nicht möglich, die Geoidgestalt mit der hier erforderlichen Genauigkeit zu bestimmen. Sobald aber die Unmöglichkeit einer exakten Lösung feststeht, ist es unerheblich, ob zum Zwecke einer geometrischen Konstruktion das Geoid in eine regelmäßige Bezugsfläche zurecht gebogen wird oder eine andere, in unmittelbarer Nähe des Geoides verlaufende Fläche. Eine solche Fläche ist nun die Gesamtheit aller Punkte, die auf den Lotlinien im Abstand der Niveauhöhen unter den Geländepunkten liegen. Diese Fläche schneidet das Geoid etwa entlang der Küste und hat von ihm im übrigen Abstände bis zu einigen Dezimetern, also in der Größenordnung von einem Hundertstel der Geoidundulationen.

Der ursprünglich angestrebte Grundsatz, allen Punkten derselben Niveaufläche dieselbe Niveauhöhe zuzuordnen, kann nur entlang von Parallelkreisen beibehalten werden. In der Nord-Süd-Richtung ist dagegen die normale Schwereänderung so groß, daß schon bei einem Lande mit so geringer Breitenerstreckung wie Österreich die Niveauflächenabstände bis zu 3 *cm* für je 100 *m* Höhe variieren. Bei Bedarf können aber durch Abzug des Breitengliedes die Werte jederzeit auf Konstanz der Niveauflächen reduziert werden.

An Einfachheit läßt die Rechnung kaum etwas zu wünschen übrig: Die Arbeitshöhen werden mit Hilfe der gemessenen Schwerewerte in derselben Zeit berechnet wie die sphäroidischen auf Grund der üblichen Annahmen, die zugehörigen Niveauhöhen sind aus entsprechenden Hilfsstafeln zu entnehmen. Dazu kommt als einmalige Arbeit die Festlegung der Koeffizienten der Umformungsgleichung und deren tabellarische Darstellung.

Die Verwendbarkeit kann auch hier nur auf Grund von Versuchen beurteilt werden. Bei dem früher behandelten Beispiel aus dem Großglocknergebiet wurde zuerst nur die Gleichung $n = a + 97 \cdot 10^{-9} a^2$ ausgewertet; die größte Abweichung zwischen Δn und Δh ist 3·5 *mm/km*, mehr als 2 *mm/km* treten auf zusammen 10·6 *km* Weglänge auf. Wird die Umformungsgleichung um das Glied $-10^{-5} a$ erweitert, gehen diese Werte zurück auf 2·8 *mm/km*, bzw. 8·6 *mm*. Die höheren unter diesen schon durchaus erträglichen Abweichungen liegen jeweils im Extrapolationsbereich, da die Koeffizienten absichtlich nur unter Heranziehung weniger Punkte an Hand einer graphischen Darstellung gewählt wurden und auch $\gamma = 0$ gesetzt wurde, um nicht übermäßig günstige Verhältnisse herzustellen. Bei der gleichen Behandlung des Schweizer Beispiels erreichen die Abweichungen nirgends 1 *mm/km*. Bei Anwendung einer geschlossenen Formel auf größere Gebiete wird die Anpassung wohl nicht überall so eng sein können, aber es ist doch zu erwarten, daß die restlichen Verzerrungen nur ausnahmsweise bei den sorgfältigsten technischen Nivellements spürbar werden könnten.

IV. Verhältnis zur trigonometrischen Höhenbestimmung

Die nivellistisch bestimmten Höhenfestpunkte sind überwiegend linienweise längs Verkehrswegen angeordnet, während in den abseits liegenden Gebieten die Höhen der Festpunkte auf trigonometrischem Wege ermittelt werden. Da die Messungen der zweiten Gruppe auf der ersten aufbauen, ist bei den grundlegenden Entscheidungen auch diese zweite Gruppe zu beachten. Die Genauigkeit der trigonometrischen Höhenbestimmung ist zwar geringer als die des Präzisionsnivellements, kann aber die eines einfachen technischen Nivellements erreichen, sodaß die wie früher zu verstehende Verwendbarkeit der Reduktionsmethode auch hier Bedeutung erlangen kann. Bei einer diesbezüglichen Untersuchung kommt Baeschlin⁴⁾ zu dem Schluß, „daß durch die gebräuchlichen trigonometrischen Höhenbestimmungen Differenzen von orthometrischen Höhen bestimmt werden. Dieser Umstand spricht nun aber m. E. zwingend dafür, für die Reduktion der geometrischen Nivellements eine auf orthometrische Höhen basierende Methode zu wählen.“ Diese Formulierung konnte solange hingenommen werden, als nur die Wahl zwischen dynamischer und orthometrischer Reduktion zur

Debatte stand, also nur klarzustellen war, daß trigonometrisch bestimmte Höhen nichts mit dynamischen zu tun haben. Grundsätzlich stehen sie aber zu den orthometrischen in einem ähnlichen Verhältnis, wie schon Niethammer⁶⁾ feststellte: „Trigonometrisch bestimmte Höhendifferenzen sind nicht Differenzen wahrer Meereshöhen.“ Um dies möglichst einfach einzusehen, denken wir uns zuerst den Höhenunterschied zwischen zwei Punkten derselben Niveaufläche trigonometrisch bestimmt. Die beiden gemessenen Zenitdistanzen zählen von den örtlichen Lotrichtungen weg, also von den Normalen auf die Niveaufläche. Bei der Rechnung wird das Niveauflächenstück als kugelförmig eingeführt, der durch diese Näherung etwa verursachte Fehler bleibt in dem Ergebnis enthalten ohne Rücksicht auf das verwendete Höhensystem. Abgesehen von diesem und dem hier ebensowenig zu verfolgenden Refraktionseinfluß gibt die Rechnung den Höhenunterschied Null, also grundsätzlich den Niveauhöhenunterschied, der nur ausnahmsweise hier dem dynamischen Höhenunterschied gleich ist; der orthometrische Höhenunterschied der beiden Punkte ist aber im allgemeinen nicht Null, sondern gleich dem Abstände des einen Punktes von einer Geoid-Parallelfläche durch den anderen. Dieser Unterschied bleibt auch dann bestehen, wenn die beiden Punkte verschiedenen Niveauflächen angehören. Der trigonometrisch, also auf Grund einer geometrischen Beziehung bestimmte Höhenunterschied steht dann in keiner Beziehung zum dynamischen, er ist auch nicht gleich dem durch die beiden Niveauflächen aus der Lotlinie des einen oder anderen Endpunktes herausgeschnittenen Stück, er entspricht aber einem Zwischenwert, dem Abstand der beiden Niveauflächen an einer nicht näher bestimmten Stelle in der Umgebung der Meßstrecke.

Dieses Verhalten der trigonometrischen Höhenbestimmung ist aber am ehesten mit der niveaumetrischen Reduktion zu vergleichen, die eine Zwischenstellung zwischen den beiden anderen Systemen einnimmt: Sie folgt der dynamischen Reduktion bei der Definition der Höhengleichheit und gibt den Höhenunterschied zwischen zwei Niveauflächen mit einem möglichst guten Durchschnittswert. Da die auftretenden Höhenunterschiede meistens kleiner sind als die mittlere Höhenlage des Arbeitsgebietes, sind auch die Abweichungen der örtlichen Niveauflächenabstände von den niveaumetrisch gewonnenen Durchschnittswerten meistens geringer als die von den orthometrischen Höhenunterschieden; denn in dem einen Falle entstehen sie nur durch den Nicht-Parallelismus zweier in der Nähe der physischen Erdoberfläche gelegener Niveauflächen, im anderen Falle durch den zwischen einer örtlichen Niveaufläche und dem Geoid.

Mit demselben Nachdruck, mit dem Baeschlin auf Grund der erwähnten Untersuchung seinerzeit die orthometrische Reduktion postuliert hat, ist somit nun auf Grund der obigen Weiterführung die niveaumetrische Reduktion als die angemessenste anzusehen.

V. Verhältnis zur Lagevermessung

Es liegt nahe, Vergleiche zu ziehen zwischen den verschiedenen Höhensystemen einerseits und den in der Lagevermessung gebräuchlichen Koordinatensystemen andererseits. Tatsächlich lassen sich hier interessante Parallelen aufzeigen, ohne daß ihnen aber mehr als ein äußerlicher Charakter zugeschrieben werden soll.

Die auf der Kugel gemessenen Längen und Winkel führen bei Rechnungen nach den Formeln der ebenen Trigonometrie zu grundsätzlichen und bei größeren Arbeitsgebieten auch zahlenmäßig aufscheinenden Widersprüchen. — Die rohen Höhenunterschiede des geometrischen Nivellements führen grundsätzlich und bei größeren Schleifen auch zahlenmäßig spürbar zu Widersprüchen.

Durch Einführung der sphärischen, bzw. sphäroidischen Trigonometrie können die Messungsergebnisse auf beliebige Ausdehnung widerspruchsfrei verarbeitet werden, aber die so gewonnenen geographischen Koordinaten sind für die Detailvermessung unbrauchbar. — Im System der Arbeitskoten sind die Messungen eindeutig auszuwerten, aber es ist für die Allgemeinheit nicht verwendbar.

Werden die geographischen Koordinaten durch einen konstanten Faktor aus dem Winkelmaß in das Längenmaß umgerechnet (quadratische Plattkarte), sind sie wegen ihrer starken Verzerrungen der örtlichen Verhältnisse noch immer nicht brauchbar. — Werden die Arbeitskoten durch einen konstanten Faktor auf die Dimension „Länge“ gebracht, entstehen die Arbeitshöhen, die aber für die Folgemessungen unerträgliche Verzerrungen enthalten.

Durch rechnerische Umformung der geographischen Koordinaten können je nach Umständen mehr oder weniger brauchbare ebene Koordinaten gewonnen werden; z. B. geht die Soldner'sche Projektion darauf aus, für gewisse Abstände ihren wahren Wert zu erhalten, muß aber deshalb derart große Verzerrungen in Kauf nehmen, daß sie häufig auch bei Arbeiten niedrigerer Ordnung spürbar werden und diese dadurch empfindlich stören. — Durch rechnerische Umformung der Arbeitshöhen können andere Höhensysteme gebildet werden; z. B. ist bei den orthometrischen Höhen das Ziel, den Abstand des Geländepunktes vom Geoid möglichst wahrheitsgetreu darzustellen, doch bleiben derart große Verzerrungen bestehen, daß die Folgemessungen nicht eingepaßt werden können.

Die Gauß-Krüger'sche Projektion verändert den Abstand vom Mittelmeridian umsomehr, je weiter dieser vom jeweiligen Arbeitsgebiet entfernt ist, gibt aber die Verhältnisse in der näheren Umgebung so getreu wieder, daß die Arbeiten niedrigerer Ordnung in großen Bereichen auf die restlichen Verzerrungen keine Rücksicht zu nehmen brauchen. — Bei der niveaumetrischen Reduktion wird ein Abweichen der Bezugsfläche vom Geoid, das der unmittelbaren Messung ja im allgemeinen sowieso nicht zugänglich ist, hingenommen, dafür werden aber die Niveauflächenabstände in der Nähe der physischen Erdoberfläche, also im Arbeitsgebiet, mit solcher Annäherung dargestellt, daß für die Folgemessungen schlimmstenfalls nur in vereinzelt Ausnahmefällen Störungen zu erwarten sind.

Referat

150-Jahrfeier des bayerischen Vermessungswesens

Das Jubiläum des 150jährigen Bestehens des bayerischen Vermessungswesens wurde am 20. September 1951 mit einem Festakt an der Technischen Hochschule München durch die Bayerische Staatsverwaltung begangen, zu welchem sich zahlreiche Gäste aus dem In- und Auslande über Einladung des Bayerischen Staatsministers der Finanzen einfanden.

Nach den vom Bayerischen Staatsorchester meisterhaft dargebotenen Klängen der Ouvertüre zu Mozarts „Zauberflöte“ begrüßte Regierungsdirektor B i t t e l vom Bayeri-