Paper-ID: VGI_195314

Zur logarithmischen Berechnung des Rückwärtseinschnittes

W. Fucyman [1]

[1] *Horn*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **41** (5), S. 129–131

1953

BibTEX:

```
@ARTICLE{Fucyman_VGI_195314,
Title = {Zur logarithmischen Berechnung des R{\"u}ckw{\"a}rtseinschnittes},
Author = {Fucyman, W.},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {129--131},
Number = {5},
Year = {1953},
Volume = {41}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN
Offizielles Organ
des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppe Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

Nr. 5 Baden bei Wien, Ende Oktober 1953 XLI. Jg.

Zur logarithmischen Berechnung des Rückwärtseinschnittes

Von Dr. W. Fucyman, Horn

Im XXXIX. Jg. (1951) der „Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen" hat auf S. 33 ff. K. Hubeny, Prof. an der technischen Hochschule in Graz, in einem Aufsatz gezeigt, daß die Cassini'sche Figur bei der Behandlung der Rückwärtseinschnitte auch für die logarithmische Rechnung geeignet ist, wenn man einen geeigneten Weg wählt. Seine Methode ist mit einer offensichtlichen Einsparung an Arbeitsaufwand bei der logarithmischen Berechnung der Koordinaten eines Neupunkts verbunden.

Ergänzend dazu soll in den folgenden Zeilen gezeigt werden, daß man die dortigen Resultate noch einfacher und in einer einheitlichen Weise gewinnen kann, wenn man die Methoden der analytischen Geometrie[1]), soweit sie im Mittelschulunterricht gebracht werden, weitestgehend verwendet. Im Anschluß daran wird noch eine weitere Kontrollmöglichkeit entwickelt, die sehr einfach ist und sich außerdem nicht auf die Endformeln stützt.

Unter Beibehaltung der in zitiertem Aufsatz gebrachten Figur und der daselbst verwendeten Bezeichnungen lassen sich die Ableitungen der Gleichungen (8), (8 a), (13) und (14) folgendermaßen durchführen:

Die Gleichung der Geraden AB kann in drei Gestalten, und zwar

$$y - y_A = k\,(x - x_A) \text{ oder } y - y_B = k\,(x - x_B) \text{ oder } y - y_s = k\,(x - x_s)\ ^{2)} \quad \ldots (1)$$

[1]) — welche die Grundlage des maschinellen Rechnens bilden —

[2]) $(y_s | x_s)$ sind die Koordinaten des Halbierungspunktes der Strecke $\overline{AB}$. S. a. a. O. S. 37.

angesetzt werden, wobei

$$k = \operatorname{tg}\,(AB) = \sin\,(AB)/\cos\,(AB) \qquad \ldots (2)$$

den Richtungsfaktor der Geraden AB bedeutet. Die durch den Punkt M gehende Normale zu AB hat die Gleichung

$$y - y_M = -(x - x_M)/k. \qquad \ldots (3)$$

Die Koordinaten $(y_P \mid x_P)$ des Neupunkts müssen die Gleichungen (1) und (3) erfüllen. Man erhält zu deren Berechnung z. B. aus der ersten der Gleichungen (1) und der Gleichung (3) die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{array}{rcl|r|l} y_P - k\,.\,x_P & = & y_A - k\,.\,x_A & -k & 1 \\ k\,.\,y_P + x_P & = & k\,.\,y_M + x_M & 1 & k. \end{array}$$

Addiert man diese, nachdem man sie das einemal mit den in der ersten, das anderemal mit den in der zweiten Kolonne rechts befindlichen Faktoren multipliziert hat, so erhält man

$$\begin{aligned} x_P\,(1 + k^2) &= k\,(y_M - y_A) + k^2 x_A + x_M \\ y_P\,(1 + k^2) &= y_A + k^2 y_M + k\,(x_M - x_A). \end{aligned}$$

Multipliziert man nun diese Gleichungen mit $\cos^2(AB)$, so erhält man — bei Berücksichtigung von (2)

$$\left.\begin{aligned} x_P &= (y_M - y_A)\sin(AB)\,.\,\cos(AB) + x_A \sin^2(AB) + x_M \cos^2(AB) \\ y_P &= y_A \cos^2(AB) + y_M \sin^2(AB) + (x_M - x_A)\sin(AB)\,.\,\cos(AB). \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

Nun ist

$$x_A \sin^2(AB) = x_A - x_A \cos^2(AB) \text{ u. } y_A \cos^2(AB) = y_A - y_A \sin^2(AB),\ \ldots (5a)$$

ferner

$$x_M \cos^2(AB) = x_M - x_M \sin^2(AB) \text{ u. } y_M \sin^2(AB) = y_M - y_M \cos^2(AB).\ \ldots (5b)$$

Aus (4) folgt in Verbindung mit (5a)

$$\left.\begin{aligned} x_P - x_A &= (y_M - y_A)\sin(AB)\,.\,\cos(AB) + (x_M - x_A)\cos^2(AB) \\ y_P - y_A &= (y_M - y_A)\sin^2(AB) + (x_M - x_A)\sin(AB)\,.\,\cos^2(AB), \end{aligned}\right\} \ldots (6a)$$

und in Verbindung mit (5 b)

$$\left.\begin{aligned} x_P - x_M &= (y_M - y_A)\sin(AB)\,.\,\cos(AB) - (x_M - x_A)\sin^2(AB) \\ y_P - y_M &= -(y_M - y_A)\cos^2(AB) + (x_M - x_A)\sin(AB)\,.\,\cos(AB). \end{aligned}\right\} \ldots (6b)$$

Das sind aber die Gleichungen (8) und eine Hälfte der Gleichungen (13) im zitierten Aufsatz.

Die meines Erachtens eleganteste Methode zur Gewinnung der Gleichungen (6) besteht in der Verwendung der Hesse'schen Normalgleichung eines Speeres (orientierter Geraden) [3]. Sie lautet für den von A nach B gerichteten Speer

[3]) S. dazu etwa in der Zeitschrift „Pyramide", Jg. 1951, S. 95 ff. und 130 ff. F. Huber, Zur Frage des Vorzeichens geometrischer Größen.

$$-x \sin (AB) + y \cos (AB) + x_A \sin (AB) - y_A \cos (AB) = 0,$$

wobei die Koordinaten des Punktes A auch durch die Koordinaten der Punkte B oder S (= Halbierungspunkt der Strecke AB) ersetzt werden können. Unter Zugrundelegung der in der Figur verwendeten Orientierung hat bei geodätischem Koordinatensystem der Punkt M von diesem Speer einen Abstand h, der mit dem negativen Vorzeichen zu nehmen ist, da M auf der linken Seite des Speeres liegt. Man erhält den Abstand durch Einsetzen der Koordinaten von M in die Normalgleichung des Speeres. Es ist also

$$-h = -(x_M - x_A) \sin (AB) + (y_M - y_A) \cos (AB). \quad . \; . \; . \; (7)$$

Nun hat die Strecke $\overline{MP}$ (von M nach P orientiert) den Richtungswinkel $(AB) + 90^0$. Daraus ergibt sich für den Punkt P [4])

$$\begin{aligned} x_P - x_M &= h \cdot \cos \left[(AB) + 90^0\right] = -h \cdot \sin (AB) \\ y_P - y_M &= h \cdot \sin \left[(AB) + 90^0\right] = -h \cdot \cos (AB). \end{aligned}$$

Aus den zuletzt angeschriebenen Gleichungen und der Gleichung (7) folgen unmittelbar die Gleichungen (6 b). Berücksichtigt man schließlich, daß

$$\begin{aligned} -(x_M - x_A) \sin^2 (AB) &= -x_M + x_A + (x_M - x_A) \cos^2 (AB) \text{ und} \\ -(y_M - y_A) \cos^2 (AB) &= -y_M + y_A + (y_M - y_A) \sin^2 (AB) \end{aligned}$$

ist, können aus den Gleichungen (6 b) sofort auch die Gleichungen (6 a) gefolgert werden.

Was schließlich die Rechenkontrolle anlangt, so genügt es, die mittels der Gleichungen (5) oder (6) gefundenen Koordinaten des Neupunktes in eine der bisher nicht verwendeten Gleichungen (1), am geeignetsten in die zweite, einzusetzen. Man erhält dadurch

$$k = (y_P - y_B)(x_P - x_B),$$

also einen Wert, der mit einem schon früher, nämlich bei der Bestimmung des Richtungswinkels (AB), berechneten übereinstimmen muß. Eine andere, für die logarithmische Rechnung jedoch weniger gut geeignete Kontrolle wäre die Übereinstimmung der Länge der Strecke $\overline{AB}$ mit der Summe der Längen der Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{PB}$.

Verwendet man zur Berechnung der Koordinaten des Neupunktes nicht die erste, sondern die zweite Gleichung (1), so erhält man durch denselben Rechengang die Gleichungen (8 a) und den zweiten Teil der Gleichungen (13) im zitierten Aufsatz. Verwendet man schließlich die dritte Gleichung (1) zur Berechnung des Neupunktes, so erhält man neben den Gleichungen (14) im zitierten Aufsatz noch ein weiteres Gleichungspaar, das zu den Gleichungen (14) in demselben Verhältnis steht wie die Gleichungen (13) zu den Gleichungen (8) und (8 a) (immer im zitierten Aufsatz) und nur der Vollständigkeit halber hier mitgeteilt werden möge. Es lautet

$$\begin{aligned} x_P - x_M &= (y_M - y_s) \sin (AB) \cos (AB) - (x_M - x_s) \sin^2 (AB) \text{ und} \\ y_P - y_M &= -(y_M - y_s) \cos^2 (AB) + (x_M - x_s) \sin (AB) \cdot \cos (AB). \end{aligned}$$

[4]) Gleichungen (9) und (10) des zitierten Aufsatzes.