

Paper-ID: VGI\_195212



## Zur Reduktion schiefgemessener Teilstrecken

Josef Eberwein <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **40** (3), S. 71–75

1952

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Eberwein_VGI_195212,  
Title = {Zur Reduktion schiefgemessener Teilstrecken},  
Author = {Eberwein, Josef},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
Pages = {71--75},  
Number = {3},  
Year = {1952},  
Volume = {40}  
}
```



würde die reflektierte Welle mit einer Phasenverschiebung von  $180^\circ$  gegenüber der ausgesendeten ankommen, dies deshalb, weil der Weg einer vollen Wellenlänge zurückgelegt werden muß (was einer Phasenverschiebung von  $360^\circ$ , also  $0^\circ$  entspricht) und weil bei der Reflexion eine Phasenverschiebung von  $180^\circ$  zustandekommt.

Zur Entfernungsmessung genügt daher auch eine Messung der Phasenverschiebung zwischen ausgesendeter und reflektierter Welle, vorausgesetzt, daß die Entfernung wenigstens auf eine halbe Wellenlänge genau bekannt ist.

Bei einer Wellenlänge von beispielsweise  $200\text{ m}$  ließe sich, wenn man annimmt, daß die Phasenwinkelmessung mit einer Genauigkeit von etwa  $\frac{1}{3}^\circ$  durchgeführt werden könnte, gerade noch eine Strecke von rund  $10\text{ cm}$  messen, also eine Entfernung von  $100\text{ m}$  auf  $10\text{ cm}$ . Ist die Entfernung größer als  $100\text{ m}$ , so bleibt die Genauigkeit, doch müßte die Strecke wenigstens bezüglich ihrer  $100\text{ m}$ -Werte bekannt sein. Diese könnten aber durch Verwendung einer entsprechend längeren Wellenlänge ebenfalls gemessen werden. Ebenso lassen sich noch kleinere Entfernungen durch Wahl noch kleinerer Wellenlängen bestimmen. Die Meßgenauigkeit steigt dadurch entsprechend. Sie ist lediglich begrenzt durch die Genauigkeit der Kenntnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und durch die Genauigkeit der Frequenz.

(Fortsetzung folgt)

## Zur Reduktion schiefgemessener Teilstrecken

Von Josef E b e r w e i n, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

Bei der Durchführung von Streckenmessungen hat trotz der Einführung der Wildschen Basislatte und trotz der Streckenmessung nach dem Zeiß-Boßhardt-Verfahren die Meßbandmessung immer noch eine grundlegende Bedeutung behalten. Über einige Schwächen der Meßbandmessung und ihre Abhilfe hat Herr Dipl.-Ing. Mitter eine ausführliche und sehr fruchtbare Abhandlung gebracht, die in einem der nächsten Hefte dieser Zeitschrift erscheinen wird.

Die im genannten Artikel allein empfohlene Methode der schräggemessenen Seiten mit nivellierten Höhenunterschieden oder Stichmaßen stellt die folgende Aufgabe:

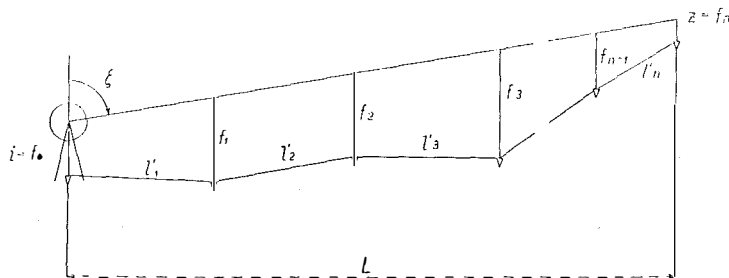


Fig. 1

Eine längere Strecke ist durch Zwischenpflocke so unterteilt, daß man mit dem Meßband von Pflöck zu Pflöck messen kann. Statt der Zwischenpflocke haben sich die sogenannten Meßbandstative (Kleinstative) bewährt. Alle Pflöcke oder Meßbandstative liegen zwar in einer Vertikalebene, aber in ihrer Höhe müssen sie sich dem Gelände anpassen und die Verbindung aller dieser Teilstrecken stellt einen gebrochenen Linienzug dar. Vom Anfangs- bis zum Endpunkt dieser im vertikalen Sinn gebrochenen Linie geht die Visierlinie, deren Höhe über dem jeweiligen Zwischenpflock als Stichmaß an der Nivellierlatte abgelesen werden kann (Fig. 1).

Als Resultat der Messung stehen zum Schluß zur Verfügung:

1. Die gemessene Zenithdistanz  $\zeta$ .
2. Die Instrumentenhöhe  $i$ , die Zielhöhe  $z$  und die Stichmaße an den Zwischenpunkten  $f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_{n-1}$ .
3. Die schiefe von Pflöck zu Pflöck gemessenen Strecken  $l'_1$  bis  $l'_n$ .

Es soll ein einfaches Verfahren geschaffen werden, um daraus die horizontale Entfernung  $L$  vom Anfangs- bis zum Endpunkt der Polygonseite zu errechnen. Bisher wurde diese Aufgabe durch schrittweise Annäherung gelöst. Obwohl dieser Rechengang noch wesentlich rascher geht als die Auflösung von kleinen Hilfsdreiecken für jede einzelne gemessene Strecke, bleibt sie immer noch zeitraubend.

Es ist klar, daß im Normalfall die Instrumentenhöhe  $i$  und die Stichhöhe dieselbe Rolle spielen wie die zwischenliegenden Stichmaße. Man könnte also konsequenterweise die Instrumentenhöhe mit  $f_0$  und die Zielhöhe mit  $f_n$  bezeichnen. Denn im Normalfall geht auch am Anfang und am Ende der Polygonseite die Streckenmessung von, bzw. zum Pflöck.

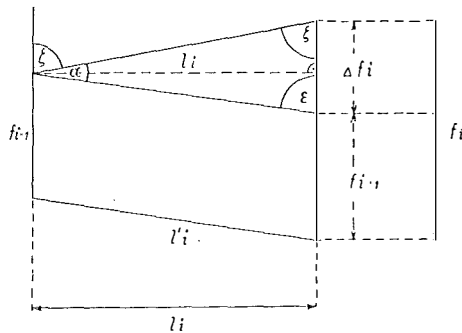


Fig. 2

Die Seite  $l'_i$  hat an der dem Instrument zugekehrten Seite das Stichmaß  $f_{i-1}$ , auf der dem Instrument abgekehrten Seite das Stichmaß  $f_i$ . Die Differenz der beiden Stichmaße  $f_i - f_{i-1} = \Delta f_i$ .

Figur 2 stellt eine Skizze des Meßvorganges dar. Die gemessene Teilstrecke  $l'_i$  wird herausgegriffen und parallel um das Maß  $f_{i-1}$  so verschoben, daß ein Dreieck mit den Winkeln  $\zeta$ ,  $\epsilon$  und  $\alpha$  entsteht. Die zugehörigen Seiten sind  $\Delta f_i$ ,  $l'_i$  und der Abschnitt der Visierlinie. Gesucht wird die Horizontalprojektion  $l_i$  der Strecke  $l'_i$ .

$$l_i = l'_i \sin \epsilon = l'_i \sin (\zeta + \alpha) = l'_i \sin \zeta \cos \alpha + l'_i \cos \zeta \sin \alpha \dots (1)$$

In dieser Gleichung ist  $\alpha$  noch nicht bekannt, es muß daher  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  durch bekannte Werte ausgedrückt werden.

$$\sin \alpha = \frac{\Delta f_i}{\rho_i} \sin \xi \dots \dots \dots (2)$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \frac{1}{8} \sin^4 \alpha - \text{usw.} \dots \dots \dots (3)$$

Es wird sich später zeigen, daß das letzte Glied in seiner Auswirkung verschwindend klein ist und vernachlässigt werden kann. Solange der Beweis jedoch nicht geführt ist, muß es noch mitgenommen werden. Setzt man für  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  die Werte aus den Gleichungen (2) und (3) in die Gleichung (1) ein, so erhält man:

$$l_i = \rho_i \sin \zeta - \rho_i \sin \zeta \cdot \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 f_i}{\rho_i^2} \sin^2 \zeta - \rho_i \sin \zeta \frac{1}{8} \sin^4 \zeta \frac{\Delta^4 f_i}{\rho_i^4} + \rho_i \cos \zeta \sin \zeta \frac{\Delta f_i}{\rho_i} =$$

$$= \rho_i \sin \zeta + \frac{1}{2} \Delta f_i \sin 2 \zeta - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 f_i}{\rho_i} \sin^3 \zeta + r_i \dots \dots \dots (4)$$

Das in der Formel (4) ausgewiesene Restglied  $r_i$  soll vor der Weiterbehandlung untersucht werden:

$$r_i = - \rho_i \sin \zeta \cdot \frac{1}{8} \sin^4 \zeta \frac{\Delta^4 f_i}{\rho_i^4} = - \frac{1}{8} \frac{\Delta^4 f_i}{\rho_i^3} \sin^5 \zeta \dots \dots \dots (5)$$

Dieser Ausdruck  $r_i$  wird besonders ungünstig bei  $\zeta = 90^\circ$ ,  $\Delta f_i = 2 \text{ m}$  und  $\rho_i = 20 \text{ m}$ . Dann wird  $r_i = - \frac{1}{4000} \text{ m}$ , das ist  $\frac{1}{4} \text{ mm}$ . Dies besagt, daß bei Stichmaßenunterschieden (gemeint ist immer nur der Unterschied zweier benachbarter Stichmaße) bis zu 2 m das Restglied vollkommen vernachlässigt werden kann. Steigt der Stichmaßenunterschied über 2 m wesentlich hinaus, müßte die Korrektur nach der Formel (5) in Rechnung gezogen werden. Dieser Fall wird sich wohl äußerst selten ergeben.

Bei Vernachlässigung des Restgliedes vereinfacht sich nun die Formel (4) ganz wesentlich. Es bleiben außer dem Hauptglied  $\rho_i \sin \zeta$  nur mehr 2 Korrektionsglieder.

$$l_i = \rho_i \sin \zeta + \frac{1}{2} \Delta f_i \sin 2 \zeta - \frac{\Delta f_i^2}{2 \rho_i} \sin^3 \zeta \dots \dots \dots (6)$$

Erweitert man die Formel von der Einzel- auf die gesamte Strecke einer Polygonseite, so ergibt sich:

$$L = [\rho] \sin \zeta + \frac{1}{2} [\Delta f] \sin 2 \zeta - \left[ \frac{\Delta^2 f}{2 \rho} \right] \sin^3 \zeta \dots \dots \dots (7)$$

Die Diskussion der obigen Formel (7) zeigt: Das Hauptglied entsteht durch einfache Addition aller schiefgemessener Strecken; diese Summe ist mit dem  $\sin$  der Zenithdistanz zu multiplizieren. Das erste Korrektionsglied enthält die Summe aller  $\Delta f_i$ . Es ist offenkundig, daß alle Stichmaße von  $f_1$  beginnen, bis  $f_{n-1}$  je einmal sowohl positiv als auch negativ vorkommen, daher wegfallen. Es bleiben also nur die Stichmaße am Anfangs- und Endpunkt der Polygonseite übrig, also  $-(i-z)$  oder aber  $(f_n - f_0)$ . Damit bekommt die Formel ihre endgültige Form

$$L = [\rho] \sin \zeta + \frac{(f_n - f_0)}{2} \sin 2 \zeta - \left[ \frac{\Delta^2 f}{2 \rho} \right] \sin^3 \zeta \dots \dots \dots (8)$$

Ist die Zielhöhe  $\emptyset$ , was ja meistens im Ermessen des Beobachters steht, so bleibt überhaupt nur  $(-i)$  übrig. Sollte aber die erste Strecke nicht vom Pflock sondern von der Fernrohrdrehachse weg gemessen worden sein, was ja auch dem Beobachter anheimgestellt ist, so wird auch hier das Stichmaß gleich  $\emptyset$  und der ganze Ausdruck  $[\Delta f]$  wird 0, womit das erste Korrektionsglied wegfällt. Man kann es auch dadurch zum Wegfallen bringen, daß man doch vom Pflock unter dem Instrument weg mißt und als Zielhöhe die Instrumentenhöhe nimmt. Ein besonderer Vorteil ist jedoch von solchen Spezialitäten nicht zu erwarten, weil die Berechnung des ersten Korrektionsgliedes, in den meisten Fällen  $-\frac{i}{2} \sin 2 \zeta$  äußerst einfach ist. Dieses Korrektionsglied kann positiv oder negativ sein; denn der erste Faktor  $-(i-z)$  ist fast immer negativ, aber der zweite  $\sin 2 \zeta$  ist bei steigender Visur positiv, bei fallender Visur negativ. In den meisten Fällen wird es 100 *mm* nicht überschreiten.

Das zweite Korrektionsglied  $-\left[\frac{\Delta^2 f}{2l}\right] \sin^3 \zeta$  ist immer negativ und läßt sich aus der mitfolgenden Rechentafel in natürlicher Größe direkt abgreifen. Das beiliegende Nomogramm ist eine Verkleinerung von ungefähr  $\frac{3}{4}$  der richtigen Größe gegenüber dem Original. Die Verwendung bleibt jedoch die gleiche.

Der Hauptteil dieser Rechentafel dient der Ermittlung des Ausdruckes  $\left[\frac{\Delta^2 f}{2l}\right]$ . Dieser Ausdruck wird am besten mit einem Additionszirkel von 10 *cm* Länge unter Berücksichtigung der Werte für  $\Delta f$  und  $l'$  abgegriffen und im Zirkel addiert. Die Zirkelsumme wird im linken Teil mit dem Wert von  $\zeta$  weiterreduziert. Ein Schlüssel zur Verwendung der Rechentafel ist in Figur 3 angegeben. Da es vorkommen kann, daß der Wert  $\left[\frac{\Delta^2 f}{2l}\right]$  die Spannweite des Zirkels (100 *mm*) einmal oder auch mehrmals übersteigt, kann für die vollen Ausmaße der 100 *mm* oder ihres Vielfachen der Ziffernwert seiner Komponente am linken Teil der Rechentafel direkt abgelesen werden.

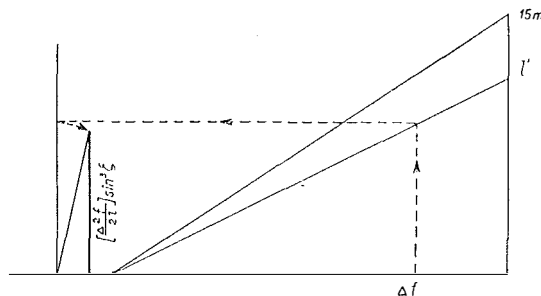


Fig. 3

Das zweite Korrektionsglied wird nur dann größere Werte erreichen, wenn die Stichmaße zweier benachbarter Pflocke große Unterschiede aufweisen. Bleiben diese Unterschiede unter einem Meter, so wird das ganze Korrektionsglied für eine Polygonseite selten 100 *mm* übersteigen.

Unabhängig vom Verfasser hat Herr Dipl.-Ing. M i t t e r auf einem anderen Weg eine Formel abgeleitet, in welcher an Stelle des  $\sin^3 \zeta$  im zweiten Korrektionsglied  $\sin^2 \zeta$  erscheint, während die übrige Formel mit der genannten Formel (8) übereinstimmt. Der Grund dieses Unterschiedes liegt in der Art der Annäherung; während in der Formel (8) ein negatives Restglied  $r$  vorkommt, wird dieses Restglied bei Mitter immer positiv. Man könnte daher irgend einen Mittelweg suchen und statt  $\sin^3 \zeta$  oder  $\sin^2 \zeta$  einfach  $\sin^{2,5} \zeta$  in die Formel einführen. Dem steht jedoch die Tatsache entgegen, daß in jedem Falle der zu erwartende Fehler nur Bruchteile von  $mm$  ausmachen wird, also beide Formeln als gleichwertig angesehen werden können und die Einführung der Potenzexponenten 2,5 eine unnötige Komplikation darstellen würde, zumal in jedem Fall der Fehler aus der Formel, bzw. aus der Rechentafel weit unter der Meßgenauigkeit liegen würde.

Es besteht noch die Möglichkeit, mittels zweier weiterer Nomogramme die gesamte Auswertung der Formel (8) unter Ausschaltung von Funktionstafeln und Rechenmaschine mit Millimetergenauigkeit graphisch durchzuführen. Das Nomogramm für das erste Glied beruht auf der einfachen Transformation:

$$[l'] \sin \zeta = [l'] - [l'] (1 - \sin \zeta), \dots \dots \dots (9)$$

während sich das zweite Glied unmittelbar graphisch darstellen läßt.

Die Verwendung der Formel (8) stellt nicht bloß die Herabsetzung der notwendigen Arbeitszeit auf einen Bruchteil der früheren dar; als weiteren Vorteil kann die Ausschaltung einer Reihe von Irrtumsmöglichkeiten und die Tatsache, daß die Rechnung immer der Vorstellung entspricht, angeführt werden.

## Fehlertheoretische Untersuchungen der neueren Verfahren zur gegenseitigen Orientierung von Luftbildern

Von H. S c h m i d, Wien

(Fortsetzung)

Fährt man nun in analoger Weise fort, so erhält man schließlich von sämtlichen Orientierungselementen und ihren Fehlersymbolen die jeweils 2. Komponenten. Auf Grund der Gleichung (4, 8) erhält man schließlich die Gesamtverbesserungen der Orientierungselemente sowie deren mittlere Fehler. Zur Bestimmung von  $d\kappa$  und  $d\varphi$  wäre noch hinzuzufügen, daß auf Grund der jeweils vorhergehenden  $\gamma$ -Parallaxeneindrehungen die 2. Komponenten der Elemente  $\kappa$  und  $\varphi$  Null werden. Dennoch wird man, wie die entsprechenden Fehlerverteilungen zeigen, kleine Verbesserungen an beiden Elementen anbringen müssen.

Mit Hilfe der Rechenregeln von Tienstra lassen sich nun die mittleren Fehler und die Korrelationskoeffizienten der Orientierungselemente leicht berechnen. Da die Beobachtung der  $\gamma$ -Parallaxen in den Punkten u n a b h ä n g i g voneinander erfolgt, sind nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz die Produkte der Gewichtssymbole der einzelnen Parallaxenbeobachtungen  $\mu_\alpha \cdot \mu_\beta$  alle Null und die