

Paper-ID: VGI_195315



Graphische Ermittlung des mittleren zu erwartenden Fehlers beim Rückwärtseinschneiden

Hans Biach

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **41** (5), S. 132–135

1953

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Biach_VGI_195315,  
Title = {Graphische Ermittlung des mittleren zu erwartenden Fehlers beim R{"u  
    }ckw{"a}rtseinschneiden},  
Author = {Biach, Hans},  
Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
Pages = {132--135},  
Number = {5},  
Year = {1953},  
Volume = {41}  
}
```



Graphische Ermittlung des mittleren zu erwartenden Fehlers beim Rückwärtseinschneiden

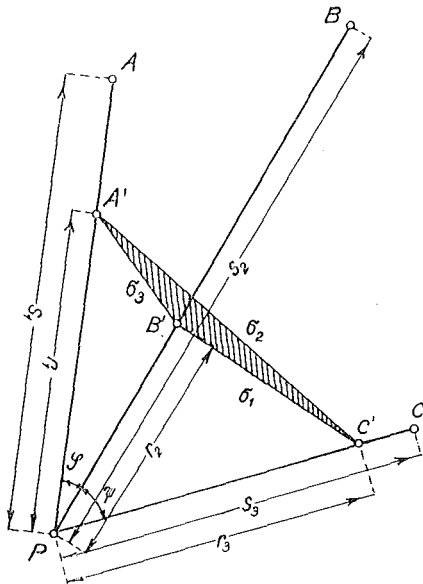
Von H. Biach

Mit einem Diagramm als Beilage

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

Die relativ geringe Anwendung des Rückwärtseinschneidens bei der geodätischen Punktbestimmung scheint ihre Ursache darin zu haben, daß sich die Genauigkeit der zu bestimmenden Punktlage nicht auf einfache Weise abschätzen läßt. Während man beim Vorwärtseinschnitt mit Hilfe der Genauigkeit der gemessenen Winkel und der aus einer Karte entnommenen genäherten Entfernungen der Standpunkte vom zu bestimmenden Neupunkt, auf einfache Weise Schlüsse auf den mittleren zu erwartenden Fehler der zu bestimmenden Punktlage ziehen kann, sind beim Rückwärtseinschnitt ähnliche Überlegungen nicht möglich. Die Tatsache, daß beim Rückwärtseinschnitt die Lage des Neupunktes innerhalb des Standpunktdreieckes günstige, in der Nähe des gefährlichen Kreises jedoch ungünstige Verhältnisse mit sich bringt, gibt keine Möglichkeit, die zahlenmäßige Größe des mittleren zu erwartenden Fehlers zu bestimmen oder auch nur abzuschätzen.

Da die Kenntnis der zu erwartenden Genauigkeit bei der geodätischen Punktbestimmung immer von Nutzen ist, dürfte ein einfaches und rasches Verfahren zur Bestimmung des mittleren Punktfehlers beim Rückwärtseinschneiden in der Praxis einigen Wert besitzen.



Figur 1

Jordan ermittelt in seinem Handbuch der Vermessungskunde¹⁾ unter Zuhilfenahme nebenstehender Fig. 1 folgende Formel für den mittleren Punktfehler beim Rückwärtseinschnitt:

$$M^2 = \frac{\sigma_\varphi^2}{4\Delta^2} \cdot \frac{m_\varphi^2}{\rho^2} + \frac{\sigma_\psi^2}{4\Delta^2} \cdot \frac{m_\psi^2}{\rho^2} \cdot \cdot \cdot (1)$$

Hiebei bedeuten σ_φ und σ_ψ die den gemessenen Winkeln φ und ψ gegenüberliegenden Seiten, Δ die Fläche des Dreieckes $A'B'C'$, das dadurch erhalten wird, wenn vom Neupunkt P auf den drei Richtungen PA , PB u. PC die reziproken Werte r_1 , r_2 und r_3 der Entfernungen s_1 , s_2 und s_3 aufgetragen werden (Fig. 1). m_φ und m_ψ sind die mittleren Fehler der gemessenen Winkel φ und ψ .

¹⁾ Zweiter Band, erster Halbband, neunte erweiterte Aufl., Stuttgart 1931, S. 450-453.

Die genaunte Jordan'sche Formel eignet sich nicht für eine rasche und einfache Ermittlung des mittleren Fehlers. Werden daher statt der Dreiecksseiten und der Fläche des Dreieckes $A' B' C'$ dessen Höhen eingeführt, so ergibt sich, da $\frac{2 \Delta}{\sigma_1} = h_{\psi}'$ und $\frac{2 \Delta}{\sigma_3} = h_{\psi}'$ ist, wenn außerdem $m_{\varphi}^2 = m_{\psi}^2 = m^2$ gesetzt wird:

$$M^2 = \frac{m^2}{\rho^2} \left(\frac{1}{h_{\varphi}'^2} + \frac{1}{h_{\psi}'^2} \right)$$

oder $M^2 = \frac{1}{\left(h_{\varphi}' \frac{\rho}{m} \right)^2} + \frac{1}{\left(h_{\psi}' \frac{\rho}{m} \right)^2} \dots (2)$

Denkt man sich sodann in der Grundfigur (Fig. 1) statt der reziproken Werte der Entfernungen s_1, s_2 und s_3 die Größen t_1, t_2 und t_3 gemäß Gl. 3)

$$t_1 = \frac{1}{s_1} \frac{\rho}{m}, \quad t_2 = \frac{1}{s_2} \frac{\rho}{m}, \quad t_3 = \frac{1}{s_3} \frac{\rho}{m} \dots (3)$$

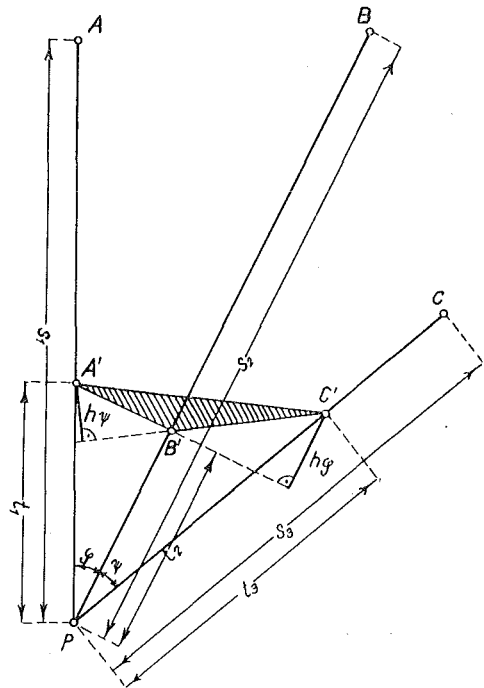
aufgetragen (Fig. 2) und das entstehende Dreieck $A' B' C'$ sowie die zugehörigen Höhen h_{φ} und h_{ψ} gezeichnet, so ergibt sich zufolge Gl. 2):

$$M^2 = \left(\frac{1}{h_{\varphi}} \right)^2 + \left(\frac{1}{h_{\psi}} \right)^2 \dots (4)$$

Auf Grund dieses Ergebnisses kann nunmehr ein einfaches graphisches Verfahren zur Ermittlung des mittleren Fehlers entwickelt werden. Die Ermittlung der Größen t erfolgt mit Hilfe der Skala I des angeschlossenen Diagramms (Fig. 3). Diese Skala ist mit Hilfe der Gleichung

$$t = \frac{1}{s} \frac{\rho^{ec}}{m^{ec}}$$

(Gl. 3) unter der Voraussetzung entworfen, daß $m^{ec} = 10^{ec}$ beträgt; ρ^{ec} ist bekanntlich 636.620^{ec} — Um für die am häufigsten auftretenden Werte s nicht zu kleine Werte t und damit ungünstige Dreiecke $A' B' C'$ zu erhalten (Fig. 2), ist Skala I so entworfen, daß nicht die Werte t gemäß Gl. 3), sondern die zehnfachen Beträge von t entnommen werden. Z. B. ergibt sich für ein s von $636 m$ gemäß Gl. 3)



Figur 2

$$t = \frac{1}{63,600 \text{ cm}} \cdot \frac{636,620^{\text{cc}}}{10^{\text{cc}}} = 1 \text{ cm}^{-1};$$

Skala I hingegen ergibt für obigen Wert s den zehnfachen Betrag.

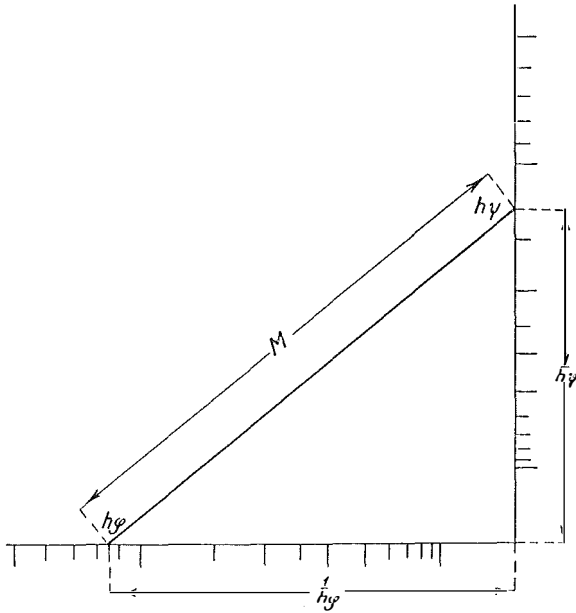
Liegen auf einem Plane die gegebenen Punkte A, B, C sowie die näherungsweise Lage des zu bestimmenden Neupunktes P in einem beliebigen Maßstabe vor, so können — am günstigsten auf Pauspapier — gemäß Fig. 2 die Strahlen PA, PB und PC und sodann mit Hilfe der aus Skala I entnommenen Werte t das Dreieck $A' B' C'$ sowie die Höhen h_φ und h_ψ gezeichnet werden. Die Werte t, h_φ und h_ψ welche die Dimension cm^{-1} aufweisen, werden hiebei in einem zweckmäßigen Maßstab zur Darstellung gebracht; in den meisten Fällen wird die Darstellung der Einheit cm^{-1} als Länge von 1 cm entsprechen.

Mit den ermittelten Werten h_φ und h_ψ kann sodann mit Hilfe der Skala II sofort der mittlere zu erwartende Punktfehler M gemäß Gl. 4) ermittelt werden. Skala II besteht aus zwei mit kongruenten Teilungen versehenen aufeinander rechtwinklig stehenden Schenkeln. Da zur Konstruktion des Dreieckes $A' B' C'$ und der Größen h_φ und h_ψ nicht die Werte t gemäß Gl. 3), sondern die zehnfachen Werte Verwendung fanden, sind auf den beiden Schenkeln der Skala II die Werte $\frac{10}{h}$ vom Scheitel aufgetragen und mit h beziffert worden. Sucht man daher auf den beiden Schenkeln die mit h_φ , bzw. h_ψ bezifferten Punkte auf, so sind deren Abstände vom Scheitel $\frac{1}{h_\varphi}$ bzw. $\frac{1}{h_\psi}$ und der Wert M wird gemäß Gl. 4) als Abstand der beiden Punkte erhalten (Fig. 4).

Dieser so erhaltene mittlere Punktfehler M ist unter der Voraussetzung bestimmt worden, daß der mittlere Fehler der Winkel φ und $\psi \pm 10^{\text{cc}}$ beträgt. Aus Gl. 2) geht unmittelbar hervor, daß ein n -facher mittlerer Winkelfehler den n -fachen Punktfehler zur Folge hat; der zu einem beliebigen mittleren Winkelfehler gehörige mittlere Punktfehler wird also nicht mit Hilfe des Quadratwurzel- fehlergesetzes, sondern durch Proportion ermittelt.

Der mittlere Punktfehler kann bei Vorliegen eines Planes nach dem geschilderten Verfahren in der kurzen Zeit von 2 bis 3 Minuten ermittelt werden. Auch die Genauigkeit eines erst beabsichtigten Rückwärtseinschnittes kann auf diese Weise vor Inangriffnahme der Messung selbst ermittelt werden, wenn die gegebenen Punkte und die näherungsweise Lage des zu bestimmenden Neupunktes in einer planlichen Darstellung vorliegen. Ist eine bestimmte Genauigkeit der Lage des Neupunktes gefordert, so kann auch die Genauigkeit ermittelt werden, mit welcher die Winkel φ und ψ gemessen werden müssen, um die geforderte Genauigkeit der Lage des Neupunktes zu gewährleisten.

Liegt der Neupunkt auf dem gefährlichen Kreis, so fallen die Eckpunkte A' B' C' des Reziprokdreieckes (Fig. 2) in eine Gerade²⁾; das Reziprokdreieck



Figur 4

verschwindet, die Höhen h_φ und h_ψ werden Null und der mittlere Punktfehler gemäß Skala II unendlich groß. Auch dann, wenn diese Verhältnisse nur annähernd zutreffen, wird die Punktbestimmung praktisch unbrauchbar; die Höhen h_φ und h_ψ werden in diesem Falle sehr klein und das weitere Eingehen mit diesen Werten in Skala II wird praktisch zwecklos.

In der vorliegenden Abhandlung wurde nur der Einfluß fehlerhafter Messungen auf das Ergebnis des Rückwärtseinschneidens behandelt; die Koordinaten der gegebenen Punkte wurden hiebei als fehlerfrei betrachtet. Der durch fehlerhafte Winkelmessungen hervorgerufene mittlere Fehler wird jedoch — die durchschnittliche Genauigkeit der Neutriangulierung vorausgesetzt — durch den Einfluß der Koordinatenfehler im allgemeinen nur unwesentlich erhöht.

²⁾ Diese Tatsache kann einfach mit Hilfe der Polargleichungen eines Kreises und einer Geraden bewiesen werden. Wird der Radiusvektor mit s und die Anomalie mit α bezeichnet, so lautet die Polargleichung eines Kreises, wenn der Pol am Kreisumfang liegt, $\frac{s}{\cos \alpha} = \text{const.}$ Wird statt des Radiusvektors s dessen reziproker Wert eingesetzt, so entsteht die Gleichung $\frac{1}{s \cos \alpha} = \text{const}$ oder $s \cdot \cos \alpha = \text{const}$, welche die Polargleichung einer Geraden darstellt.