

Paper-ID: VGI_195303



Flächenbestimmung aus Luftbildern

Karl Rinner ¹

¹ *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **41** (1), S. 6–14

1953

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Rinner_VGI_195303,  
  Title = {Fl{\a}chenbestimmung aus Luftbildern},  
  Author = {Rinner, Karl},  
  Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {6--14},  
  Number = {1},  
  Year = {1953},  
  Volume = {41}  
}
```



Flächenbestimmung aus Luftbildern

Von Dr. Karl R i n n e r, Graz

Vorbemerkung

Die österreichische Forstwirtschaft steht vor der Aufgabe, eine Inventur der Waldbestände durchzuführen und einen Waldkataster anzulegen. Hiefür ist auch der Einsatz der Luftbildmessung vorgesehen, durch welche die Ausscheidung der Bestände und deren Darstellung in einem Plan erfolgen soll.

Die räumliche Ausmessung der Luftaufnahmen in einem Stereokartiergerät erfordert einen erheblichen Zeitaufwand; außerdem macht die Beschaffung der Auswertegeräte wegen der langen Lieferfristen Schwierigkeiten und müssen hochqualifizierte Fachkräfte zu deren Bedienung eingesetzt werden, deren Ausbildung lange Zeit beanspruchen würde. Da aber die Ergebnisse der Bestandesaufnahme aus wirtschaftlichen Gründen in absehbarer Zeit verfügbar sein sollen, erscheint es notwendig, neben dem anzustrebenden Endprodukt des endgültigen Waldkatasters als Zwischenprodukt einen vorläufigen Waldkataster zu schaffen, welcher den praktischen vordringlichen Anforderungen genügt und mit einfachen Mitteln hergestellt werden kann.

Für diesen vorläufigen Kataster hat der Verfasser einen Vorschlag unterbreitet, nach welchem von einer Kartierung der Waldbestände in einem Plan abgesehen werden soll und das vergrößerte Luftbild an die Stelle der Kartierung tritt. Die Bestandesgrenzen sind im Luftbild bereits enthalten, sie brauchen daher (unter Zuhilfenahme der Stereobetrachtung) lediglich besonders hervorgehoben zu werden. Die Besitzgrenzen können aus dem Kataster mit Hilfe identer Punkte in das Luftbild übertragen werden und die für die Taxierung und Inventur erforderlichen Grundrißflächen der Bestände lassen sich, wie in der folgenden Abhandlung gezeigt wird, in einfacher Weise aus den im Luftbild planimetrierten (perspektiven) Flächen ableiten. Die hierzu notwendigen Messungen mit dem Stereomikrometer können im Zuge der für die Baumhöhenmessung ohnehin notwendigen Stereometermessungen ausgeführt werden und stellen keine wesentliche Mehrbelastung hinsichtlich der zu beschaffenden Geräte und der zu leistenden Arbeit dar.

Das Luftbild vermittelt somit, wie die Karte, alle für die Taxierung erforderlichen Unterlagen und ist dieser hinsichtlich Lesbarkeit und Übersichtlichkeit sogar überlegen. Es ist daher sicherlich geeignet, die Katasterkarte zeitweilig zu ersetzen und diese zu ergänzen.

In der nachfolgenden Abhandlung wird über die Theorie zur Ableitung der Grundrißflächen aus den im Luftbild meßbaren perspektiven Flächen berichtet.

* * *

Das Luftbild stellt eine perspektivische Abbildung des Geländes dar. Eine mathematisch definierbare Beziehung zwischen der Fläche des Grundrisses und der vom perspektiven Umriß begrenzten Fläche besteht daher nur dann, wenn die betrachtete Fläche mathematisch definiert ist.

Im folgenden wird vorerst angenommen, daß die Fläche in einer Ebene ϵ liege, welche durch die Bildspur und den Neigungswinkel α gegen die Bildebene

gegeben ist. O bezeichne immer das Aufnahmezentrum, O' den Hauptpunkt und p das Perpendikel von O' auf die Bildspur. Mit H und h werden die Flughöhe und die Höhen der Objektpunkte über Grund (Bildebene) bezeichnet. Die Luftaufnahme wird als Senkrechtaufnahme vorausgesetzt.

Um Einblick in das Gesetz der Flächenabbildung zu erhalten, wird erst die Flächenbeziehung für einen Kreis, für ein Trapez und ein Dreieck in besonderer Lage hergeleitet. Hierauf wird das Ergebnis diskutiert und auf beliebige Flächenformen angewendet. Schließlich wird gezeigt, wie die für die Ebene erhaltenen Ergebnisse auch für allgemeine Geländeformen Anwendung finden können.

Nr. 1 (Kreisfläche). Der Mittelpunkt P des Kreises K sei durch seine Koordinaten (e, n) gegeben, sein Radius sei r (Abb. 1). Bezeichnen d_1^c, d_2^c irgend zwei konjugierte Durchmesser der Bildellipse K^c und β den von diesen eingeschlossenen Winkel, so ist die von K^c umschlossene Fläche durch

$$4 F^c = \pi d_1^c d_2^c \sin \beta$$

gegeben und es ist daher das Verhältnis zwischen Grundrißfläche F^l und perspektivischer Fläche F^c

$$\frac{F^l}{F^c} = k = \frac{4 r^2}{d_1^c d_2^c \sin \beta} \quad (1)$$

Zur Ermittlung des Koeffizienten k ist die Länge eines konjugierten Durchmesserpaars von K^c erforderlich. Dem Mittelpunkt M^c der Bildellipse entspricht in ε der Pol M der Ferngeraden von ε ; jedem durch diesen Punkt gehenden konjugierten Sehnenpaar des Kreises entspricht ein konjugiertes Durchmesserpaar von K^c . Es wird nun das auf der Spurnormalen und Spurparallelen durch M gehende konjugierte Sehnenpaar d_1, d_2 betrachtet und dessen Bildpaar d_1^c, d_2^c aus den gegebenen Elementen berechnet.

Bezeichnet F den den auf der Spurnormalen durch P liegenden Fernpunkt und $s = \overline{PF}$, $x = \overline{PM}$, so folgt aus $r^2 = x^2 + (d_1/2)^2 = x s$ für die zur Spur parallel Schne d_1 durch M :

$$d_1 = \frac{2 r}{s} \sqrt{s^2 - r^2}$$

und hieraus, wenn h die Höhe des Mittelpunktes P bezeichnet, wegen $h = n \sin \alpha$, $s = H/\sin \alpha - n = 1/\sin \alpha (H-h)$ schließlich:

$$d_1 = 2 r \sqrt{1 - \left(\frac{r \sin \alpha}{H-h}\right)^2} \quad (2a)$$

Für d_1^c bestehen die Beziehungen:

$$d_1^c : d_1 = \overline{OM^c} : \overline{OM} = H : (H-h)_m$$

$$h_m : h = (n+x) : n \quad \text{oder} \quad h_m = h \left(1 + \frac{(r \sin \alpha)^2}{h(H-h)}\right) \quad (2b)$$

Aus (2a) und (2b) folgt:

$$d_1^c = \frac{2 r H}{\sqrt{(H-h)^2 - (r \sin \alpha)^2}} \quad (3)$$

Um d_2^c zu ermitteln, wird vom Doppelverhältnis $(NFAB) = (NF_{00} A^c B^c) = \delta$ ausgegangen, welches vom Spurpunkt N , dem Fernpunkt F der Trägergeraden von d_2 und dessen Endpunkten $A B$ gebildet wird. Dieses Doppelverhältnis bleibt bei der perspektiven Abbildung erhalten und geht, da F ein Fernpunkt entspricht, in das Teilverhältnis $\delta = \overline{NA}^c : \overline{NB}^c$ über. Wegen $\overline{NB}^c = \overline{NA}^c + d_2^c$ besteht daher die Beziehung:

$$d_2^c = \overline{NA}^c \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right) \quad (4a)$$

Bezeichnet N_f der Fluchtpunkt der Spurnormalen, so bestehen die aus Abb. 1 ablesbaren Relationen

$$\overline{ON}_f : \overline{AN} = \overline{N_f A}^c : \overline{NA}^c = (\overline{NA}^c + \overline{N_f N}) : \overline{NA}^c$$

und aus diesen folgt:

$$\overline{NA}^c = \frac{(u-r) \sin \alpha}{H-h+r \sin \alpha} \overline{N_f N} \quad (4b)$$

Für das Doppelverhältnis δ ergibt sich:

$$\delta = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} : \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = \frac{(u-r)(H-(u+r)\sin\alpha)}{(u+r)(H-(u-r)\sin\alpha)} \quad (4c)$$

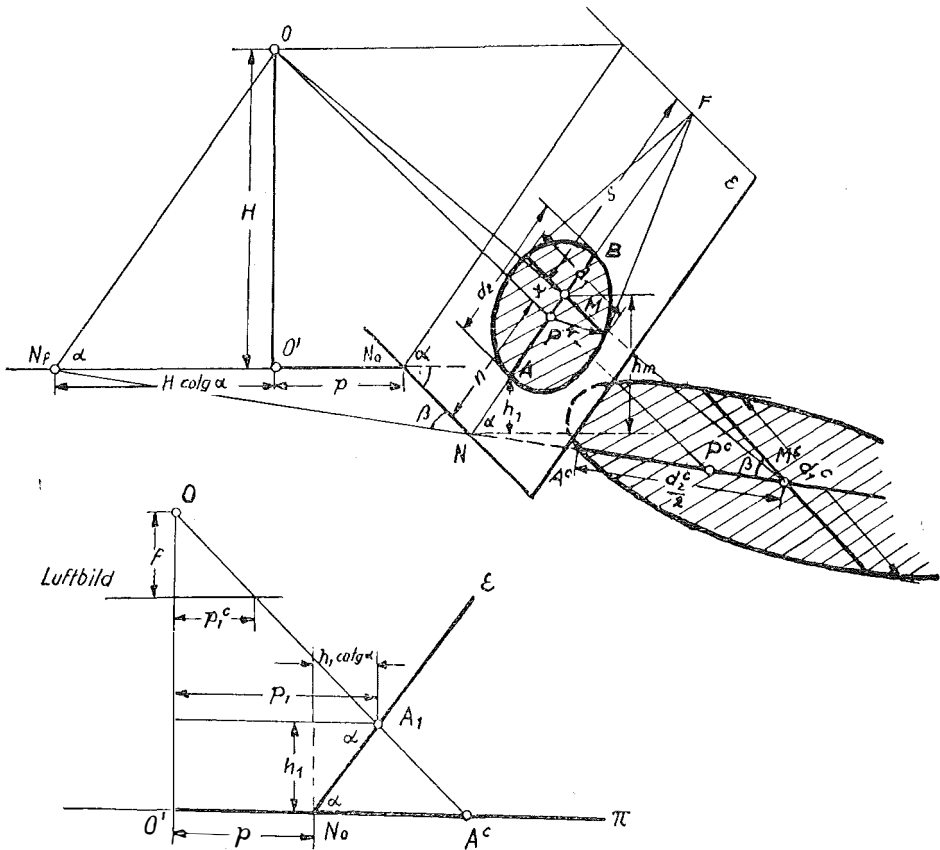


Abb. 1 und 2

Aus (4a, b, a) kann nun d_2^c berechnet werden.

$$d_2^c = \frac{2 r H \sin \alpha}{(H-h)^2 - (r \sin \alpha)^2} \overline{N^f N} \quad (5)$$

Für den von d_1^c d_2^c eingeschlossenen Winkel β besteht die Beziehung (S. Abb. 1)

$$\sin \beta = \frac{H \cotg \alpha + p}{\overline{N_1 N}} \quad (6)$$

und damit sind alle zur Bestimmung von k erforderlichen Größen nach (1) ermittelt.

$$k = \left[\left(\frac{H-h}{h} \right)^2 - \left(\frac{r \sin \alpha}{H} \right)^2 \right]^{3/2} \frac{H}{H + p \operatorname{tg} \alpha} = C_1 C_2 \quad (7a)$$

Die beiden Faktoren C_1 C_2 können noch umgeformt werden, so daß nur Höhen oder unmittelbar im Luftbild meßbare Größen darin enthalten sind.

Bezeichnen h_1 h_2 die Höhen von A B , so wird wegen

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= 2 r \sin \alpha, & h_2 + h_1 &= 2 h \\ C_1 &= \left(1 - \frac{h_2 + h_1}{H} + \frac{h_1 h_2}{H^2} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (7b)$$

In C_2 soll an Stelle von p das in der Horizontalebene durch A liegende Perpendikel p_1 mittels der Beziehung $p_1 = p + h \cotg \alpha$ eingeführt werden (Abb. 2), deren Bild p_1^c als Normale vom Bildhauptpunkt auf die Spurparallele durch A im Luftbild gemessen werden kann. Es besteht die Relation $p_1 : (H-h_1) = p_1^c : f$ (f = Bildweite der Aufnahmekammer) und somit gilt:

$$\frac{1}{C_2} = \left(1 - \frac{h_1}{H} \right) \left(1 + \frac{p_1^c}{f} \operatorname{tg} \alpha \right) \quad (7c)$$

Da h im Verhältnis zur Flughöhe H immer klein sein wird, können die Ausdrücke für C nach Potenzen von (h/H) entwickelt werden. Bei Beschränkung auf die Glieder 2. O. ergibt sich

$$k = \left[1 - \frac{h_1 + 3 h_2}{2 H} - \frac{1}{8 H^2} (-h_1^2 + 6 h_1 h_2 + 3 h_2^2) \right] \frac{f}{f + p_1^c \operatorname{tg} \alpha} \quad (7d)$$

Nr. 2 (Trapezfläche). Es wird ein Trapez betrachtet, dessen parallele Seiten a_1 a_2 auf Spurparallelen von ϵ liegen (Abb. 3). Ist b die Höhe des Trapezes, so ist die Grundrißfläche durch

$$F^l = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) b \cos \alpha$$

bestimmt. Die perspektiven Bilder a_1^c a_2^c sind wiederum parallel zur Bildspur, das Bild der Hauptspurnormalen durch den Fußpunkt N des Perpendikels normal hierzu. Bezeichnet daher $b^c = \overline{N_1^c N_2^c}$ das Bild der auf dieser von a_1 a_2 abgeschnittenen Strecke $b = \overline{N_1 N_2}$, so ist

$$F^c = \frac{1}{2} (a_1^c + a_2^c) b^c$$

In diesem Ausdruck können noch die Werte a durch die im Luftbild meßbaren Größen a° ersetzt werden. Aus $a : a^{\circ} = (H-h) : H$ folgt bis auf Glieder 2. O. hierfür:

$$f(a) = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} = \frac{a_2^{\circ} - a_1^{\circ}}{a_2^{\circ} + a_1^{\circ}} - \frac{2 a_1^{\circ} a_2^{\circ}}{(a_1^{\circ} + a_2^{\circ})^2} \frac{h_2 - h_1}{H} \quad (11c)$$

Für ein Parallelogramm (Rechteck oder Quadrat) verschwindet $a_2 - a_1 = 0$ und es gilt:

$$k = \left[1 - \frac{h_1 + 3h_2}{2H} + \frac{1}{4H^2} (-h_1^2 + h_2^2 + 4h_1h_2) \right] \frac{f}{f + p_1^c \operatorname{tg} \alpha} \quad (12)$$

Nr. 3 (Dreiecksfläche). Wird eine Dreiecksseite parallel zur Bildspur von ϵ angenommen, so können wiederum die Formeln (11) verwendet werden, wenn darin a_1 oder a_2 gleich Null gesetzt wird.

Im ersten Fall liegt die Spitze des Dreieckes tiefer als die Basis und es gilt wegen $f(a) = 1$:

$$k = \left[1 - \frac{2h_2}{H} + \frac{1}{2H^2} (3h_1^2 - h_2^2) \right] \frac{f}{f + p_1^c \operatorname{tg} \alpha} \quad (13a)$$

Für $a_2 = 0$, das ist für ein aufrecht stehendes Dreieck wird $f(a) = -1$ und daher:

$$k = \left[1 - \frac{h_1 + h_2}{H} + \frac{1}{2H^2} (-3h_1^2 + 3h_2^2 + 2h_1h_2) \right] \frac{f}{f + p_1^c \operatorname{tg} \alpha} \quad (13b)$$

Nr. 4 (Diskussion).

Ein Vergleich der Formeln (7), (11), (12) und (13) zeigt, daß allen der Faktor

$$\frac{f}{f + p_1^c \operatorname{tg} \alpha} = C$$

gemeinsam ist. Der absolute Betrag von C liegt je nach der Quadrantenlage von α zwischen Null und Eins, das Vorzeichen kann positiv oder negativ sein. Für $h_1 = h_2$, das ist für Ebenen parallel π , wird $C = 1$ und alle Formeln ergeben die triviale Beziehung $k = (1 - h/H)^2$.

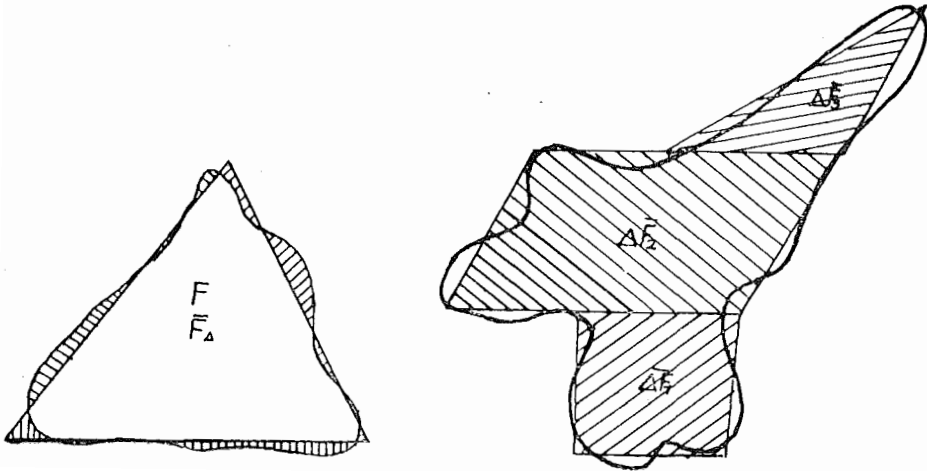


Abb. 4 und 5

Um Einblick zu erhalten, wie sich k mit der Gestalt der betrachteten Figur ändert, wird der Unterschied Δk der k -Werte (11) (12) (13) gegenüber dem für die Kreisfigur geltenden k -Wert bestimmt.

$$\Delta k_{\text{Trapez}} = \left[f(a) \left(\frac{h_2 - h_1}{2H} + \frac{1}{2H^2} (-3h_1^2 + 2h_2^2 + h_1h_2) \right) - \left(f^2(a) - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{h_2 - h_1}{2H} \right)^2 \right] \cdot C$$

$$\Delta k_{\text{Parall.}} = \frac{1}{2} \left(\frac{h_2 - h_1}{2H} \right)^2 \cdot C$$

$$\Delta k_{\text{Dreieck}} = \left[\frac{h_2 - h_1}{2H} - \frac{1}{8H^2} (7h_1^2 + 6h_1h_2 - 3h_2^2) \right] \cdot C \quad a_1 = 0$$

für

$$= \left[-\frac{h_2 - h_1}{2H} - \frac{1}{8H^2} (-5h_1^2 + 10h_1h_2 + 7h_2^2) \right] \cdot C \quad a_2 = 0$$

Bei konstanter Flughöhe H ist das Glied 1. O. von Δk von $f(a)$ und vom maximalen Höhenunterschied $(h_2 - h_1)$ in der Figur abhängig und liegt wegen $0 \leq f(a) \leq 1$ im Intervall

$$0 \leq \Delta k_1 \leq \frac{h_2 - h_1}{2H} \quad (15a)$$

Es verschwindet für das Parallelogramm und erreicht ein Maximum für das Dreieck.

Der maximale Beitrag der Glieder 2. O. kann für $f(a) = 1$ und Annahme einer mittleren Objekthöhe (Vernachlässigung von $(h_2 - h_1)$) mit

$$\Delta k_2 \leq 1,4 \left(\frac{h}{H} \right)^2 \quad (15b)$$

abgeschätzt werden.

Beispielsweise folgt für Luftaufnahmen $f = 20 \text{ cm}$, $1:18.000$, also für eine Flughöhe von ca. 4000 m für einen Höhenunterschied von 100 m in der Figur für $\Delta k_1 \approx 0,01$, also ca. 1 v. H., und für eine mittlere Höhe von $h = 100 \text{ m}$ über Grund $\Delta k_2 = 0,00014$. Δk_1 ändert sich linear, Δk_2 hingegen mit dem Quadrat der Höhe. Für die Abschätzung des Gesamtunterschiedes Δk gilt somit in diesem Falle:

$$\Delta k \leq \pm 0,012 \quad \Delta h \pm 0,00014 h^2$$

$$\Delta h \text{ und } h \text{ in Einheiten } 100 \text{ m}$$

Nr. 5 (Unregelmäßige Figur).

Die Bestandesflächen haben i. a. unregelmäßige Gestalt. Es kann jedoch jede derartige Figur mit Hilfe von Spurparallelen in Trapeze und Dreiecke zerlegt werden, für welche die Formeln (11) – (13) gelten (Abb. 5). Bezeichnen $\overline{\Delta F}$ die trapez- oder dreiecksförmigen Teilflächen, welche den Zonen ΔF von F zugeordnet werden, und \bar{k} , k die $\overline{\Delta F}$ und ΔF zugehörigen Reduktionsfaktoren, so kann $\bar{k} = k$ gesetzt werden und es gilt, wenn nur $\delta F = F - \overline{F}$ genügend klein ist:

$$\Delta F^I = \bar{k} \Delta F^c \quad F^I = \sum \Delta F^I = \sum \bar{k} \Delta F^c \quad (16)$$

Denn nach Nr. 4 ist der zu erwartende Fehler $k - \bar{k} = \delta k$ maximal von der 1. Ordnung und sein Einfluß auf die Flächendifferenz $\delta F = F - \bar{F}$ gleich $\delta F \cdot \delta k$, also klein von der 2. Ordnung und kann vernachlässigt werden.

In der Regel wird es zulässig sein, der Gesamtfläche F eine geometrische Fläche \bar{F} zuzuordnen und den zu dieser gehörigen Faktor \bar{k} auch für die Reduktion von F zu verwenden. Wird berücksichtigt, daß Waldbestandesausscheidungen nicht im geometrischen Sinne genau erfolgen können, weil die Bestandesgrenze nicht geometrisch genau definiert ist, so wird es in vielen Fällen genügen, die Reduktion mit dem Faktor

$$k = 1 - \frac{2h}{H}$$

durchzuführen, in welchem h eine mittlere Höhe bezeichnet.

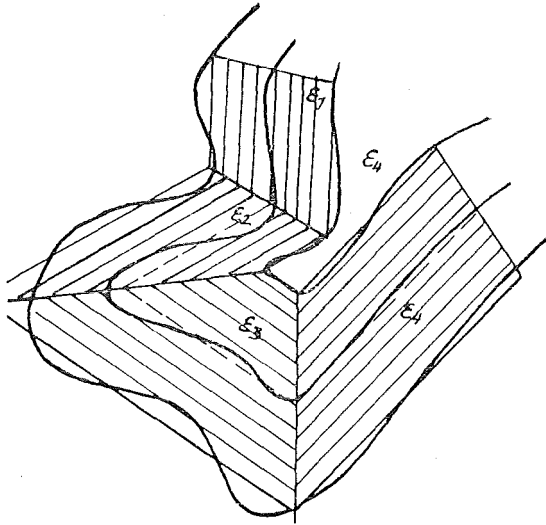


Abb. 6

Nr. 6 (Allgemeiner Fall).

Um die abgeleiteten Formeln auch im hügeligen und gebirgigen Gelände verwenden zu können, muß das Gelände derart in ebene Flächen zerlegt werden, daß die Ebenen durch die Begrenzungslinien der betrachteten Figuren hindurchgehen. Hierzu werden mit Hilfe eines Zeichenstereometers in das Luftbild die perspektiven Schichten oder Formenlinien eingezeichnet. Sodann wird beachtet, daß ein Geländeteil nur dann ebenflächig ist, wenn die darin verlaufenden Schichtenlinien annähernd durch parallele Gerade (Spurparallele) ersetzt werden können und der Neigungswinkel zwischen aufeinanderfolgenden Schichtenlinien konstant bleibt (Abb. 6). Beachtenswert ist, daß die für die Flächenreduktion erforderliche Ebene nicht das Gelände tangieren muß, sondern lediglich durch die Begrenzungslinie der Figur hindurchgehen braucht. Das heißt, die Spurparallelen brauchen sich nicht innerhalb der gesamten Figur den Schichtenlinien anschmiegen, sondern nur durch die Schnittpunkte derselben mit der Begrenzungslinie hindurchgehen.

Bezeichnen h_1, h_2 die Höhen zweier aufeinanderfolgender Spurparallelen, p_1^c, p_2^c die im Luftbild gemessenen Normalentfernungen vom Hauptpunkt auf diese, so kann der Neigungswinkel nach

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_2 - h_1}{n^l} \quad n^l = \frac{H}{f} (p_2^c - p_1^c) - \frac{1}{f} (h_2 p_2^c - h_1 p_1^c) \quad (17)$$

berechnet werden. Die Neignungsverhältnisse lassen sich somit aus lauter im Luftbild meßbaren Größen ermitteln.

Da eine Änderung von Δh oder h um dh in der Größenordnung dh/H in k eingeht, können bei Zerlegung des Geländes in Ebenen Abweichungen zugelassen werden. Z. B. wirkt sich für $H = 4000 \text{ m}$ eine Abweichung von $dh = 10 \text{ m}$ erst in der 3. Dezimalstelle von k aus.

Zusammenfassung.

Die Bestimmung der Grundrißfläche aus der vom perspektiven Unriß begrenzten Fläche eines allgemeinen Geländestückes kann in den folgenden Arbeitsgängen durchgeführt werden:

1. Einzeichnen der perspektiven Schichtenlinien in das Luftbild oder dessen Vergrößerung. Voraussetzung hierzu sind entzerrte Luftbilder oder Paßpunkte.
2. Zerlegung des Geländes in seine ebenen Flächen.
3. Bestimmung der Reduktionsfaktoren k für jede ebene Figur.
4. Planimetrieren der in den verschiedenen Ebenen liegenden Flächenteile.
5. Berechnung der Gesamtfläche nach $F^l = \sum \bar{k} \Delta F^l$.

Die Entzerrung der Luftbilder kann im Zuge der Vergrößerung der Bilder erfolgen, wobei als Einpaßunterlage der Kataster verwendet werden kann. Zum Zeichnen der perspektiven Schichtenlinien sind lediglich Zeichenstereometer mit Parallaxschraubenerforderlich. Die Arbeitsgänge können getrennt voneinander ausgeführt werden, was die gleichzeitige Verwendung mehrerer Hilfskräfte ermöglicht.

Anmerkung: In Abb. 1 wurde irrtümlich die Strecke MF an Stelle von PF mit s kotiert.

Ein besonderer Zusammenhang von Vorwärts- und Rückwärts-einschnitt im kombinierten Einschnitten

Von J. Kovarik

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

A. Mehrfaches Vorwärtseinschneiden unter Voraussetzung gleicher Gewichte

Wurde ein Neupunkt von mehr als zwei gegebenen Punkten aus beobachtet, so führt die Berechnung der wahrscheinlichsten Koordinatenwerte (bei der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen) nach Herstellung der Beziehung zwischen den Winkel-, bzw. Richtungsänderungen einerseits und den Koordinatenverschiebungen andererseits durch die Verbesserungsgleichungen mit der be-