Paper-ID: VGI_195217

Zur Reduktion der kürzesten Weglänge in die geodätische Bezugsfläche

Karl Hubeny [1]

[1] *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **40** (6), S. 169–174

1952

BibTEX:

```
@ARTICLE{Hubeny_VGI_195217,
Title =  {Zur Reduktion der k{\"u}rzesten Wegl{\"a}nge in die geod{\"a}tische
   Bezugsfl{\"a}che},
Author =  {Hubeny, Karl},
Journal =  {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages =  {169--174},
Number =  {6},
Year =  {1952},
Volume =  {40}
}
```

Für die Fehlerrechnung können nach dem Vorschlag von Zoelly die Unterschiede v zwischen den stationsausgeglichenen Winkeln und den Einzelsätzen verwendet werden. Wenn für insgesamt d verschiedene Winkel von denen $n =$ Winkel für die Festlegung sämtlicher Richtungen notwendig sind, im ganzen t Sätze gemessen wurden, dann erhält man den mittleren Fehler der Gewichtseinheit, also des in einem Satz gemessenen Winkels aus

$$m_1 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{t-n}}$$

Der mittlere Fehler des Satzmittels, bzw. eines ausgeglichenen Winkels für ein durchschnittliches Gewicht von $\frac{t}{d}$, bzw. $\frac{t}{n}$ wird dann

$$\mu_m = \pm\, m_1 \sqrt{\frac{d}{t}}, \text{ bzw. } \mu_m{}' = \pm\, m_1 \sqrt{\frac{n}{t}}.$$

Da nach der Ausgleichung alle Winkel gleicher Ordnung als gleichgewichtig betrachtet werden, verzichtet man darauf, die mittleren Fehler der Einzelwinkel streng vorzurechnen und begnügt sich mit den angegebenen Durchschnittswerten.

Baeschlin zieht es vor, die Fehlerrechnung mit Hilfe der Verbesserungen v' durchzuführen, die sich aus den Unterschieden zwischen den ausgeglichenen Winkeln und den Satzmitteln der d verschiedenen Winkel ergeben. Damit wird der mittlere Fehler der Gewichtseinheit

$$m_2 = \pm \sqrt{\frac{[p\,v'\,v']}{d-n}}.$$

Da in den Satzmitteln die Kreisteilungsfehler fast vollständig getilgt sind, ist der Wert m_2 gegenüber m_1 frei vom Einfluß der periodischen Kreisteilungsfehler. Der Einfluß der Kreisteilungsfehler auf einen Winkel kann daher aus

$$\delta_w = \pm \sqrt{m_1^2 - m_2^2}$$

oder für Kreisdurchmesser aus

$$\delta_d = \pm \frac{\delta w}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{m_1^2 - m_2^2}{2}}$$

berechnet werden.

Zur Reduktion der kürzesten Weglänge in die geodätische Bezugsfläche

Von K. Hubeny, Graz

I.

Soll eine durch Funkmessung oder mit hochfrequent moduliertem Licht gemessene Strecke — eine Kürzeste im Sinne des Fermatschen Satzes — zu geodätischen Operationen verwendet werden, so ist diese Strecke auf das Rotationsellipsoid zu reduzieren. Nachstehend soll eine derartige Reduktion angegeben werden (siehe auch [1]).

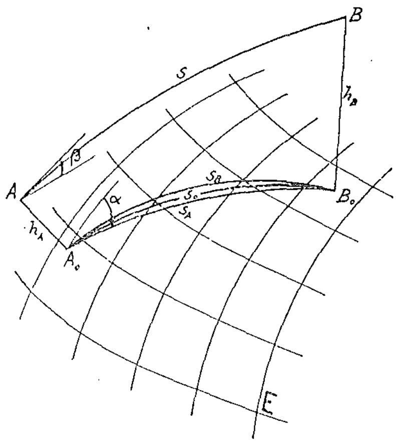

Abb. 1

Die geometrischen Zusammenhänge der vorliegenden Problemstellung können der nebenstehenden Figur entnommen werden. Die beiden Raumpunkte A und B sind durch eine Raumkurve, eine Extremale nach dem Fermatschen Satz, verbunden; die Bogenlänge s dieser Raumkurve ist das Ergebnis der Messung. Die durch die Punkte A und B bestimmten Flächennormalen des Rotationsellipsoids definieren auf diesem die Punkte A_0 und B_0, denen wir die Parameterwerte φ_A, λ_A und φ_B, λ_B, also geographische Koordinaten, zuordnen. Die in den Flächennormalen dieser Punkte gezählten Abstände $\overline{A_0A} = h_A$ und $\overline{B_0B} = h_B$ sind die auf das Rotationsellipsoid bezogenen Höhen der Punkte A und B. Verbindet man die Punkte A_0 und B_0 des Rotationsellipsoids durch eine Kürzeste der Fläche, so erhält man die geodätische Strecke A_0B_0, deren Bogenlänge mit s_0 bezeichnet werden soll.

Unter der „Reduktion der Raumkurve s in die geodätische Bezugsfläche" verstehen wir nun die Bestimmung der der Raumkurve s zugeordneten geodätischen Strecke s_0 der Bezugsfläche.

II.

Zur Entwicklung der Reduktion bedienen wir uns der folgenden Vereinfachung: Wir definieren durch die Flächennormale A_0A und durch den Punkt B_0 eine Ebene, die das Ellipsoid längs des Normalschnittes $A_0B_0 = s_A$ schneidet. In diese Ebene projizieren wir den Punkt B, die Raumkurve s und die geodätische Strecke s_0. Für die zu erwartenden Bogenlängen s oder s_0 von maximal einigen hundert Kilometern und für die mögliche Höhe des Punktes B läßt sich zeigen, daß durch diesen Vorgang weder die Bogenlängen s, s_0 noch die Höhe h_B um praktisch fühlbare Beträge geändert werden können; wir beweisen dies leicht durch die Reduktion des Normalschnittes auf die geodätische Kurve [2] und etwa auch durch die Reduktion des Azimuts zufolge der Höhe des Zielpunktes [3]. In die nebenstehende Figur ist das Ergebnis dieser Projektion eingetragen; die Bezeichnungen s, s_0 und h_B sollen ausdrücken, daß diese Größen praktisch unverändert bleiben.

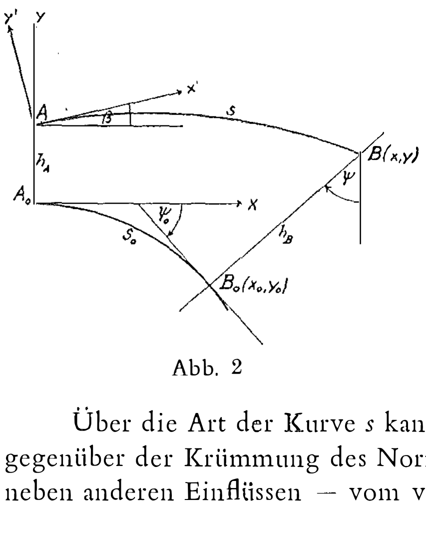

Abb. 2

Über die Art der Kurve s kann nur ausgesagt werden, daß ihre Krümmung gegenüber der Krümmung des Normalschnittes sehr gering ist; ihre Form ist — neben anderen Einflüssen — vom vertikalen und vom horizontalen Druckgefälle längs des durchlaufenen Weges abhängig. Wir ersetzen sie durch einen Kreisbogen mit dem Radius r und nehmen an, daß für diesen Radius ein Erfahrungswert bekannt sei.

III.

Der hier entwickelten Reduktion der Bogenlänge s auf die geodätische Strecke s_0 liegt folgender Gedanke zugrunde: Aus der vorgegebenen Bogenlänge s und aus dem Höhenwinkel β werden die auf ein nach Abb. 2 angenommenes Koordinatensystem x, y bezogenen Koordinaten des Punktes B berechnet; dem Punkt B ist ein Punkt B_0 des Rotationsellipsoids zugeordnet, der mit dem Punkt A_0 die gesuchte Bogenlänge s_0 bestimmt.

Nach Abb. 2 gilt, zunächst bezogen auf das in der Normalschnittebene mit dem Ursprung in A angenommene Koordinatensystem x', y'

$$x_B' = r \sin \frac{s}{r} \qquad y_B' = r \cos \frac{s}{r} - r. \tag{1}$$

Da der Winkel $\frac{s}{r}$ nur ein sehr kleiner Winkel sein kann — s beträgt einige hundert, r dagegen sicherlich etliche zehntausend Kilometer —, können die Winkelfunktionen in (1) entwickelt werden. Es ist

$$x_B' = s - \frac{s^3}{6r^2} + \ldots \qquad y_B' = -\frac{s^2}{2r} + \ldots. \tag{2}$$

Wie eine Abschätzung der weggelassenen Glieder in den vorstehenden Entwicklungen zeigt, erreicht in y' deren Einfluß erst bei $s > 500$ *km*, in x' erst bei noch größeren Bogenlängen die Größenordnung von 0,01 *m*.

Für das mit dem Ursprung in A_0 angenommene Koordinatensystem x, y gilt

$$x_B = x_B' \cos\beta - y_B' \sin\beta \qquad y_B = h_A + y' \cos\beta + x' \sin\beta \tag{3}$$

und, nach Eintragung von (2)

$$x_B = \cos\beta . s + \frac{\sin\beta}{2r} s^2 - \frac{\cos\beta}{6r^2} s^3 + \ldots.$$

$$y_B = h_A + \sin\beta . s - \frac{\cos\beta}{2r} s^2 - \frac{\sin\beta}{6r^2} s^3 + \ldots \tag{4}$$

Damit sind die Koordinaten von B gegeben. Die Koordinaten des Höhenfußpunktes B_0 stellen wir dar als Funktionen der Bogenlänge s_A des Normalschnittes A_0B_0, dessen Länge wir der geodätischen Strecke s_0 zwischen diesen Punkten gleichsetzen können. Nach [4] gilt mit $s_A = s_0$

$$x_0 = s_0 - \frac{1 + 2\eta^2 \cos^2\alpha}{6N^2} s_0^3 + \frac{3\eta^2 t \cos\alpha}{8N^3} s_0^4 + \frac{1}{120N^4} s_0^5 + \ldots$$

$$y_0 = -\frac{1 + \eta^2 \cos^2\alpha}{2N} s_0^2 + \frac{\eta^2 t \cos\alpha}{2N^2} s_0^3 + \frac{1}{24N^3} s_0^4 + \ldots \tag{5}$$

Hierin bedeutet

N den Normalkrümmungshalbmesser des Rotationsellipsoids,

α das Azimut des Normalschnittes A_0B_0 in A_0

$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ $e'^2 = 2.$Exzentrizität der Meridianellipse, $t = \operatorname{tg} \varphi$

Die von der geographischen Breite abhängigen Größen N, η^2, t beziehen sich auf die geographische Breite des Punktes A_0. In den Gleichungspaaren (4) und (5) liegt je eine Parameterdarstellung der Kurven s und s_0 vor.

Denkt man sich in B_0 die Kurventangente und die Kurvennormale — diese muß B enthalten —, so schließt die erstere mit der x-Achse den Winkel Ψ_0, die letztere mit der Richtung der y-Achse den Winkel Ψ ein. Diese beiden Winkel müssen als Normalwinkel einander gleich sein.

Es muß also

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{x_0 - x_B}{y_0 - y_B} = \operatorname{tg} \Psi_0 = -\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} \tag{6}$$

sein, wenn wir mit $\dot{y}_0$ und $\dot{x}_0$ die Ableitungen $\frac{dy_0}{ds_0}$ und $\frac{dx_0}{ds_0}$ bezeichnen. In der Gleichung

$$\frac{x_0 - x_B}{y_0 - y_B} = -\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} \tag{7}$$

liegt daher nach der Eintragung von (4), (5) und der aus (5) gebildeten Ableitungen der gesuchte Zusammenhang zwischen s und s_0 vor.

Die Auflösung der vorstehenden Gleichung nach der gesuchten Bogenlänge s_0 gelingt sehr leicht mit Hilfe des Iterationsverfahrens, dessen rasches Konvergieren im vorliegenden Fall dadurch begründet ist, daß sich eine Änderung von s_0 auf den Winkel Ψ wesentlich stärker auswirkt als auf den Winkel Ψ_0. Es ist nämlich

$$d\Psi = -\frac{ds_0}{h_B} \quad , \quad d\Psi_0 \doteq \frac{ds_0}{N} \tag{8}$$

und

$$\frac{d\Psi}{d\Psi_0} = -\frac{N}{h_B} \quad . \tag{9}$$

Wir stellen noch einen Ausdruck zur Berechnung des Winkels Ψ_0 in Funktion der Bogenlänge s_0 bereit; aus

$$\operatorname{tg} \Psi_0 = -\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}$$

folgt mit den Gleichungen (5) nach einer einfachen Rechnung

$$\operatorname{tg} \Psi_0 = \frac{1 + \eta^2 \cos^2 \alpha}{N} s_0 - \frac{3\eta^2 t \cos \alpha}{2\,N^2} s_0^2 + \frac{2 + 9\eta^2 \cos^2 \alpha}{6\,N^3} s_0^3 + \ldots \tag{10}$$

Zur Berechnung des dem Bogen s zugeordneten Bogens s_0 nehmen wir zunächst einen Näherungswert $\bar{s}_0$ für den letzteren an und berechnen mit (4), (5) und (10) die Werte x_B, y_B sowie die Näherungswerte $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$ und $\bar{\Psi}_0$.

Aus

$$\operatorname{tg} \bar{\Psi} = \frac{\bar{x}_0 - x_B}{\bar{y}_0 - y_B}$$

berechnen wir jenen Wert $\bar{\Psi}$ von Ψ, der der vorläufigen Lage von B_0 entspricht. Da, wie erwähnt, ein Näherungswert von s_0 den Winkel Ψ_0 mit einer viel geringeren Abweichung vom Sollwert ergibt als den Winkel Ψ, sehen wir für den Augenblick den mit $\bar{s}_0$ errechneten Wert $\bar{\Psi}_0$ als den Sollwert von Ψ_0 und damit auch von Ψ an. Wir erhalten damit den am Näherungswert $\bar{s}_0$ anzubringenden Zuschlag ds aus

$$ds_0 = - h_B (\bar{\Psi}_0 - \bar{\Psi}), \quad s_0 = \bar{s}_0 + ds_0 \tag{11}$$

Eine Wiederholung des Verfahrens mit dem so gewonnenen Wert s_0 erübrigt sich in der Regel, kann aber zur Kontrolle vorgenommen werden.

Wie man sieht, ist die Reduktionsrechnung in der vorliegenden Art sehr einfach ausführbar; auch eine mehrmalige Annäherung erfordert nur geringe Rechenarbeit, da die Koeffizienten der Potenzreihen (5) und (10) nur einmal, bezogen auf den fest vorgegebenen Punkt A_0, berechnet werden müssen. Mit der angegebenen Gliederzahl von (5) und (10) liegt die Genauigkeit der Reduktion bei Bogenlängen bis etwa 500 *km* in der Größenordnung von 0,01 *m*.

IV.

Wir hatten zur Berechnung der Reduktion vorausgesetzt, daß der Winkel β zwischen der Horizontalen und der Kurventangente in A gegeben sei. Ist dies nicht der Fall, so kann die Reduktion trotzdem in ähnlicher Weise wie früher erfolgen. Mit Hilfe des Wertes r berechnen wir zunächst aus der Bogenlänge s die Sehne $s' = \overline{AB}$; es ist

$$s' = \overline{AB} = s - \frac{s^3}{24 r^2} + \ldots \tag{12}$$

Als nächsten Schritt errechnen wir mit einem Näherungswert $\bar{s}_0$ für s_0 die vorläufigen Koordinaten $\bar{x}_0, \bar{y}_0$ von B_0 und den dem Näherungswert $\bar{s}_0$ zugeordneten Wert $\bar{\Psi}_0$. Daraus folgt weiter

$$\bar{x}_B = \bar{x}_0 + h_B \sin \bar{\Psi}_0 \qquad \bar{y}_B = \bar{y}_0 + h_B \cos \bar{\Psi}_0 \tag{13}$$

Aus

$$\bar{s}' = \sqrt{(x_A - \bar{x}_B)^2 + (y_A - \bar{y}_B)^2} \quad , \quad x_A = o, \ y_A = h_A$$

ergibt sich die dem Wert $\bar{s}_0$ entsprechende Sehne $\bar{s}' = \overline{A\bar{B}}$; die Differenz

$$s' - \bar{s}' = ds'$$

ergibt in der Regel bereits hinreichend genau den Zuschlag, der am Wert $\bar{s}_0$ anzubringen ist.

Es sei noch erwähnt, daß mit der Annahme von s, β, r sowie h_A und h_B eine Überbestimmung vorliegt. Es wäre denkbar, hieraus Schlüsse auf die Krümmung der Raumkurve zu ziehen.

Literatur:

[1] *J. Th. Verstelle* Some geodetic problems involed in the computation of long distances measured by Shoran or similar electronic or radio equipment (Photogrammetria 1949, Amsterdam).

[2] *Jordan-Eggert* Handbuch der Vermessungskunde III/2, 1941, Seite 37.

[3] *derselbe* Seite 34.

[4] *W. Großmann* Reihenentwicklungen zur Theorie der Normalschnitte (Zeitschrift für Vermessungswesen 1935, Stuttgart, Seite 33).

Projektion und Lotabweichung

Von K. Ledersteger, Wien

(Veröffentlichung der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung)

Zusammenfassung: Für die übliche Netzausgleichung ist Helmerts Definition der relativen Lotabweichungen die allein richtige. Hingegen erfordert die exakte Definition der absoluten Lotabweichungen die Projektion der Geoidpunkte auf das mittlere Erdellipsoid. Nur für diese Projektion im Sinne Vening-Meinesz' gilt in aller Strenge das Theorem von Laplace. Bei genauer Kenntnis der Geoidundulationen kommt nach entsprechenden Reduktionen die astronomisch-geodätische Netzausgleichung der Projektion hinreichend nahe.

Summary: For the usual adjustment of nets Helmert's definition of relative deflections of the plumbline is all correct. But the exact definition of absolute deflections of the plumbline needs a projection of the points of geoid to the mean ellipsoid of the earth. Only for this projection in the sense of Vening-Meinesz the theorem of Laplace is exactly valid. With complete knowledge of the undulations of geoid and after corresponding reductions the astronomic-geodetic adjustment of nets sufficiently approaches to a projection.

Résumé: Pour la compensation usuelle des réseaux, la définition de Helmert sur les déviations relatives de la verticale est la seule correcte. Cependant la définition exacte des déviations absolues de la verticale exige la projection des points du géoïde sur l'ellipsoïde terrestre moyen. Ce n'est que pour cette projection dans le sens voulu par Vening-Meinesz que le théorème de Laplace vaut dans toute sa rigueur. A supposer la connaissance exacte des ondulations du géoïde, la compensation astronomico-géodésique des réseaux, une fois les réductions convenablement effectuées, approche suffisamment de la projection.

1.

In jüngster Zeit wurde neuerdings das Problem der exakten Definition der Lotabweichungen aufgerollt. Dieses Problem ist aufs engste mit der Frage verknüpft, ob und inwieweit die übliche Ausgleichung rein geodätischer oder astronomisch-geodätischer Netze auf einem bis zu einem gewissen Grade willkürlichen Referenzellipsoid als eine Projektion der Geoidpunkte auf diese Bezugsfläche interpretiert werden darf. Wir verfolgen zunächst die Helmertschen Gedankengänge, wobei es allerdings auf die Herausstellung jener bisher wenig oder gar nicht