Paper-ID: VGI_195316

Zur Bestimmung von Funktionsgewichten in überbestimmten symmetrischen Streckenketten

Günther Schelling [1]

[1] *TH Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **41** (5), S. 136–142

1953

Zur Bestimmung von Funktionsgewichten in überbestimmten symmetrischen Streckenketten

Von G. Schelling, T. H. Graz

1.

Es liege eine Dreieckskette vor, die durch Aneinanderreihung von gleichartigen, symmetrisch gebauten Zentralsystemen gebildet wurde; sämtliche Seiten der Kette seien direkt gemessen und jedes Zentralsystem einfach überbestimmt (einfach zusammenhängende symmetrische Kette). Ferner sei die Einführung weiterer Strecken in die Kette und die damit verbundenen zusätzlichen Überbestimmungen zugelassen, falls die Symmetrie der Kette bezüglich ihrer Längs- und Querachse gewahrt bleibt (mehrfach zusammenhängende symmetrische Kette). Eine Kette im definierten Sinne ist in Fig. 1 dargestellt.

Bei der Bearbeitung der Fehlertheorie der Streckenketten, die im wesentlichen die Bestimmung des Gewichtes verschiedener Funktionen der ausgeglichenen Meßstrecken beinhaltet, traten einige mathematische Gesetzmäßigkeiten auf, die ihre Ursache in der Symmetrie der Ketten haben und die zur Bestimmung der Unsicherheit aller untersuchten Funktionen — des Längs- und Querfehlers, sowie der Unsicherheit der Richtungsübertragung — nutzbringend verwendet werden können. Sie seien nachfolgend kurz dargestellt.

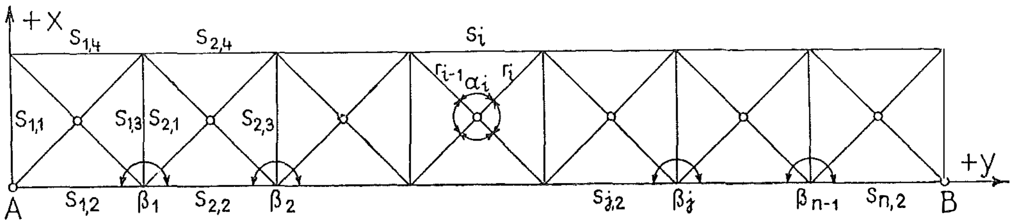

Fig. 1: Einfach zusammenhängende symmetrische Kette

2.

Über die Ausgleichung von Zentralsystemen und Dreiecksnetzen mit direkt gemessenen Seiten schreibt K. Hubeny in einem Beitrag [1], der dieser Arbeit als Grundlage dient.

Für das Verständnis der folgenden Zeilen ist lediglich von Bedeutung, daß der Ausgleich der Kette nach bedingten Beobachtungen erfolgt, wobei für jedes einfach überbestimmte Zentralsystem eine Bedingungsgleichung angesetzt wird: $F = [\alpha_i]_{i=1}^{i=n} - 2\pi = 0$; sie besagt, daß die Summe der von den Seiten eines Zentralsystems in dessen Zentralpunkt gebildeten Winkel α_i gleich 2π sein muß. Stellt man diese Winkel α_i als Funktion der gemessenen Seiten unter Verwendung des Cosinus-Satzes dar, so erhält man die Bedingungsgleichung in der Form:

$$F = \left[\text{arc cos } \frac{r_{i-1}^2 + r_i^2 - s_i^2}{2\, r_{i-1}\, r_i}\right]_{i=1}^{i=n} - 2\pi = 0. \quad \ldots \text{(1)}$$

Aus dieser Gleichung leitet man die Koeffizienten der Verbesserungen $v_{r,i}$ und $v_{s,i}$ als die Differentialquotienten $\frac{\partial F}{\partial r_i} = a_{r,i}$ und $\frac{\partial F}{\partial_{s,i}} = a_{s,i}$ ab und erhält:

$$a_{r,i} = \frac{r_{i-1} \cos \alpha_i - r_i}{\text{sign} \sin \alpha_i \, 2 \, J_i} + \frac{r_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - r_i}{\text{sign} \sin \alpha_{i+1} \, 2 \, J_{i+1}}$$

$$a_{s,i} = \frac{s_i}{\text{sign} \sin \alpha_i \, 2 \, J_i} . \qquad \ldots (2)$$

Mit J_i ist in (2) der Flächeninhalt des von den Seiten r_i, r_{i-1} und s_i gebildeten Dreieckes bezeichnet.

Eine kurze Zusammenfassung der eben dargestellten Verhältnisse findet sich in [2].

3.

Wir betrachten nun drei Funktionen der ausgeglichenen Strecken einer aus n Zentralsystemen zusammengesetzten, einfach zusammenhängenden symmetrischen Kette:

1) Die Länge der Kette, dargestellt durch die Funktion

$$G\,(s_{jk}) = \Big[s_{j2}\Big]_{j=1}^{j=n}$$

2) Die Normalprojektion des Endpunktes B der Kette auf die Richtung der Seite s_{12}

$$H\,(s_{jk}) = \Big[s_{j2} \sin \tau_j\Big]_{j=1}^{j=n}$$

3) Die Richtungsübertragung durch die Kette, dargestellt durch die Funktion

$$K\,(s_{jk}) = \Big[\beta_j\Big]_{j=1}^{j=n-1} .$$

Den mittleren Fehler dieser Funktionen bezeichnen wir als den Längsfehler, den Querfehler und den Fehler der Richtungsübertragung. Die Bestimmung des mittleren Fehlers dieser Funktionen von nach bedingten Beobachtungen ausgeglichenen Größen erfolgt nach [3]. Für gleichgewichtige Beobachtungen gilt:

$$\frac{1}{P} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf\,.\,1]^2}{[bb\,.\,1]} - \frac{[cf\,.\,2]^2}{[cc\,.\,2]} - \ldots\ldots - \frac{[xf\,.\,n-1]^2}{[xx\,.\,n-1]} \qquad \ldots (3)$$

Um die auftretenden Gestezmäßigkeiten klar übersehen zu können, schreiben wir in Hinkunft:

$$\frac{1}{P} = [ff] - \frac{B_1^2}{A_1} - \frac{B_2^2}{A_2} - \frac{B_3^2}{A_3} - \ldots - \frac{B_n^2}{A_n} \qquad \ldots (3a)$$

oder noch kürzer: $\frac{1}{P} = [ff] - \left[\frac{B_j^2}{A_j}\right]_{j=1}^{j=n}$ . . . (3b)

Um die Bestimmung der Gewichtszahl $\frac{1}{P}$ der betrachteten Funktion möglichst zu vereinfachen, wurde untersucht, ob die Ausdrücke $\frac{B_j^2}{A_j}$ gegen einen Grenzwert $\frac{\overline{B}^2}{\overline{A}}$ konvergieren. Wenn dies der Fall ist, können wir schreiben:

$$\frac{1}{P} = [ff] - \left[\frac{B_j^2}{A_j}\right]_{j=1}^{j=p} + (n-p)\,\frac{\overline{B}^2}{\overline{A}}. \qquad \ldots (4)$$

Die Zahl p ist lediglich von der Genauigkeit abhängig, mit der man die Gewichtszahl ermitteln will. Soll die Unsicherheit von $\frac{1}{P} < \pm\,\varepsilon$ sein, so ist dies sicher der Fall, wenn $\left(\frac{\overline{B}^2}{\overline{A}} - \frac{B_p^2}{A_p}\right)\left(n-p\right) < \varepsilon$ und die Unsicherheit in der Berechnung der Koeffizienten $\ll \varepsilon$ ist.

Wir führen den Nachweis der Konvergenz der Folge $\frac{B_j^2}{A_j}$ in drei Schritten. Zuerst untersuchen wir die Konvergenz der Folge $A_j \longrightarrow \overline{A}$, die nur von den Koeffizienten der Bedingungsgleichungen der Kette abhängt, also von der jeweils betrachteten Funktion G, H oder K unabhängig ist. Anschließend betrachten wir die Konvergenz der Folge $B_j \longrightarrow \overline{B}$; das Bildungsgesetz dieser Folge wird durch die jeweilige Funktion bestimmt, während verschiedene Kettenformen — soweit sie die Voraussetzungen unter 1. erfüllen — den mathematischen Aufbau nicht verändern. Anschließend folgen einige Zusammenhänge über die Konvergenz der Folge $\frac{B_j^2}{A_j} \longrightarrow \frac{\overline{B}^2}{\overline{A}}$, welche das Ziel der Untersuchung darstellen.

4.

Wir untersuchen zunächst die Folge A_j:

$$A_1 = [aa] \qquad A_2 = [bb\,.\,1] = [aa] - \frac{[ab]}{[aa]}\,[ab]$$

$$A_3 = [cc\,.\,2] = [cc\,.\,1] - \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\,[bc\,.\,1] = [cc] - \frac{[bc]}{[bb\,.\,1]}\,[bc].$$

Wegen der Kongruenz der Zentralsysteme wird $A_3 = [aa] - \frac{[ab]^2}{[bb\,.\,1]}$.

Das Bildungsgesetz der Folge A_j ist daraus bereits ersichtlich:

$$A_j = A_1 - \frac{K^2}{A_{j-1}}. \qquad \ldots (5)$$

Dabei bedeutet $K = [ab]$ eine für die Form der Zentralsysteme und ihre Aneinanderreihung charakteristische Konstante. A_j konvergiert offensichtlich gegen $\overline{A}$, wenn gilt:

$$\bar{A} = A_1 - \frac{K^2}{\bar{A}}.$$

Daraus folgt $\bar{A}^2 - A_1\bar{A} + K^2 = 0$

und damit $\bar{A} = \frac{A_1}{2} \pm \sqrt{\frac{A_1^2}{4} - K^2}.$ . . . (6)

Die Folge A_j konvergiert gegen ein reelles $\bar{A}$, wenn $\left(\frac{A_1^2}{4} - K^2\right) \geq 0$.

Daraus leitet sich die Konvergenzbedingung ab:

$$K^2 \leq \frac{A_1^2}{4}. \quad . . . (7)$$

5.

Zur Darstellung der Konvergenz der Folge $[af]$, $[bf.1]$, $[cf.2]$ usw., die wir durch die Ausdrücke B_1, B_2, B_3 usw., allgemein durch B_j, bezeichnet haben, benötigen wir noch die Folge der gleichen Ausdrücke in der nullten Reduktionsstufe, also die Folge $[af]$, $[bf]$, $[cf]$ usw., die wir mit $B_{j,o}$ bezeichnen.

Die Symmetrieverhältnisse der Ketten äußern sich in den Bildungsgesetzen der für die drei betrachteten Funktionen bestehenden Folgen B_j.

Wir erhalten für die Funktionen

$$G = [s_{j,2}]_{j=1}^{j=n}: \qquad B_j = B_1 - K\frac{B_{j-1}}{A_{j-1}} \Bigg|_{j=1}^{j=n} \quad . . . (8)$$

$$H = [s_{j,2} \,.\, \sin \tau_j]_{j=1}^{j=n}: B_j = u_j\,(n-j) + v_j \Bigg|_{j=2}^{j=n} \quad . . . (9)$$

$$u_j = u_{2,o} - K\frac{u_{j-1}}{A_{j-1}} \quad . . . (9a)$$

$$v_j = v_{2,o} - K\frac{u_{j-1} + v_{j-1}}{A_{j-1}} \quad . . . (9b)$$

$$K = \Big[\beta_j\Big]_{j=1}^{j=n-1}: \qquad B_j = B_{2,o} - K\frac{B_{j-1}}{A_{j-1}} \Bigg|_{j=2}^{j=n-1}. \quad . . . (10)$$

Die Folgen B_j der Funktion G und K lassen sich gemeinsam beschreiben durch den Ausdruck:

$$B_j = B_{m,o} - K\frac{B_{j-1}}{A_{j-1}} \Bigg|_{j=m}^{j=n-m+1}, \quad . . . (11)$$

die Folge u_j der Funktion H durch

$$u_j = u_{m,o} - K\frac{u_{j-1}}{A_{j-1}} \Bigg|_{j=m}^{j=n-m+1}. \quad . . . (12)$$

Die Größen B und u sind wie ersichtlich völlig homolog, während sich für die Folge v_j nur eine geringfügige Abweichung ergibt, die eine kurze spezielle Behandlung erfordern wird. Die in (11) und (12) enthaltene Zahl m besagt, daß vom m-ten Zentralsystem an alle Werte $B_{j,o}$ einander gleich sind; für die Folge B_j (G) mit $m = 1$, bedeutet dies:

$$B_{1,o} = B_{2,o} = B_{3,o} \text{ usw., oder ausführlich angeschrieben:}$$
$$[af] = [bf] = [cf] \text{ usw.,} \qquad \ldots (13a)$$

für die Folge B_j (H) mit $m = 2$:

$$B_{1,o} \neq B_{2,o} = B_{3,o} \text{ usw., oder ausführlich}$$
$$[af] \neq [bf] = [cf] \text{ usw.,} \qquad \ldots (13b)$$

und für die Folge B_j (K) mit $m = 2$:

$$B_{1,o} = B_{n,o} \neq B_{2,o} = B_{3,o} \text{ usw. oder}$$
$$[af] = [xf] \neq [bf] = [cf] \text{ usw.} \qquad \ldots (13c)$$

Wir führen nun die einfache Konvergenzentwicklung für die Folge B_j:

Konvergiert $B_j \longrightarrow \overline{B}$, dann muß $\overline{B} = B_{m,o} - K \dfrac{\overline{B}}{\overline{A}}$ sein, woraus sich ergibt:

$$\overline{B} = \frac{B_{m,o} \cdot \overline{A}}{\overline{A} + K}. \qquad \ldots (14)$$

Wir formen Gleichung (14) noch um: Eine Erweiterung mit $(\overline{A} + k)$ gibt

$$\overline{B} = \frac{B_{m,o} \cdot \overline{A}\ (\overline{A} + K)}{(\overline{A} + K)^2}. \qquad \ldots (14a)$$

Unter Verwendung von (6) erhalten wir:

$$(\overline{A} + K)^2 = \overline{A}\ (A_1 + 2\ K). \qquad \ldots (15)$$

Die Gleichung (15) in (14a) eingesetzt, gibt

$$\overline{B} = \frac{B_{m,o}\ (\overline{A} + K)}{A_1 + 2\ K}. \qquad \ldots (16a)$$

Völlig homolog dazu:
$$\overline{u} = \frac{u_{m,o}\ (\overline{A} + K)}{A_1 + 2\ K}. \qquad \ldots (16b)$$

Bei analoger Herleitung erhält man

$$\overline{v} = \frac{v_{m,o}\ (\overline{A} + K) - K\ u_{m,o}}{A_1 + 2\ K} \qquad \ldots (16c)$$

Den Fall, daß das Schlußglied der Folge $B_{j,o} \Big|_{j=1}^{j=n}$, nämlich $B_{n,o} \neq B_{m,o}$ ist, wie dies in (13 c) vorkommt, berücksichtigen wir durch die Bildung von $B_n = B_{n,o} - K \dfrac{\overline{B}}{\overline{A}}$. Bei mehreren von $B_{m,o}$ verschiedenen und am Ende der Folge liegenden Gliedern wird analog verfahren.

6.

Um zu dem gesuchten Ergebnis zu gelangen, haben wir den Konvergenzwert der Folge $\frac{B_j^2}{A_j}$, also den Ausdruck $\frac{\overline{B}^2}{\overline{A}}$ zu bilden.

Für die Funktionen $G\,(s_{jk})$ und $K\,(s_{jk})$ gibt dies:

$$\frac{\overline{B}^2}{\overline{A}} = \frac{B_{m,o}^2\,(\overline{A}+K)^2}{\overline{A}\,(A_1+2\,K)^2}\,.$$

Bei Berücksichtigung von (15) geht dieser Ausdruck über in

$$\frac{\overline{B}^2}{\overline{A}} = \frac{B_{m,o}^2}{A_1+2\,K}\,. \qquad \ldots \ (17)$$

Für die Funktion $H\,(s_{jk})$ erhalten wir wegen $\overline{B} = \overline{u}\,(n-j) + \overline{\nu}_j$ nach längerer, jedoch einfacher Rechnung den Ausdruck

$$\frac{\overline{B}^2}{\overline{A}} = \frac{1}{A_1+2\,K}\left\{u_{m,o}^2\,(n-j)^2 + 2\left(u_{m,o}\,\nu_{m,o} - K\,\frac{u_{m,o}^2}{\overline{A}+K}\right)(n-j) + \right.$$
$$\left. + \left(\nu_{m,o}^2 - 2\,K\,\frac{u_{m,o}\,\nu_{m,o}}{\overline{A}+K} + K^2\,\frac{u_{m,o}^2}{(\overline{A}+K)^2}\right)\right\}. \qquad \ldots \ (18)$$

Es bleibt nur mehr die Aufgabe, nach Festsetzung einer tolerierten Unsicherheit in der Ermittlung des Funktionsgewichtes, die durch (4) angezeigte Summation durchzuführen.

7.

Liegen nicht einfach, sondern mehrfach zusammenhängende symmetrische Ketten vor, dann kann man die aufgezeigte Entwicklung durchführen, wenn man die Zentralsysteme in Gruppen trennt; die Aufteilung hat so zu geschehen, daß durch Abspaltung von Zentralsystemen eine einfach zusammenhängende Kette verbleibt. Die darüber hinaus vorhandenen Zentralsysteme sind zunächst auf dem üblichen Wege nach (3) oder, falls auch sie eine einfach zusammenhängende Kette bilden, nach der dargelegten Methode in die Gewichtsfunktion einzubeziehen. Es ergeben sich dann für die verbleibende einfach zusammenhängende Kette neue Ausgangswerte A_1, K und B_1, bzw. $B_{m,o}$, für welche die hier dargelegte Entwicklung zulässig ist. Die Bearbeitung einer mehrfach zusammenhängenden Kette ist einfach, wenn die abgespaltenen Zentralsysteme voneinander unabhängig sind; dies war bei einer in [2] bearbeiteten Kette der Fall.

Bei der in [2] erfolgten Behandlung des Längsfehlers verschiedener Streckenketten wurden die Konvergenzausdrücke $\frac{\overline{B}^2}{\overline{A}}$ teilweise empirisch ermittelt. Die vorliegende Arbeit ermöglichte eine bequeme Kontrolle der angegebenen Werte, die bis auf einen in seiner Wirkung unbedeutenden Irrtum in der Anschreibung des Bildungsgesetzes der Folge $B_j\,(G)$ völlige Übereinstimmung ergab.

Die Anwendung dieses Konvergenzprinzipes für die Ermittlung von Funktionsgewichten in Streckenketten ist nur dann von Bedeutung, wenn die Werte $\frac{B_j^2}{A_j}$ sehr schnell konvergieren. Für die Raschheit der Konvergenz ist, wie aus (7) und (14) ersichtlich ist, das Verhältnis $\frac{K}{A_1} = \frac{[ab]}{[aa]}$ hauptsächlich maßgebend. Bei den für die praktische Verwendung in Frage kommenden Kettenformen, die in der zitierten Arbeit [2] ausführlich behandelt sind, war die Konvergenz äußerst stark; zur Einhaltung einer Genauigkeit von ca. 5% der Gewichtsfunktion genügten gewöhnlich drei bis vier Glieder der Folge, während alle weiteren durch den Konvergenzausdruck $\frac{\bar{B}^2}{\bar{A}}$ aproximiert werden konnten.

Bei Verwendung dieses Ergebnisses kann nun auch die Darstellung des Querfehlers und des Fehlers der Richtungsübertragung einfach und übersichtlich erfolgen.

Literatur:

[1.] K. Hubeny: Die Ausgleichung von Dreiecksnetzen mit direkt gemessenen Seiten. Ö. Z. f. V. W., Heft Nr. 5/6 1950.

[2.] G. Schelling: Über die Grundfigur und den Längsfehler in Streckenketten. Ö. Z. f. V. W., Heft Nr. 5/6 1952.

[3.] Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde, 1. Band.

Vom Steuerkataster zum Rechtskataster

(Ein Beitrag zur Reform des Grundsteuerkatasters)

von Dipl.-Ing. Stephan Nagy

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

(Schluß)

III. Vorschläge zur Einführung des Rechtskatasters

Als Grundsatz für die Einführung des Rechtskatasters muß gelten, daß die Einrichtung des Grundbuches unverändert bleibe und das materielle Liegenschaftsrecht nur so weit abgeändert wird, als unbedingt erforderlich ist; eine umfassende Abänderung der Katastergesetzgebung wird sich wegen des Überganges vom Grundsteuerkataster zum Rechtskataster nicht vermeiden lassen, wobei allerdings die Einrichtung des Grundkatasters möglichst wenig verändert werden soll.

Über die Notwendigkeit der *Einführung einer Vermarkungspflicht* und eines Schutzes für die Grenzzeichen bestehen vor allem aus volkswirtschaftlichen Gründen keine Zweifel. Schon um die Jahrhundertwende haben die Abgeordneten Silberer und Dr. Geßmann mehrmals in Zeitabständen Initiativanträge über Gesetze zur Vermarkung der Grenzlinien zur parlamentarischen Behandlung eingebracht; sie blieben aber ebenso unberücksichtigt wie der vom Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen im Jahre 1923 verfaßte Entwurf eines Gesetzes über eine fakultative Grenzvermarkung. Das Gebiet Österreichs enthält über 11 Millionen