

Paper-ID: VGI_195218



Projektion und Lotabweichung

Karl Ledersteger

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **40** (6), S. 174–187

1952

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Ledersteger_VGI_195218,  
  Title = {Projektion und Lotabweichung},  
  Author = {Ledersteger, Karl},  
  Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {174--187},  
  Number = {6},  
  Year = {1952},  
  Volume = {40}  
}
```



Literatur:

- [1] *J. Th. Verstelle* Some geodetic problems involed in the computation of long distances measured by Shoran or similar electronic or radio equipment (Photogrammetria 1949, Amsterdam).
- [2] *Jordan-Eggert* Handbuch der Vermessungskunde III/2, 1941, Seite 37.
- [3] *derselbe* Seite 34.
- [4] *W. Großmann* Reihenentwicklungen zur Theorie der Normalschnitte (Zeitschrift für Vermessungswesen 1935, Stuttgart, Seite 33).

Projektion und Lotabweichung

Von K. Ledersteger, Wien

(Veröffentlichung der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung)

Zusammenfassung: Für die übliche Netzausgleichung ist Helmer's Definition der relativen Lotabweichungen die allein richtige. Hingegen erfordert die exakte Definition der absoluten Lotabweichungen die Projektion der Geoidpunkte auf das mittlere Erdellipsoid. Nur für diese Projektion im Sinne Vening-Meinesz' gilt in aller Strenge das Theorem von Laplace. Bei genauer Kenntnis der Geoidundulationen kommt nach entsprechenden Reduktionen die astronomisch-geodätische Netzausgleichung der Projektion hinreichend nahe.

Summary: For the usual adjustment of nets Helmer's definition of relative deflections of the plumbline is all correct. But the exact definition of absolute deflections of the plumbline needs a projection of the points of geoid to the mean ellipsoid of the earth. Only for this projection in the sense of Vening-Meinesz the theorem of Laplace is exactly valid. With complete knowledge of the undulations of geoid and after corresponding reductions the astronomic-geodetic adjustment of nets sufficiently approaches to a projection.

Résumé: Pour la compensation usuelle des réseaux, la définition de Helmer sur les déviations relatives de la verticale est la seule correcte. Cependant la définition exacte des déviations absolues de la verticale exige la projection des points du géoïde sur l'ellipsoïde terrestre moyen. Ce n'est que pour cette projection dans le sens voulu par Vening-Meinesz que le théorème de Laplace vaut dans toute sa rigueur. A supposer la connaissance exacte des ondulations du géoïde, la compensation astronomico-géodésique des réseaux, une fois les réductions convenablement effectuées, approche suffisamment de la projection.

1.

In jüngster Zeit wurde neuerdings das Problem der exakten Definition der Lotabweichungen aufgerollt. Dieses Problem ist aufs engste mit der Frage verknüpft, ob und inwieweit die übliche Ausgleichung rein geodätischer oder astronomisch-geodätischer Netze auf einem bis zu einem gewissen Grade willkürlichen Referenzellipsoid als eine Projektion der Geoidpunkte auf diese Bezugsfläche interpretiert werden darf. Wir verfolgen zunächst die Helmer'schen Gedankengänge, wobei es allerdings auf die Herausstellung jener bisher wenig oder gar nicht

beachteter Gesichtspunkte ankommt, die die spätere Synthese mit der neuen Auffassung von V e n i n g - M e i n e s z¹⁾ ermöglichen.

Es sei ein Triangulierungsnetz 1. Ordnung auf einem Referenzellipsoid nach seinen rein geometrischen Bedingungen ausgeglichen worden, indem die den Netzmaßstab bestimmende Grundlinie und die Winkelbeobachtungen vorher auf das Geoid reduziert und unverändert auf die Referenzfläche übernommen wurden. Werden nun die im Triangulierungshauptpunkt oder Fundamentalpunkt astronomisch bestimmten Elemente, nämlich die Länge, die Breite und das Azimut einer Ausgangsseite unverändert beibehalten, so kann das ganze Netz mittels geodätischer Übertragungen koordiniert werden. Sobald dann in irgendeinem Netzpunkt abermals die Polhöhe, die Länge und das Azimut einer Netzseite astronomisch ermittelt werden, lassen sich aus der Gegenüberstellung der astronomischen (φ' , λ' , α') und geodätischen Koordinaten (φ , λ , α) die Komponenten der „relativen“ Lotabweichung definieren:

$$(\varphi' - \varphi); (\lambda' - \lambda); (\alpha' - \alpha). \quad (1)$$

Nach der exakteren Auffassung P i z z e t t i s müssen dazu die astronomischen Beobachtungen auf das Geoid reduziert werden, und zwar die Breite wegen der Krümmung der Lotlinie und das Azimut des Vertikalschnittes wegen der Meereshöhe des Zielpunktes.

Geoid und Referenzellipsoid können jetzt in eine derartige gegenseitige Lage gebracht werden, daß der Hauptpunkt mit seinem Bildpunkt zusammenfällt und sowohl die physische Lotrichtung in diesem Punkt mit der Ellipsoidnormalen wie auch die beiden Meridianebenen zur Deckung gelangen. Dann sind zwangsläufig die Rotationsachse der Erde und die Figurenachse des Rotationsellipsoides einander parallel. Da ferner die auf das Geoid reduzierte Basis mit unveränderter Länge auf die Referenzfläche übernommen wurde, müssen wir diese noch entlang der gemeinsamen Lotrichtung des Hauptpunktes solange verschieben, bis sie die Basis in ihrem Mittelpunkt schneidet. Damit ist auch über die Höhenlage des Bezugsellipsoides verfügt. Bei dieser gegenseitigen Festlegung der beiden Flächen liegen die korrespondierenden Punkte nicht in ihrer Lotlinie streng übereinander. Denn die Netzausgleichung hat nichts mit einer Projektion zu tun. Infolge der weitgehenden Unabhängigkeit der Dreiecksexzesse von den Krümmungsverhältnissen der Rechenfläche werden vielmehr die Netzseiten gleichsam unverändert vom Geoid auf das Referenzellipsoid übertragen. Anders ausgedrückt, bleibt bei der Netzausgleichung der variable Neigungsunterschied zwischen Geoid und Ellipsoid gänzlich unberücksichtigt.

Die Lotabweichungen (1) sind bekanntlich in zweierlei Hinsicht relativ. Sie hängen ja nicht nur von den Konstanten des willkürlich gewählten Referenzellipsoides ab; ebenso willkürlich ist auch die Gleichsetzung der astronomischen und geodätischen Ausgangswerte im Fundamentalpunkt, derzufolge daselbst die

¹⁾ F. A. V e n i n g - M e i n e s z: Nieuwe Formules voor Schietloodafwijkingssystemen en het Theorema van Laplace, Proceedings of the Netherlands Academy of Science, Vol. LIII, No. 4, 1944 und: New Formulas for Systems of Deflections of the Plumblines and Laplace's Theorem, Bulletin Géodésique No. 15, März 1950.

Lotabweichung Null ist. Neben diesen willkürlichen Systemen relativer Lotabweichungen lassen sich grundsätzlich leicht die „absoluten“ Lotabweichungen definieren. Mit großer Annäherung dürfen wir der Normalfigur der Erde eine rotationsellipsoidische Gestalt zuschreiben; die Bestimmung von Achse und Abplattung dieses sogenannten „mittleren Erdellipsoides“ ist eine der vornehmsten Aufgaben der physikalischen Geodäsie. Das mittlere Erdellipsoid ist vor allem dadurch ausgezeichnet, daß sein Mittelpunkt mit dem Erdschwerpunkt und seine Figurenachse mit der Rotationsachse der Erde zusammenfällt. Geoid und mittleres Erdellipsoid liegen somit von vornherein eindeutig gegeneinander fest und man darf das Endziel der kontinentalen Großraumvermessungen darin erblicken, daß die Geoidpunkte auf das mittlere Erdellipsoid projiziert werden. Die mathematische Erdfigur kann dann gegenüber dem mittleren Erdellipsoid durch seine vertikalen Hebungen und Senkungen, die sogenannten Geoidundulationen, punktweise festgelegt werden.

Der Unterschied zwischen den Richtungen der beiden Lote in den korrespondierenden Punkten von Geoid und mittlerem Erdellipsoid definiert nun die absolute Lotabweichung. Wegen der empirischen Kleinheit der Geoidundulationen (im Mittel $\pm 30 \text{ m}$) und der Lotabweichungen — letztere dürften kaum $20''$ übersteigen —, ist es praktisch bedeutungslos, ob man sich die erwähnte Projektion der Geoidpunkte mittels der physischen Lotrichtung oder mittels der Ellipsoidnormalen vorgenommen denkt; eine Lotabweichung von $10''$ bewirkt bei einer Undulation von 100 m erst eine Lageunsicherheit von 5 mmm . Der absolute Charakter der so definierten Lotabweichungen, deren Komponenten zum Unterschied von den relativen Lotabweichungen mit $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ und $\Delta\alpha$ bezeichnet sein sollen, ist nicht nur in der eindeutigen gegenseitigen Lage von Geoid und mittlerem Erdellipsoid, sondern auch in der durch die Projektion bedingten „absoluten“ Lage der Dreiecksnetze und der dadurch — zunächst rein gedanklich! — erzielten Unabhängigkeit der einzelnen Punkte von einem Fundamentalpunkt gelegen.

Diese Unabhängigkeit gestattet es, jeden Punkt für sich zu betrachten. Läßt man durch eine Parallelverschiebung des mittleren Erdellipsoides einen Geoidpunkt P_1 mit seinem Bildpunkt P'_1 auf dem Ellipsoid zusammenfallen, so kann man um diesen Punkt eine Gaußsche Richtungskugel schlagen. Die beiden Lot- oder Zenitrichtungen schließen dann miteinander den Lotabweichungswinkel ϑ ein, der in eine meridionale (ξ) und eine Ostwest-Komponente (η) zerlegt werden kann. Zählen wir diese beiden Komponenten positiv nach Nord und Ost und auch das auf die Ellipsoidnormale bezogene Azimut A der astronomischen Zenitrichtung nordöstlich, so ist vorerst:

$$\xi = \vartheta \cos A; \quad \eta = \vartheta \sin A. \quad (2)$$

In nachstehender Figur 1 stellt Z das ellipsoidische, Z' das astronomische Zenit dar. Beide Lotabweichungskomponenten sind positiv, also A ein Winkel des ersten Quadranten. Da auch die Längen positiv nach Osten gezählt werden, ist λ' größer als λ und das sphärische Dreieck $ZZ'P$ liefert bei Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung den Sinussatz:

$$\eta = \vartheta \sin A = \Delta\lambda \cos \varphi'. \quad (3)$$

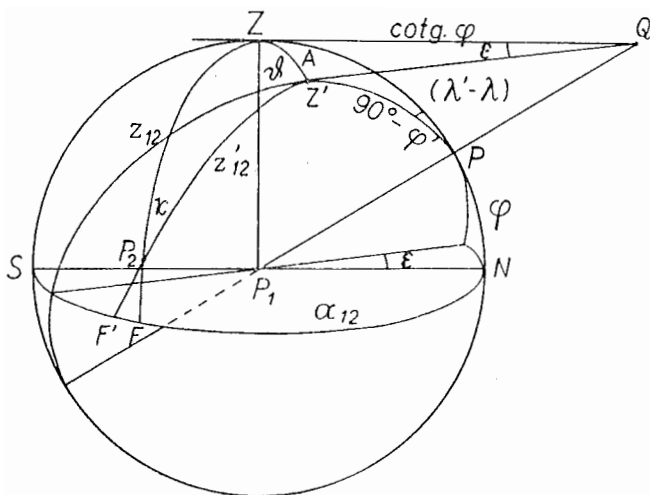


Fig. 1

Ferner wird die Tangentialebene an die Einheitskugel in Z vom ellipsoidischen und astronomischen Meridian in zwei Geraden geschnitten, die sich in der verlängerten Rotationsachse unter dem Winkel ϵ treffen; dabei ist die Strecke ZQ gleich $\cotg \varphi$. Um denselben Winkel ϵ weicht die Spur des astronomischen Meridians in der Horizontebene vom Nordpunkt in westlicher Richtung ab, so daß für alle Punkte des Horizontes die Differenz zwischen astronomischem und ellipsoidischem Azimut dem Winkel ϵ gleich ist: $\epsilon = (\alpha' - \alpha)$. Dabei hängt ϵ mit der η -Komponente der Lotabweichung durch die einfache Beziehung $\eta = \epsilon \cotg \varphi$ zusammen.

Liegt aber ein Zielpunkt P_2 über dem Horizont von P_1 , so wird sein astronomisches Azimut um den Winkel $\delta\alpha$ zu groß beobachtet. Bezeichnet man in dem Dreieck ZZ'P₂ den Winkel bei P₂ mit \varkappa , so liefert der Sinussatz die Relation:

$$\sin z'_{12} \sin \varkappa = \xi \sin (\alpha_{12} - A) = \xi \sin \alpha_{12} - \eta \cos \alpha_{12}.$$

Andererseits gibt das rechtwinklige Dreieck zwischen P₂ und den beiden Fußpunkten F und F' ähnlich:

$$\cos z'_{12} \sin \varkappa = \delta\alpha_{12}$$

und man findet durch Division der beiden letzten Gleichungen:

$$\delta\alpha_{12} = \cotg z'_{12} (\xi \sin \alpha_{12} - \eta \cos \alpha_{12}).$$

Daraus folgt für die azimutale Lotabweichungskomponente:

$$(\alpha' - \alpha) = \Delta\alpha = \epsilon + \delta\alpha = \xi \cotg z' \sin \alpha + \eta (\tg \varphi - \cotg z' \cos \alpha). \tag{4}$$

Im Triangulierungsnetz 1. O. sind aber die Visuren glücklicherweise zumeist fast horizontal, so daß im allgemeinen $\cotg z' \sim 0$ gesetzt werden darf. Dann reduziert sich (4) auf den Ausdruck:

$$\eta = \Delta\alpha \cotg \varphi \tag{5}$$

Aus der Gleichsetzung der beiden Ausdrücke (3) und (5) ergibt sich somit zwischen der longitudinalen und azimutalen Komponente der absoluten Lotabweichung bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung das berühmte Theorem von Laplace:

$$\Delta\alpha = \Delta\lambda \sin \varphi. \quad (6)$$

Die Laplacesche Gleichung ist von großer Wichtigkeit, weil ihr empirisch auftretender Widerspruch:

$$w = \Delta\alpha - \Delta\lambda \sin \varphi \quad (7)$$

Beobachtungsfehlern und deren Anhäufung zur Last gelegt werden kann. Sie eignet sich daher vorzüglich zur Orientierungskontrolle geodätischer Netze und wird zur wichtigsten Bedingung bei der astronomisch-geodätischen Netzausgleichung.

Zu beachten ist aber, daß hier die Laplacesche Gleichung nur für die absoluten Lotabweichungen abgeleitet wurde. Dieselbe Figur kann nun zwar auch den relativen Lotabweichungen zugrundegelegt werden, weil infolge der Parallelität der Rotationsachse und der Figurenachse des Referenzellipsoides die Richtungskugel abermals nur einen Pol aufweist. Trotzdem darf aber streng genommen für die relativen Lotabweichungen die Gültigkeit der Laplaceschen Gleichung nicht behauptet werden. Denn hier handelt es sich nicht um die Laplacesche Gleichung eines isolierten Punktes, sondern um die Laplacesche Gleichung jener geodätischen Linie, die den betrachteten Punkt mit dem Fundamentalpunkt der Triangulierung verbindet, wobei mit zunehmender Länge dieser Linie die auftretenden Glieder zweiter Ordnung nicht mehr vernachlässigt werden dürfen. Selbstverständlich kann man jedoch für die relativen Lotabweichungen dieselben Ausdrücke wie oben bilden und die Differenz:

$$(\alpha' - \alpha)_k - (\lambda' - \lambda)_k \sin \varphi_k = w_{hk} \quad (8)$$

als den Laplaceschen Widerspruch der Linie zwischen dem Hauptpunkt P_h und dem laufenden Punkt P_k bezeichnen. Weil aber diese Differenz theoretisch gar nicht verschwindet, ist die übliche Bezeichnung als „Widerspruch“ logisch nicht ganz einwandfrei; sie zwingt zur Anerkennung „theoretischer Widersprüche“.

Die Frage der Lotabweichungen ist untrennbar mit dem Problem der Lage eines Dreiecksnetzes auf der Rechenfläche verbunden. Jede Lageänderung besteht nun in einer differentialen Verschiebung und Verdrehung, bei der die Koordinaten- und Orientierungsänderung jedes Punktes P_k : $d\varphi_k$, $d\lambda_k$ und $d\alpha_k$ in Funktion der drei Verschiebungsgrößen $d\varphi_0$, $d\lambda_0$ und $d\alpha_0$ in einem Bezugspunkt P_0 zu berechnen sind. Grundsätzlich kann man als vierte Unbekannte noch einen Maßstabfaktor k einführen, der so zu verstehen ist, daß jede Netzseite eine zu ihrer Länge proportionale Änderung $ds = ks$, also $(s + ds) = (1 + k)s$, erfährt. Schließlich steht noch die Möglichkeit eines Ellipsoidüberganges, d. h. einer Änderung der Ellipsoidkonstanten $\frac{da}{a}$ und $d\alpha$ offen. Der funktionale Zusammenhang dieser Größen ist durch Helmersts fundamentale Differentialgleichungen der geodätischen Linie ge-

geben; sie seien sofort in jener Form angeschrieben, bei der die Koeffizienten der sechs Elemente weder die Länge der geodätischen Linie noch deren beide Azimute enthalten:

$$\begin{aligned}
 d\varphi_k'' &= \frac{M_0}{M_k} \cos l \, d\varphi_0'' + p_5 \left(k - \frac{da}{a} \right) - \frac{N}{M} \cos \varphi_0 \sin l \, d\alpha_0'' \\
 &\quad + (2 b'' \cos^2 \varphi_M - p_5 \sin^2 \varphi_M) da \\
 d\lambda_k'' &= d\lambda_0' + \frac{M_0}{N_k} \operatorname{tg} \varphi_k \sin l \, d\varphi_0'' + l'' \cos \varphi_0 \operatorname{sec} \varphi_k \left(k - \frac{da}{a} \right) \\
 &\quad + \frac{p_5}{\rho''} \operatorname{sec} \varphi_k \, d\alpha_0'' - l'' \cos \varphi_0 \operatorname{sec} \varphi_k \sin^2 \varphi_0 \cdot da \quad (9) \\
 d\alpha_k'' &= \sin l \operatorname{sec} \varphi_k (1 - e^2 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0) \, d\varphi_0'' + l'' \cos \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_k \left(k - \frac{da}{a} \right) \\
 &\quad + \cos \varphi_0 \left(\cos l \operatorname{sec} \varphi_k - \frac{e^2 b''}{\rho''} \sin \varphi_k \right) d\alpha_0'' - \\
 &\quad - l'' \cos \varphi_0 \left(\operatorname{tg} \varphi_k \sin^2 \varphi_0 - \frac{b''}{\rho''} \cos^2 \varphi_0 \right) da.
 \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen bedeuten M und N den Meridian- und Querkrümmungsradius, l die Längendifferenz der beiden Endpunkte der Linie ($\lambda_k - \lambda_0$), b'' und l'' die Breiten- und Längendifferenz in Bogensekunden, e die Exzentrizität der Meridianellipse und

$$p_5 = b'' - \frac{l''^2}{2 \rho''} \sin \varphi \cos \varphi.$$

Dort, wo M , N und φ ohne Index vorkommen, kann ohne Genauigkeitsverlust irgendein Wert zwischen o und k verwendet werden. Die Koeffizienten gelten bis auf Größen 3. Ordnung, wenn man e und die Länge $\left(\frac{s}{a}\right)$ der Linie als kleine Größen 1. O. auffaßt. Wie man sieht, erniedrigt sich die Zahl der Elemente von 6 auf 5, weil selbstverständlich die Koeffizienten der Maßstabänderung und der Achsenverbesserung entgegengesetzt gleich sind.

In den Helmerischen Gleichungen sind $d\varphi_0$, $d\lambda_0$ und $d\alpha_0$ drei unabhängige Verschiebungsgrößen auf der Fläche. Dabei nimmt $d\lambda_0$ begrifflicher Weise eine Sonderstellung ein, weil wir es mit einer Rotationsfläche zu tun haben. Eine alleinige Verschiebung im Parallelkreis läuft auf eine bloße Umbezeichnung der Meridiane hinaus, die ohne Einfluß auf die Breiten und Azimute bleibt. Anders liegen die Verhältnisse, wenn wir entgegen der bisherigen Festlegung des Dreiecksnetzes auch im Fundamentalpunkt eine Lotabweichung zulassen. Soll dabei nachträglich im Fundamentalpunkt kein Laplace'scher Widerspruch auftreten, so sind die Längen- und Azimutverschiebung nicht mehr unabhängig voneinander, sondern müssen der Bedingung:

$$d\alpha_h = d\lambda_h \sin \varphi_h \quad (10)$$

genügen. Geometrisch bedeutet dies, daß der Fundamentalpunkt P_h , der jetzt die Rolle des obigen Bezugspunktes P_0 übernimmt, räumlich gesehen eine reine Translation erfährt. Am klarsten tritt dieser Unterschied zutage, wenn man $d\varphi_h = 0$ setzt. Die Verschiebung $d\lambda_h$ ist dann die Verschiebung in einer Sehne, bei der die zugehörige Änderung des Ausgangsazimutes $d\alpha_h$ automatisch infolge der Meridiankonvergenz eintritt, die ja bekanntlich gleichfalls in erster Annäherung durch $\gamma = d\lambda \sin \varphi$ gegeben ist. Weil aber in den Helmer'schen Gleichungen $d\lambda_h$ als eine Verschiebung im Parallelkreis auf der Fläche zu verstehen ist, so ist die damit verbundene Drehung durch die azimutale Verschiebung $d\alpha_h = d\lambda_h \sin \varphi_h$ wieder rückgängig zu machen. Diese Translation gilt jedoch nur für den Hauptpunkt und die Ausgangselemente; das übrige Netz wird wie ein feines Drahtgitter auf der gekrümmten Fläche des Rotationsellipsoides verschoben, was in aller Strenge mit einer geringen Deformation verbunden ist. Durch eine anschließende, der Translation des Hauptpunktes entgegengesetzt gleiche Verschiebung des Ellipsoides mitsamt dem Netz in seiner neuen Lage kann abermals der Bildpunkt des Ursprunges in die Lotlinie seines Urbildes gebracht werden, und zwar genau an die Ausgangsstelle. Jetzt schließt aber die Ellipsoidnormale mit der Lotrichtung den gewünschten Lotabweichungswinkel ϑ ein; die beiden Meridianebenen decken sich nicht mehr, wodurch die Änderung des Ausgangsazimutes bewirkt wird, die nichts mit einer räumlichen Drehung zu tun hat. Mithin sind nach wie vor die beiden Achsen von Geoid und Ellipsoid parallel und man darf in diesem Sinne von einer „Parallelverschiebung“ sprechen, wiewohl sie nicht für das gesamte Netz gilt.

Für die analytische Darstellung dieser geometrischen Operation und ihre Auswirkung auf den Laplace'schen Widerspruch geodätischer Linien setzen wir volle Freiheit von astronomischen Beobachtungsfehlern und von geodätischen Netzfehlern voraus. Wir gehen von dem Widerspruch (8) aus, der für die ursprüngliche Lage des Netzes gilt. Nimmt man im Hauptpunkt eine beliebige Verschiebung $d\varphi_h, d\lambda_h, d\alpha_h$ vor, so geht dieser Widerspruch über in:

$$w_{hk}' = (\alpha' - \alpha - d\alpha)_k - (\lambda' - \lambda - d\lambda)_k \sin \varphi_k = w_{hk} - d\alpha_k + d\lambda_k \sin \varphi_k$$

und die Helmer'schen Gleichungen liefern dafür:

$$w_{hk}' = w_{hk} - A_{hk} d\varphi_h - B_{hk} d\alpha_h + d\lambda_h \sin \varphi_k, \quad (11)$$

wobei wir die Koeffizienten rein sphärisch ($e = 0, M = N = 1$) berechnen dürfen, wenn die Zusatzglieder auf Größen 2. O. beschränkt werden:

$$\begin{aligned} A_{hk} &= \sin l_{hk} \cos \varphi_k \\ B_{hk} &= \cos l_{hk} \cos \varphi_h \sec^* \varphi_k - \frac{p_5}{\rho''} \operatorname{tg} \varphi_k. \end{aligned} \quad (11a)$$

Um zunächst vom Hauptpunkt unabhängig zu werden, verschieben wir das Netz in einem beliebigen Punkt P_i um die Komponenten der daselbst ursprünglich aufgetretenen relativen Lotabweichung:

$$\begin{aligned} d\varphi_i &= (\varphi' - \varphi)_i; \quad d\lambda_i = (\lambda' - \lambda)_i; \quad d\alpha_i = (\alpha' - \alpha)_i \\ \text{und finden:} \quad w_{ik} &= w_{hk} - A_{ik} d\varphi_i - B_{ik} d\alpha_i + d\lambda_i \sin \varphi_k. \end{aligned} \quad (12)$$

w_{ik} ist jetzt der Widerspruch der geodätischen Linie $P_i P_k$ unter der Voraussetzung, daß in P keine Lotabweichung vorhanden ist, daß also P_i die Rolle des bisherigen Hauptpunktes P_h übernommen hat. Wäre ferner auf gravimetrischem Wege die absolute Lotabweichung ξ_i, η_i im Punkte P_i ermittelt worden, so könnte das Netz durch eine weitere Verschiebung in P_i um die negativen Komponenten dieser absoluten Lotabweichung:

$$d\varphi_i = -\xi_i; \quad d\lambda_i = -\eta_i \sec \varphi_i; \quad d\alpha_i = -\eta_i \operatorname{tg} \varphi_i$$

in die absolute Lage gebracht werden, wodurch im laufenden Punkt P_k der „absolute“ Widerspruch

$$\overline{w_{ik}} = w_{ik} + A_{ik} \xi_i + (B_{ik} \operatorname{tg} \varphi_i - \sec \varphi_i \sin \varphi_k) \eta_i \quad (13)$$

auftreten muß.

Nunmehr ist noch der Übergang von dem beliebigen Referenzellipsoid auf das mittlere Erdellipsoid vorzunehmen. Bei einer durch die Beziehung $d\alpha = d\lambda \sin \varphi$ gekennzeichneten Verschiebung bleibt aber eine Änderung der Achse oder des Maßstabes ohne Einfluß auf den *Laplace*chen Widerspruch, wie man aus den Gleichungen (9) unmittelbar erkennt. Die Änderung der Abplattung erzeugt wohl eine Änderung des Widerspruchs:

$$\delta w \doteq \frac{1}{\rho_{ij}} l'' b'' \cos^3 \varphi_M d\alpha, \quad (14)$$

die aber sehr klein ist, besonders dann, wenn die Abplattung des Referenzellipsoides nur wenig verschieden ist von der Abplattung des mittleren Erdellipsoides. Dies ist aber unschwer zu erreichen, weil die Abplattung ohnedies am besten mit Hilfe des *Clairaut*schen Theorems aus dem Schwerfeld der Erde abgeleitet wird. Wir dürfen also annehmen, daß obiger Deduktion von vornherein das mittlere Erdellipsoid als Referenzfläche zugrundeliegt.

Nehmen wir daher unter Vorbehaltung einer eingehenderen Diskussion an, daß die soeben erzielte Lage des Netzes mit der absoluten Lage zusammenfällt, die früher aus der Projektion der Geoidpunkte auf das mittlere Erdellipsoid definiert wurde, so tritt nicht nur in P_i , sondern in allen Netzpunkten P_k die absolute Lotabweichung auf. Diese ist aber unabhängig von jedwedem Ausgangspunkt und bei der vorausgesetzten Fehlerfreiheit auch vollständig widerspruchsfrei. Es ist also:

$$\overline{w_{ik}} = w_{k, abs} = 0 \quad (15)$$

was wegen (13) mit der Relation:

$$w_{ik} = -A_{ik} \xi_i - (B_{ik} \operatorname{tg} \varphi_i - \sec \varphi_i \sin \varphi_k) \eta_i \quad (16)$$

zusammenfällt. Dies ist die vollständige *Laplace*sche Gleichung der Linie $P_i P_k$ bei vorausgesetzter Fehlerfreiheit, die innerhalb gewisser enger Grenzen für die Abplattung allgemein für alle Referenzellipsoide gilt. Sie zeigt tatsächlich, daß die ursprünglichen relativen Widersprüche w_{ik} gar nicht Null sein können, sondern eine Funktion der absoluten Lotabweichung im Ausgangspunkt P_i sind. Nur wenn

zufällig die absolute Lotabweichung daselbst verschwindet: $\zeta_i = \eta_i = 0$, ist w_{ik} Null. Dann aber ist bereits die absolute Lage erzielt und alle Widersprüche verschwinden wegen (15). Ferner sind die Beträge (16) klein von 2. O., wenn man wieder die Länge $\left(\frac{s}{a}\right)$ der geodätischen Linie als kleine Größe 1. O. betrachtet.

Nur bei kleineren Netzen darf also der theoretische Effekt vernachlässigt werden.

Bei Einbeziehung aller möglichen Fehlergrößen geht (16) in die erweiterte Laplace'sche Gleichung über, die der astronomisch-geodätischen Netzausgleichung zugrundeliegt. Ihre Verwendung ist aber prinzipiell an zwei Voraussetzungen gebunden:

1. Sie darf nur auf die absoluten Lotabweichungen angewendet werden. Ihre bisherige Anwendung auf das Minimalsystem der Lotabweichungen ist streng genommen unstatthaft. Denn das Minimalsystem:

$$\Sigma (\xi^2 + \eta^2) = \min , \quad (17)$$

wird selbst bei sehr großer Ausdehnung eines Netzes nicht unbedingt mit dem absoluten System zusammenfallen, weil die Geoidundulationen in sehr großen, flachen Wellen erfolgen; bei dem Vorhandensein einer mittleren Neigungsdifferenz zwischen Geoid und Erdellipsoid kann aber das Mittel der Lotabweichungen nicht verschwinden, was der Minimumforderung (17) widerspricht.

2. Ist das Dreiecksnetz auf dem üblichen Ausgleichsweg berechnet worden, so darf es in seiner absoluten Lage auf dem mittleren Erdellipsoid nur um Größen 3. Ordnung von einer reinen Projektion der Geoidpunkte abweichen, um die Gültigkeit der Gleichungen (15) und (16) zu gewährleisten.

2.

Neben der bisherigen, auf Helmerth fußenden Auffassung der relativen Lotabweichungen ist prinzipiell noch eine zweite denkbar, die wir Venings-Meinesz¹⁾ verdanken. Bei dieser wird der oben den absoluten Lotabweichungen vorbehaltene Gedanke einer reinen Projektion der Geoidpunkte auf jedes beliebige Referenzellipsoid in den beiden geschilderten Lagen ausgedehnt. Dies hätte den großen Vorteil, daß die Laplace'sche Gleichung (6) auch für die relativen Lotabweichungen gelten müßte. Denn infolge der gedachten Projektion handelt es sich auch in diesem Falle um die Laplace'sche Gleichung isolierter Punkte. Die zweifache Relativität der Lotabweichungen ist jetzt einerseits durch die Parameter des Bezugsellipsoides, andererseits unmittelbar durch dessen Lage gegenüber dem Geoid bedingt.

Wir gehen wieder von der früheren ersten Lage des Ellipsoides aus, bei der im gewählten Nullpunkt P_0 — wir sprechen absichtlich nicht mehr vom Fundamentaltalpunkt der Triangulierung P_h , weil wir die Netzausgleichung durch die Projektion ersetzt haben! — keine relative Lotabweichung vorhanden ist und die Figurenachse des Ellipsoides der Rotationsachse der Erde parallel liegt. Die Zulassung einer Lotabweichung in P_0 bedeutet nun geometrisch eine Translation des Ellipsoides, derzufolge die Lotlinien des Geoides die Ellipsoidfläche in anderen Punkten durch-

stoßen. Selbstverständlich können wir auch das Ellipsoid festhalten und dem Geoid eine entgegengesetzt gleiche Translation erteilen. Diese Parallelverschiebung des Geoides werde in drei zueinander senkrechte Komponenten p, q, r zerlegt: die erste liege parallel der Rotationsachse und werde positiv nach Nord gezählt; die zweite liege parallel der Meridianebene des Nullpunktes, während die dritte nach der Länge 90° Ost weise. Bei dieser Verschiebung wird der Fußpunkt der Lotlinie eines Geoidpunktes P_k auf dem Ellipsoid vom Punkte P_k' in den Punkt P_k'' wandern. Die Bewegung des Geoidpunktes P_k selbst kann ferner außer durch p, q, r auch durch die nördliche (u), östliche (δ) und zenitale (Δz) Komponente im Horizontsystem des Fußpunktes P_k' beschrieben werden. Diese zweite Zerlegung liefert für den Ursprung P_0 :

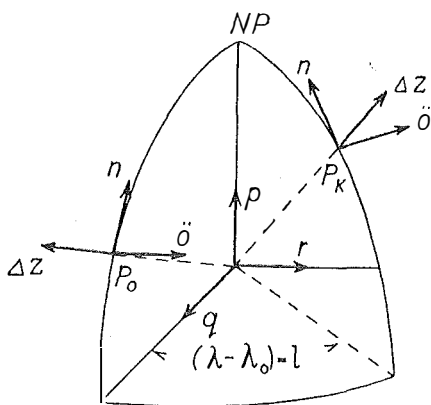


Fig. 2

Die Bewegung des Geoidpunktes P_k selbst kann ferner außer durch p, q, r auch durch die nördliche (u), östliche (δ) und zenitale (Δz) Komponente im Horizontsystem des Fußpunktes P_k' beschrieben werden. Diese zweite Zerlegung liefert für den Ursprung P_0 :

$$\begin{aligned} u_0 &= p \cos \varphi_0 - q \sin \varphi_0 \\ \delta_0 &= r \\ \Delta z_0 &= p \sin \varphi_0 + q \cos \varphi_0 \end{aligned} \quad (18)$$

und für P_k :

$$\begin{aligned} u_k &= p \cos \varphi_k - q \sin \varphi_k \cos l - r \sin \varphi_k \sin l \\ \delta_k &= -q \sin l + r \cos l \\ \Delta z_k &= p \sin \varphi_k + q \cos \varphi_k \cos l + r \cos \varphi_k \sin l. \end{aligned} \quad (19)$$

Die nördlichen und östlichen Verschiebungen definieren aber die Zunahme der geodätischen Breite und Länge des Fußpunktes, die mit entgegengesetztem Vorzeichen in die Komponenten der relativen Lotabweichung eingehen. Versteht man daher unter M und N wieder den Meridian- und Querkrümmungsradius, unter $\Delta \xi$ und $\Delta \eta$ die Zunahme der meridionalen und östlichen Lotabweichung, so ist:

$$\begin{aligned} u_k &= -M_k \Delta \xi_k \\ \delta_k &= -N_k \Delta \eta_k \end{aligned} \quad (20)$$

Wird jetzt wie früher die ursprüngliche Höhenlage zwischen Geoid und Referenzellipsoid beibehalten, die aus der auf das Geoid reduzierten Basis folgte, so muß $\Delta z_0 = 0$ sein und wir können p, q, r gemäß (18) und (20) in Funktion der in P_0 angestrebten relativen Lotabweichung ξ_0 und η_0 darstellen:

$$\begin{aligned} p &= u_0 \cos \varphi_0 + \Delta z_0 \sin \varphi_0 = u_0 \cos \varphi_0 = -M_0 \xi_0 \cos \varphi_0 \\ q &= -u_0 \sin \varphi_0 + \Delta z_0 \cos \varphi_0 = -u_0 \sin \varphi_0 = +M_0 \xi_0 \sin \varphi_0 \\ r &= -N_0 \eta_0 \end{aligned} \quad (21)$$

Führt man diese Werte und (20) in (19) ein, so sind bereits die Änderungen der Lotabweichungen ξ_k und η_k in Funktion von ξ_0 und η_0 gefunden:

$$\begin{aligned}\Delta \xi_k &= \frac{M_0}{M_k} (\cos \varphi_0 \cos \varphi_k + \sin \varphi_0 \sin \varphi_k \cos l) \xi_0 - \frac{N_0}{M_k} \eta_0 \sin \varphi_k \sin l \\ \Delta \eta_k &= \frac{M_0}{N_k} \xi_0 \sin \varphi_0 \sin l + \frac{N_0}{N_k} \eta_0 \cos l\end{aligned}\quad (22)$$

$$\Delta z_k = -M_0 (\cos \varphi_0 \sin \varphi_k - \sin \varphi_0 \cos \varphi_k \cos l) \xi_0 - N_0 \eta_0 \cos \varphi_k \sin l.$$

Ganz neu tritt in diesen Gleichungen die Änderung des Höhenunterschiedes von Geoid und Ellipsoid an der Stelle P_k auf. Dies ist ein sehr bedeutsames Resultat. Denn die durch die Parallelverschiebung bewirkte Änderung der relativen Neigung von Geoid und Ellipsoid wird dabei in den Vertikalabständen erfaßt. Bei der Verschiebung des geschlossenen Netzes auf der Referenzfläche ist dies nicht möglich, weil die korrespondierenden Punkte nicht vertikal übereinander liegen.

Es ist nun von großem Interesse, die Unterschiede der beiden Methoden festzustellen. Zu diesem Zweck hat man die ursprüngliche Konfiguration der Fußpunkte P_k' auf dem Ellipsoid als geschlossenes Netz aufzufassen, das im Ursprung P_0' die Verschiebung:

$$d\varphi_0 = -\xi_0; \quad d\lambda_0 = -\eta_0 \sec \varphi_0; \quad d\alpha_0 = -\eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0$$

erfährt. Die Breiten- und Längengleichung (9) liefern dann gemäß:

$$d\varphi_k = -\Delta \xi_k; \quad d\lambda_k = -\Delta \eta_k \sec \varphi_k$$

die Änderungen der beiden senkrechten Lotabweichungskomponenten:

$$\Delta \xi_k = \frac{M_0}{M_k} \cos l \cdot \xi_0 - \frac{N_0}{M_0} \sin \varphi_0 \sin l \cdot \eta_0 \quad (23)$$

$$\Delta \eta_k = \eta_0 \sec \varphi_0 \cos \varphi_k + \frac{M_0}{N_k} \sin \varphi_k \sin l \cdot \xi_0 + \frac{p_5}{\rho''} \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0.$$

Bildet man jetzt die Differenzen im Sinne (Helmert – Vening-Meinesz), wobei man sofort die sphärischen Näherungen ($M = N = 1$) benützen darf, wenn man sich in den Koeffizienten von ξ_0 und η_0 auf die Glieder 2. O. beschränkt, so wird:

$$\begin{aligned}\delta(\Delta \xi_k) &= \left[\cos l - \cos(\varphi_k - \varphi_0) + \sin \varphi_0 \sin \varphi_k \cdot \frac{l^2}{2} \right] \xi_0 + \\ &+ \eta_0 \sin l (\sin \varphi_k - \sin \varphi_0),\end{aligned}\quad (24)$$

$$\delta(\Delta \eta_k) = \xi_0 \sin l (\sin \varphi_k - \sin \varphi_0) - \eta_0 \left[\cos l - \sec \varphi_0 \cos \varphi_k - \frac{p_5}{\rho''} \operatorname{tg} \varphi_0 \right].$$

Setzt man:

$$b = (\varphi_k - \varphi_0)$$

und beachtet, daß:

$$\frac{p_5}{\rho''} \doteq \sin b - \frac{l^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi,$$

wobei im quadratischen Glied für φ jeder beliebige Wert zwischen φ_0 und φ_k verwendet werden darf, so läßt sich sehr leicht die Gleichheit der beiden eckigen Klammern beweisen. Damit erhält man:

$$\begin{aligned}\hat{\partial}(\Delta\xi_k) &= D\xi_0 + E\eta_0 \\ \hat{\partial}(\Delta\eta_k) &= E\xi_0 - D\eta_0\end{aligned}\quad (25)$$

mit:

$$\begin{aligned}D &= \cos l - \cos b + \frac{l^2}{2} \sin^2 \varphi = \frac{b^2}{2} - \frac{l^2}{2} \cos^2 \varphi \\ E &= \sin l (\sin \varphi_k - \sin \varphi_0) = lb \cos \varphi.\end{aligned}\quad (25a)$$

Hieraus folgt sofort, daß die theoretischen Widersprüche (16), bei denen die Koeffizienten der Lotabweichungskomponenten von 1. O. sind, nur durch die Azimutübertragung in den Dreiecksnetzen bedingt sein können.

Die Auswirkung des Unterschiedes der beiden Auffassungen sei an Hand der Figur 3 für einen Meridianbogen ($l = 0$) gezeigt. Identifizieren wir Geoid und Ellipsoid mit der mittleren Schmiegun gskugel für das Vermessungsgebiet, so entsteht im Ursprung P_0 eine positive meridionale Lotabweichung ξ_0 , wenn wir das Geoid relativ zur Referenzfläche in der Meridianebene von P_0 ($r = \eta_0 = 0$) von 0 nach M verschieben. Einem beliebigen Geoidpunkt P_k in diesem Meridian: $(\varphi_k' - \varphi_0') = b$ gehört dann der Meridianbogen s_{0k} zu, der auf dem Referenzellipsoid nach Hel m e r t den Bildpunkt P_k^H liefert; die Hel m e r t'schen Lotabweichungsgleichungen sind ja durch die Konstanz der Längen der geodätischen Linien gekennzeichnet. Andererseits schneidet der projizierende Radiusvektor MP_k nach V e n i n g - M e i n e s z die Bildfläche in dem Bildpunkt P_k^V . Während in P_k^H natürlich abermals die Lotabweichung ξ_0 aufscheint, hat P_k^V eine um den kleinen Winkel $\Delta\varphi$ größere Polhöhe und daher die kleinere Lotabweichung $(\xi_0 - \Delta\varphi)$.

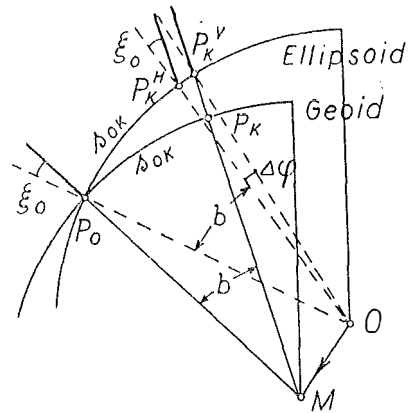


Fig. 3

Nach (25) ist im angenommenen Falle $\Delta\varphi = \frac{b^2}{2} \xi_0$. Für $\xi_0 = 10''$ und $b = 10^\circ$ macht dies $0'152$ aus, welchem Wert eine Seitenverlängerung von 4.7 m auf rund 1100 km entspricht. Bei einer Erhebung des Geoides über das Ellipsoid sind ξ_0 und $\Delta\varphi$ negativ und es tritt bei der Projektion eine Seitenverkürzung ein. Praktisch gesehen überschreitet dieser Effekt einer Seitenänderung im Betrage $k = 4 \cdot 10^{-6}$ kaum den mittleren Maßstabfehler der Triangulierungsnetze. Mit wachsendem Breitenabstand b nimmt aber die Seitenänderung k linear zu.

Wenn also auch praktisch der Unterschied zwischen den beiden Auffassungen sehr gering ist, so ist die Frage vom theoretischen Standpunkt aus doch von prinzipieller Wichtigkeit. Zusammenfassend kann festgestellt werden: die Unkenntnis des Geoides zwingt zur Netzausgleichung auf einer günstig gewählten Referenz-

fläche und für diesen Fall ist die *H e l m e r t*sche Auffassung der Lotabweichungen die einzig adäquate. Andererseits müssen wir uns den Standpunkt von *V e n i n g - M e i n e s z* für die Abbildung des Geoides auf das mittlere Erdellipsoid zu eigen machen. Nur so lassen sich nämlich in aller Strenge die absoluten Lotabweichungen definieren.

Selbstverständlich wird eine direkte Projektion einzelner Geoidpunkte auf das Erdellipsoid auch bei voller Kenntnis der Geoidundulationen niemals mit der nötigen Genauigkeit möglich sein. Dies folgt schon aus der Lageunsicherheit, die in der begrenzten astronomischen Beobachtungsgenauigkeit begründet liegt. Ferner werden darüber hinaus auch die gravimetrisch ermittelten absoluten Lotabweichungen nie an die hohe Genauigkeit der relativen Punktfestlegung durch Triangulierung heranreichen können. Hingegen läßt sich die astronomisch-geodätische Ausgleichung eines kontinentalen Triangulierungsnetzes bereits weitgehend dem Idealzustand einer reinen Projektion vom Geoid auf das mittlere Erdellipsoid angleichen:

1. Alle Grundlinien werden sofort nicht bloß auf das Geoid, sondern wegen der örtlichen Undulation weiter auf das mittlere Erdellipsoid reduziert. So wird ein mittlerer Netzmaßstab gewonnen, der der mittleren Höhenlage des Geoides über dem Erdellipsoid Rechnung trägt.

2. Schon nach einer ersten provisorischen Berechnung des Netzes auf dem Referenzellipsoid kann aus der Gegenüberstellung der astronomisch-geodätischen und der gravimetrischen Lotabweichungen nicht nur die Achse des mittleren Erdellipsoides, sondern auch die absolute Lage eines möglichst zentral gewählten Fundamentalpunktes mit sehr hoher Sicherheit abgeleitet werden.

3. Die so gefundenen guten Näherungen für die absoluten Lotabweichungen in allen astronomisch bestimmten Punkten gestatten dann, falls überhaupt steilere Visuren vorkommen, die weitere Reduktion der beobachteten Winkel vom Geoid auf das Erdellipsoid.

4. Die nachfolgende astronomisch-geodätische Ausgleichung bewahrt das innere Netzgefüge vor geodätischen Orientierungsfehlern.

Besondere Beachtung verdient noch die Reduktion der Beobachtungen wegen der Krümmung der Lotlinien. Diese ist bekanntlich eine genau so leidige Angelegenheit wie die Reduktion der beobachteten Schwerewerte. In obigen theoretischen Entwicklungen konnte sie durch den Ausgang von *P i z z e t t i*s Definition der Lotabweichungen umgangen werden. Bei dem geschilderten Verfahren ist nun wohl der störende Einfluß einer mangelhaften Reduktion wegen der Krümmung der Lotlinien dadurch stark herabgedrückt, daß nach Punkt 2 nur die absolute Lage eines einzigen Punktes erforderlich ist, die aus dem gesamten Lotabweichungsmaterial abgeleitet wird. Trotzdem wird der angestrebte Idealzustand letzten Endes am besten durch eine direkte Berechnung der Triangulierung auf dem mittleren Erdellipsoid erreicht, wobei die Hauptschwierigkeit in der Reduktion der beobachteten Winkel besteht ²⁾.

²⁾ Ich verdanke diesen Hinweis einer brieflichen Mitteilung des Herrn Prof. Dr. h. c. C. F. Bäschnlin.

Einzig und allein die wechselnde Neigung der Geoides gegenüber dem Erdellipsoid kann bei diesem Verfahren nicht berücksichtigt werden. Wirklich gefährlich ist dabei nur ein von Null verschiedener Mittelwert dieser Neigung; denn er erzeugt gegenüber der idealen Projektion, wie wir in obigem Beispiel gesehen haben, einen mit wachsendem Abstand vom Fundamentalpunkt linear zunehmenden Maßstabfehler k . Doch wird die mittlere Neigung bei wirklich kontinentaler Ausdehnung des Netzes (z. B. über Amerika oder Eurasien) höchstwahrscheinlich verschwinden. Eine örtlich oder regional wechselnde Neigung verursacht bei der strengen Projektion einen variablen Maßstab, dessen notwendige Vernachlässigung bei der Netzausgleichung jedoch sicherlich nur sehr geringe Fehler zur Folge hat.

Eine voll befriedigende Lösung des Problems der Großraumvermessung und der Lotabweichungen ist somit an eine hinreichende Kenntnis der Geoidundulationen gebunden, wie sie auf Grund eines symmetrisch über die ganze Erde verteilten Materiales repräsentativer Schwerewerte in absehbarer Zeit zu erwarten ist.

Über die Grundfigur und den Längsfehler in Streckenkettten

Von G. S c h e l l i n g, T. H. Graz

(Schluß)

C. Kettenformen

Es liegt nun nahe, Ketten zu untersuchen, die sich aus Einzelsystemen nach Figur 7 und Figur 5 zusammensetzen. Dabei ergeben sich als zweckmäßig erscheinende Formen die Ketten nach Figur 8 und Figur 9. Zu Vergleichszwecken wurden noch zwei weitere Kettenformen bearbeitet.

Wir untersuchen in diesem Abschnitt den zu erwartenden Längsfehler jeder Kette und bestimmen dazu das Gewicht einer Funktion, die annähernd die Längs-
streckung der Kette darstellt.

a) Die Kette nach Figur 8

Für die Zusammensetzung dieser Figur war ausschlaggebend, daß im Quadrat mit Diagonalen nach Figur 7 die Diagonale das größte Gewicht nach der Ausgleichung besitzt. Um den Längsfehler einer Kette klein zu halten, muß daher eine Diagonale des Quadrates in der Längsrichtung der Kette liegen. Da durch Aneinanderreihen von Quadraten mit Diagonalen in der gewünschten Art jedoch keine Kette gebildet werden kann, wurden je zwei benachbarte Systeme durch zwei Strecken miteinander verbunden; in Figur 8 sind dies die Seiten 7, 8; 15, 16 usw. Dadurch entsteht für je zwei aufeinanderfolgende Einzelfiguren eine weitere Überbestimmung.

Neben den n Bedingungsgleichungen für die n einfach überbestimmten Quadrate mit Diagonalen sind deshalb $(n - 1)$ weitere Bedingungsgleichungen anzusetzen. Dies erfolgt zweckmäßig für die $(n - 1)$ regelmäßigen Zentralsysteme Z_4 , deren Zentralpunkte die gemeinsamen Eckpunkte der Quadrate mit Diagonalen sind.