Paper-ID: VGI_195403

Zur Entwicklung der Gauss'schen Mittelbreitenformeln

Karl Hubeny [1]

[1] *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **42** (1), S. 8–17

1954

BibTEX:

```
@ARTICLE{Hubeny_VGI_195403,
Title = {Zur Entwicklung der Gauss'schen Mittelbreitenformeln},
Author = {Hubeny, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {8--17},
Number = {1},
Year = {1954},
Volume = {42}
}
```

führungsarbeiten für sich wirtschaftlich zu gestalten, ohne Rücksicht darauf, ob die Art und Weise ihrer temporären Arbeit dem säkularen Wert des Werkes gerecht wurde. Einem an einer Vermessung wirtschaftlich interessierten Unternehmer kann kaum zugemutet werden, daß ihm der Mehraufwand für eine Arbeit, z. B. wie sie die Verwirklichung des sogenannten wachsenden Katasters erfordert, ohne entsprechende Gegenleistung aus öffentlicher Hand abverlangt wird.

2. Die auf dem Gebiet der Grundbuchsvermessung mehr oder minder freiberuflich tätigen Berufsangehörigen konnten ihre Existenz nur in wirtschaftlich regen Gebieten sichern. In wirtschaftlich ärmeren Gebieten war es ihnen kaum möglich, ihren Lebensunterhalt zu verdienen. Großer Verdienstmöglichkeit auf der einen Seite stand ebenso großer Einnahmeausfall auf der anderen Seite gegenüber. Es ist beachtenswert, daß die damaligen Berufsangehörigen die Neuregelung selbst anstrebten, obwohl sie sich bewußt waren, daß dadurch manchem von ihnen bessere Verdienstmöglichkeiten verloren gingen.

(Fortsetzung folgt)

Zur Entwicklung der Gauss'schen Mittelbreitenformeln

Von Karl H u b e n y, Graz

I.

Die beiden Hauptaufgaben der Rechnung auf der Bezugsfläche bestehen, geometrisch betrachtet, in der Transformation geodätischer Polarkoordinaten in orthogonale, krummlinige Koordinaten (erste Hauptaufgabe) und in der inversen Operation, in der Transformation krummliniger Orthogonalkoordinaten in Polarkoordinaten (zweite Hauptaufgabe).

Die direkte Lösung der ersten Hauptaufgabe folgt aus der Integration der Differentialgleichungen der geodätischen Kurve durch Reihenentwicklungen im Anfangspunkt; mit

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos\alpha}{M} \qquad \lambda' = \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sin\alpha}{N\cos\varphi} \qquad \alpha' = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{N}\sin\alpha \tag{1}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\varphi_2 - \varphi_1 &= \triangle\varphi_{12} = \frac{1}{1!}\,\varphi' s + \frac{1}{2!}\,\varphi'' s^2 + \frac{1}{3!}\,\varphi''' s^3 + \;\ldots\,. \\
\lambda_2 - \lambda_1 &= \triangle\lambda_{12} = \frac{1}{1!}\,\lambda' s + \frac{1}{2!}\,\lambda'' s^2 + \frac{1}{3!}\,\lambda''' s^3 + \;\ldots\,. \\
\alpha_2 - \alpha_1 &= \triangle\alpha_{12} = \frac{1}{1!}\,\alpha' s + \frac{1}{2!}\,\alpha'' s^2 + \frac{1}{3!}\,\alpha''' s^3 + \;\ldots\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

In den obigen Ausdrücken bedeutet, wie üblich, s die Bogenlänge der geodätischen Kurve, α deren Azimut, M den Meridiankrümmungshalbmesser, N den Normalkrümmungshalbmesser, φ die geographische Breite und λ die geographische Länge. Der Index 1 bezeichnet den Anfangspunkt P_1, der Index 2 den Endpunkt P_2 der geodätischen Strecke.

Bildet man aus (1) die in (2) angezeigten Ableitungen nach s, so ergeben sich nach deren Einsetzung die bekannten Potenzreihen nach Potenzen von $s \cos \alpha_1 = u_1$, $s \sin \alpha_1 = v_1$

$$\triangle\varphi_{12} = a_{10}\, u_1 + a_{20}\, u_1^2 + a_{02}\, v_1^2 + a_{30}\, u_1^3 + a_{12}\, u_1 v_1^2 + \ldots \tag{3a}$$

$$\triangle\lambda_{12} = a_{01}\, v_1 + a_{11}\, u_1 v_1 + a_{21}\, u_1^2 v_1 + a_{03}\, v_1^3 + \ldots \tag{3b}$$

$$\triangle\alpha_{12} = \bar{a}_{01}\, v_1 + \bar{a}_{11}\, u_1 v_1 + \bar{a}_{21}\, u_1^2 v_1 + \bar{a}_{03}\, v_1^3 + \ldots \tag{3c}$$

Die Koeffizienten a_{ik}, $\bar{a}_{ik}$ dieser, auf Legendre zurückgehenden Entwicklungen sind Funktionen der geographischen Breite und beziehen sich auf den Anfangspunkt.

In den Gleichungen (3a, b) liegt auch bereits die Lösung der zweiten Hauptaufgabe vor, da deren Umkehrung für die übliche Größenordnung des Breiten- und Längenunterschiedes zu konvergierenden, nach Potenzen von $\triangle\varphi$, $\triangle\lambda$ fortschreitenden Potenzreihen führt [1]. Für die direkte Lösung der zweiten Hauptaufgabe ergeben sich demnach die Potenzreihen

$$u_1 = s \cos \alpha_1 = b_{10}\, \triangle\varphi_{12} + b_{20}\, \triangle\varphi_{12}^2 + b_{02}\, \triangle\lambda_{12}^2 + b_{30}\, \triangle\varphi_{12}^3 + \\ + b_{12}\, \triangle\varphi_{12}\, \triangle\lambda_{12}^2 + \ldots \tag{4a}$$

$$v_1 = s \sin \alpha_1 = b_{01}\, \triangle\lambda_{12} + b_{11}\, \triangle\varphi_{12}\, \triangle\lambda_{12} + b_{21}\, \triangle\varphi_{12}^2\, \triangle\lambda_{12} + \\ + b_{03}\, \triangle\lambda_{12}^3 + \ldots \tag{4b}$$

Die Eintragung der Gleichungen (4a, b) in (3c) ergibt noch

$$\triangle\alpha_{12} = \bar{b}_{01}\, \triangle\lambda_{12} + \bar{b}_{11}\, \triangle\varphi_{12}\, \triangle\lambda_{12} + \bar{b}_{21}\, \triangle\varphi_{12}^2\, \triangle\lambda_{12} + \bar{b}_{03}\, \triangle\lambda_{12}^3 + \ldots \tag{4c}$$

Die Koeffizienten b_{ik}, $\bar{b}_{ik}$ beziehen sich, dem Ansatz von (2) entsprechend, ebenso wie in (3) die Koeffizienten a_{ik}, $\bar{a}_{ik}$, auf den Anfangspunkt P_1. Sie sind gleichfalls Funktionen allein der geographischen Breite.

Durchläuft man die geodätische Strecke $P_1 P_2$ von P_2 nach P_1, also im entgegengesetzten Sinn, so wird der ursprüngliche Endpunkt zum Anfangspunkt; für diesen lassen sich die Reihen (4) nochmals anschreiben. Es ist

$$\begin{aligned} u_2 &= s \cos \alpha_2 = b_{10}\, \triangle\varphi_{21} + b_{20}\, \triangle\varphi_{21}^2 + b_{02}\, \triangle\lambda_{21}^2 + \ldots \\ v_2 &= s \sin \alpha_2 = b_{01}\, \triangle\lambda_{21} + b_{11}\, \triangle\varphi_{21}\, \triangle\lambda_{21} + \ldots \\ \triangle\alpha_{21} &= \bar{b}_{01}\, \triangle\lambda_{21} + \bar{b}_{11}\, \triangle\varphi_{21}\, \triangle\lambda_{21} + \ldots \end{aligned}$$

Hierin beziehen sich nunmehr die Koeffizienten b_{ik}, $\bar{b}_{ik}$ auf den neuen Anfangspunkt, nämlich auf P_2; wir erhalten mit dem vorstehenden Ansatz eine völlig unabhängige Kontrolle der mit dem Anfangspunkt P_1 ausgeführten Rechnung. Nachstehend geben wir, als Ergebnis der Umkehrung von (3a, b) die Bedeutung der Koeffizienten der Formeln (4) an. Mit den üblichen Abkürzungen $t = \operatorname{tg} \varphi$, $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
b_{10} &= N\ (1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6\ \ldots) \\
b_{20} &= \frac{1}{2} N t\ (3\,\eta^2 - 6\,\eta^4) \\
b_{02} &= \frac{1}{2} N \cos^2 \varphi\, t \\
b_{30} &= \frac{1}{2} N\ (\eta^2 - t^2\,\eta^2 - 2\,\eta^4 + 7\,t^2\,\eta^4) \\
b_{12} &= \frac{1}{6} N \cos^2 \varphi\ (1 - 3\,t^2 + 3\,t^2\,\eta^2 - 3\,t^2\,\eta^4) \\
b_{40} &= \frac{1}{2} N t\ (-\eta^2) \\
b_{22} &= \frac{1}{12} N t \cos^2 \varphi\ (-4 + 5\,\eta^2 - 9\,t^2\,\eta^2) \\
b_{04} &= \frac{1}{24} N t \cos^4 \varphi\ (1 - t^2 + \eta^2)
\end{aligned} \tag{5a}$$

$$\begin{aligned}
b_{01} &= N \cos \varphi \\
b_{11} &= N t \cos \varphi\ (-1 + \eta^2 - \eta^4) \\
b_{21} &= \frac{1}{6} N \cos \varphi\ (-2 + 2\,\eta^2 - 9\,t^2\,\eta^2 - 2\,\eta^4 + 18\,t^2\,\eta^4) \\
b_{03} &= \frac{1}{6} N \cos^3 \varphi\ (-t^2) \\
b_{31} &= \frac{1}{6} N t \cos \varphi\ (-7\,\eta^2 + 3\,t^2\,\eta^2) \\
b_{13} &= \frac{1}{6} N t \cos^3 \varphi\ (-1 + t^2 - t^2\,\eta^2)
\end{aligned} \tag{5b}$$

$$\begin{aligned}
\bar{b}_{01} &= t \cos \varphi \\
\bar{b}_{11} &= \frac{1}{2} \cos \varphi \\
\bar{b}_{21} &= \frac{1}{12} t \cos \varphi\ (\eta^2 - \eta^4) \\
\bar{b}_{03} &= \frac{1}{12} t \cos^3 \varphi\ (1 + \eta^2)
\end{aligned} \tag{5c}$$

In der geodätischen Literatur wird, abgesehen von [2] und einigen gelegentlichen Erwähnungen (z. B. [3]), auf diese direkte Lösung der zweiten Hauptaufgabe kaum eingegangen. Dieser Umstand mag seine Erklärung darin finden, daß für die zweite Hauptaufgabe in den Gauss'schen Mittelbreitenformeln wohl die schönste Lösung vorliegt. Eine direkte Entwicklung der obigen Formeln findet sich in [8].

Trotz der gegenüber den Gauss'schen Mittelbreitenformeln größeren Gliederzahl und schwächeren Konvergenz der Reihen (4) kommt diesen doch — zunächst nur vom rechentechnischen Standpunkt aus gesehen — eine gewisse Bedeutung zu. Wie schon erwähnt, gestatten sie eine durchgreifende Rechenkontrolle in Form eines doppelten Ansatzes im Anfangs- und Endpunkt; für die Berechnung mehrerer, von einem Punkt ausgehenden Strecken genügt eine einmalige Berechnung der Koeffizienten im Zentralpunkt. Darüber hinaus ergibt sich aus den Formeln (4a, b), wie wir nachfolgend zeigen wollen, eine einfache Ableitung der Gauss'schen Mittelbreitenformeln.

II.

Die Gauss'schen Mittelbreitenformeln werden immer aus den Formeln (3) entwickelt, wobei man zunächst vom Halbierungspunkt der geodätischen Strecke $P_1 P_2$ ausgeht und dann schrittweise alle auf diesen Punkt bezogenen Größen auf die mittlere Breite überführt [4], [5].

Hievon abweichend gehen wir von den Reihen (4a, b) aus und schreiben diese für den Anfangspunkt P_1 und den Endpunkt P_2 einer geodätischen Strecke an. Wir zählen die Kurvenlänge positiv im Sinne $P_1 P_2$; als Azimute α_1 (in P_1) und α_2 (in P_2) bezeichnen wir die positiv im Uhrzeigersinn gezählten Winkel zwischen jener Richtung des Meridians und der Kurve, in der der Parameter φ und die Kurvenlänge s positiv zunimmt. Indem wir als Breiten- und Längenunterschied einführen

$$\begin{aligned} \triangle\varphi &= \triangle\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1 = -\triangle\varphi_{21} = -(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \triangle\lambda &= \triangle\lambda_{12} = \lambda_2 - \lambda_1 = -\triangle\lambda_{21} = -(\lambda_1 - \lambda_2) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$s\cos\alpha_1 = b_{10,1}\triangle\varphi + b_{20,1}\triangle\varphi^2 + b_{02,1}\triangle\lambda^2 + b_{30,1}\triangle\varphi^3 + b_{12,1}\triangle\varphi\triangle\lambda^2 + \dots \quad (6a)$$

$$s\cos\alpha_2 = b_{10,2}\triangle\varphi - b_{20,2}\triangle\varphi^2 - b_{02,2}\triangle\lambda^2 + b_{30,2}\triangle\varphi^3 + b_{12,2}\triangle\varphi\triangle\lambda_2 + \dots \quad (6b)$$

$$s\sin\alpha_1 = b_{01,1}\triangle\lambda + b_{11,1}\triangle\varphi\triangle\lambda + b_{21,1}\triangle\varphi^2\triangle\lambda + b_{03,1}\triangle\lambda^3 + \dots \quad (7a)$$

$$s\sin\alpha_2 = b_{01,2}\triangle\lambda - b_{11,2}\triangle\varphi\triangle\lambda + b_{21,2}\triangle\varphi^2\triangle\lambda + b_{03,2}\triangle\lambda^3 + \dots \quad (7b)$$

Die bei den Koeffizienten nach dem Komma angeschriebenen Indices zeigen jenen Punkt an, für den die Koeffizienten b_{ik} zu nehmen sind.

Wir nehmen nun die Koeffizienten b_{ik} für die mittlere Breite $\varphi_0 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ und entwickeln daraus die auf P_1 (φ_1) und P_2 (φ_2) bezogenen Koeffizienten b_{ik} der vorstehenden Gleichungen durch Potenzreihen, fortschreitend nach Potenzen von $\frac{\triangle\varphi}{2} = \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Es ist

$$b_{10,1} = b_{10,0} - \frac{1}{1!} b'_{10,0} \frac{\triangle\varphi}{2} + \frac{1}{2!} b''_{10,0}\left(\frac{\triangle\varphi}{2}\right)^2 - \dots$$

$$b_{10,2} = b_{10,0} + \frac{1}{1!} b'_{10,0} \frac{\triangle\varphi}{2} + \frac{1}{2!} b''_{10,0}\left(\frac{\triangle\varphi}{2}\right)^2 + \dots$$

$$b_{20,1} = b_{20,0} - \frac{1}{1!} b'_{20,0} \frac{\triangle\varphi}{2} + \dots$$

$$b_{20,2} = b_{20,0} + \frac{1}{1!} b'_{20,0} \frac{\triangle\varphi}{2} + \dots$$

usw.

Hierin bezeichnen die Akzente Ableitungen nach der Breite; sollen die Formeln bis zu einer Ordnungszahl ν von Produkten der Potenzen in $\triangle\varphi$, $\triangle\lambda$ entwickelt werden, so ist ein Koeffizient der ursprünglichen Ordnungszahl $n = i + k$ bis zur Ordnungszahl $\nu - n$ seiner Ableitungen zu entwickeln.

Wir denken uns nun die obigen Entwicklungen in (6) und (7) eingetragen und daraus gebildet

$$\frac{1}{2}\Big[(6a) + (6b)\Big], \quad \frac{1}{2}\Big[(6a) - (6b)\Big]$$

$$\frac{1}{2}\Big[(7a) + (7b)\Big], \quad \frac{1}{2}\Big[(7a) - (7b)\Big].$$

Mit $\alpha_m = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$, $\triangle\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} s \cos\alpha_m \cos\frac{1}{2}\triangle\alpha = b_{10}\triangle\varphi &+ \left[b_{30} - \frac{1}{2}b'_{20} + \frac{1}{8}b''_{10}\right]\triangle\varphi^3 \\ &+ \left[b_{12} - \frac{1}{2}b'_{02}\right]\triangle\varphi\triangle\lambda^2 \end{aligned} \tag{8a}$$

$$\begin{aligned} s \sin\alpha_m \sin\frac{1}{2}\triangle\alpha = &\left[b_{20} - \frac{1}{2}b'_{10}\right]\triangle\varphi^2 + \Big[b_{02}\Big]\triangle\lambda^2 \\ &+ \left[b_{40} - \frac{1}{2}b'_{30} + \frac{1}{8}b''_{20} - \frac{1}{48}b'''_{10}\right]\triangle\varphi^4 \\ &+ \left[b_{22} - \frac{1}{2}b'_{12} + \frac{1}{8}b''_{02}\right]\triangle\varphi^2\triangle\lambda^2 + \Big[b_{04}\Big]\triangle\lambda^4 \end{aligned} \tag{8b}$$

$$\begin{aligned} s \sin\alpha_m \cos\frac{1}{2}\triangle\alpha = \Big[b_{01}\Big]\triangle\lambda &+ \left[b_{21} - \frac{1}{2}b'_{11} + \frac{1}{8}b''_{01}\right]\triangle\varphi^2\triangle\lambda \\ &+ \Big[b_{03}\Big]\triangle\lambda^3 \end{aligned} \tag{8c}$$

$$\begin{aligned} -s \cos\alpha_m \sin\frac{1}{2}\triangle\alpha = &\left[b_{11} - \frac{1}{2}b'_{01}\right]\triangle\varphi\triangle\lambda \\ &+ \left[b_{31} - \frac{1}{2}b'_{21} + \frac{1}{8}b''_{11} - \frac{1}{48}b'''_{01}\right]\triangle\varphi^3\triangle\lambda \\ &+ \left[b_{13} - \frac{1}{2}b'_{03}\right]\triangle\varphi\triangle\lambda^3. \end{aligned} \tag{8d}$$

Das allgemeine Bildungsgesetz eines Klammerausdruckes vor einem Produkt $\triangle\varphi^i\triangle\lambda^k$ folgt leicht aus

$$\left[b_{ik} + \left(-\frac{1}{2}\right)^1\frac{1}{1!}b'_{i-1,k} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2!}b''_{i-2,k} + \ldots\ldots\left(-\frac{1}{2}\right)^i\frac{1}{i!}b^{i}_{o,k}\right].$$

Wir bilden nun die in (8) angezeigten Ableitungen der in (5a, b) zusammengestellten Koeffizienten b_{ik} und erhalten damit

$$s \cos \alpha_m \cos \frac{1}{2} \triangle \alpha = N\,(1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6)\,\triangle \varphi + \frac{1}{8} N\,(\eta^2 - t^2 \eta^2)\,\triangle \varphi^3$$

$$+ \frac{1}{12} N \cos^2 \varphi\,(-1 - 3\,t^2 + 3\,t^2 \eta^2)\,\triangle \varphi\,\triangle \lambda^2 \qquad (9a)$$

$$s \sin \alpha_m \sin \frac{1}{2} \triangle \alpha = \frac{1}{2} N t \cos^2 \varphi \triangle \lambda^2 + \frac{1}{48} N t \cos^2 \varphi\,(4 + \eta^2 - 9\,t^2 \eta^2)\,\triangle \varphi^2 \triangle \lambda^2$$

$$+ \frac{1}{48} N t \cos^4 \varphi\,(2 - 2\,t + 2\eta^2)\,\triangle \lambda^4 \qquad (9b)$$

$$s \sin \alpha_m \cos \frac{1}{2} \triangle \alpha = N \cos \varphi \triangle \lambda + \frac{1}{24} N \cos \varphi\,(1 - \eta^2 - 9\,t^2 \eta^2)\,\triangle \varphi^2 \triangle \lambda$$

$$+ \frac{1}{24} N \cos^3 \varphi\,(-4\,t^2)\,\triangle \lambda^3 \qquad (9c)$$

$$s \cos \alpha_m \sin \frac{1}{2} \triangle \alpha = \frac{1}{2} N t \cos \varphi\,(1 - \eta^2 + \eta^4)\,\triangle \varphi\,\triangle \lambda$$

$$+ \frac{1}{48} N t \cos \varphi\,(3 + 2\,\eta^2 - 3\,t^2 \eta^2)\,\triangle \varphi^3 \triangle \lambda \qquad (9d)$$

$$+ \frac{1}{48} N t \cos^3 \varphi\,(-4\,t^2 + 4\,t^2 \eta^2)\,\triangle \varphi\,\triangle \lambda^3.$$

Aus diesen Formeln ergeben sich jeweils doppelt die gesamten Mittelbreitenformeln; der Grundgedanke dieser Entwicklung und das — auf einem anderen Weg hergeleitete — Formelsystem (9) findet sich schon in der unter [6] erwähnten Abhandlung von Krüger.

Wir dividieren nunmehr (9d) durch (9a) oder (9b) durch (9c) und erhalten

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \triangle \alpha = \frac{1}{2} t \cos \varphi \triangle \lambda + \frac{1}{48} t \cos \varphi\,(3 + 2\,\eta^2)\,\triangle \varphi^2 \triangle \lambda +$$

$$+ \frac{1}{48} t \cos^3 \varphi\,(2 + 2\,t^2 + 2\,\eta^2)\,\triangle \lambda^3 \qquad (10)$$

Aus dem Übergang von der Tangente auf den Bogen folgt die Azimutdifferenz mit

$$\triangle \alpha = t \cos \varphi \triangle \lambda + \frac{1}{24} t \cos \varphi\,(3 + 2\,\eta^2)\,\triangle \varphi^2 \triangle \lambda +$$

$$+ \frac{1}{24} t \cos^3 \varphi\,(2 + 2\,\eta^2)\,\triangle \lambda^3 \qquad (11)$$

Wir bilden noch aus (11)

$$\left(\cos \frac{1}{2} \triangle \alpha\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{8} l^2 \cos^2 \varphi \triangle \lambda^2 \tag{12}$$

und

$$\left(\sin \frac{1}{2} \triangle \alpha\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2} l \cos \varphi \triangle \lambda\right)^{-1} \cdot$$
$$\cdot \left[1 - \frac{1}{24} (3 + 2 \eta^2) \triangle \varphi^2 - \frac{1}{24} \cos^2 \varphi (2 - l^2 + 2 \eta^2) \triangle \lambda^2\right]. \tag{13}$$

Indem wir die Gleichungen (9a, c) mit (12) oder die Gleichungen (9d, b) mit (13) multiplizieren, erhalten wir — in völliger Übereinstimmung der Ergebnisse —

$$s \cos \alpha_m = N (1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6) \triangle \varphi + \frac{1}{24} N (3 \eta^2 - 3 l^2 \eta^2) \triangle \varphi^3$$
$$+ \frac{1}{24} N \cos^2 \varphi (-2 - 3 l^2 + 3 l^2 \eta^2) \triangle \varphi \triangle \lambda^2 \tag{14a}$$

$$s \sin \alpha_m = N \cos \varphi \triangle \lambda + \frac{1}{24} N \cos \varphi (1 - \eta^2 - 9 l^2 \eta^2) \triangle \varphi^2 \triangle \lambda$$
$$+ \frac{1}{24} N \cos^3 \varphi (- l^2) \triangle \lambda^3. \tag{14b}$$

Die Umkehrung dieser Formeln ergibt

$$\triangle \varphi = \frac{1}{N} (1 + \eta^2) s \cos \alpha_m + \frac{1}{24 N^3} (-3 \eta^2 + 3 l^2 \eta^2) s^3 \cos^3 \alpha_m$$
$$+ \frac{1}{24 N^3} (2 + 3 l^2 + 4 \eta^2 + 3 l^2 \eta^2) s^3 \cos \alpha_m \sin^2 \alpha_m \tag{15a}$$

$$\triangle \lambda = \frac{1}{N \cos \varphi} s \sin \alpha_m + \frac{1}{24 N^3 \cos \varphi} (-1 - \eta^2 + 9 l^2 \eta^2) s^3 \cos^2 \alpha_m \sin \alpha_m$$
$$+ \frac{1}{24 N^3 \cos \varphi} (l^2) s^3 \sin^3 \alpha_m. \tag{15b}$$

Damit ist die Entwicklung der Mittelbreitenformeln beendet; wir bemerken hiezu, daß die Formeln (14), (15) mit den in der Literatur [4], [5] angegebenen Formeln völlig übereinstimmen, wenn man von der dort etwas anderen Anschreibung absieht.

III.

Eine Rechenkontrolle können wir durch die Division von (14b) durch (14a) schaffen; wir erhalten

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \frac{\triangle\lambda}{\triangle\varphi} \cos\varphi \; . \tag{16}$$
$$\cdot \left[(1+\eta^2) + \frac{1}{24}(1 - 3\eta^2 - 6\, l^2\eta^2)\triangle\varphi^2 + \frac{1}{24}\cos^2\varphi\,(2 + 2\, l^2 + 4\eta^2 + 2\, l^2\eta^2)\triangle\lambda^2 \right]$$

Die gleiche Formel ergibt sich, wenn wir (8c) durch (8d) dividieren und in den Quotienten die Gleichung (10) eintragen.

Darüber hinaus wollen wir noch eine andere Rechenkontrolle entwickeln, wobei wir — um einen möglichst weiten Kontrollbereich zu erhalten — auch die Glieder fünfter Ordnung mitführen werden.

Es ergibt sich aus dem Satze von Clairaut

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{N_2\cos\varphi_2}{N_1\cos\varphi_1} \tag{17}$$

Wir erweitern diese Proportion in (siehe, in etwas anderem Zusammenhang, [6])

$$\frac{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2}{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2} = \frac{N_2\cos\varphi_2 - N_1\cos\varphi_1}{N_2\cos\varphi_2 + N_1\cos\varphi_1}$$

und erhalten daraus

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}\triangle\alpha = \operatorname{tg}\alpha_m \frac{N_2\cos\varphi_2 - N_1\cos\varphi_1}{N_2\cos\varphi_2 + N_1\cos\varphi_1}. \tag{18}$$

Wir denken uns nun wieder die Größen $N_1 \cos\varphi_1$ und $N_2 \cos\varphi_2$, die Parallelkreisradien in P_1 und P_2, durch je eine in der Mittelbreite entwickelte und in Potenzen von $-\frac{1}{2}\triangle\varphi$ und $+\frac{1}{2}\triangle\varphi$ fortschreitende Potenzreihe entwickelt. Für diese Operation geben wir die Ableitungen von $N\cos\varphi$ nach der Breite an; es ist

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} N\cos\varphi = N\cos\varphi\, l\,(-1 + \eta^2 - \eta^4 + \eta^6 \,.\,.)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} N\cos\varphi = N\cos\varphi\,(-1 + \eta^2 - 3\, l^2\eta^2 - \eta^4 + 6\, l^2\eta^4 + \eta^6 - 9\, l^2\eta^6)$$
$$\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3} N\cos\varphi = N\cos\varphi\, l\,(1 - 10\,\eta^2 + 3\, l^2\eta^2 + 19\,\eta^4 - 21\, l^2\eta^4)$$
$$\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} N\cos\varphi = N\cos\varphi\,(1 - 10\eta^2 + 30\, l^2\eta^2 + 19\,\eta^4 - 150\, l^2\eta^4 + 45\, l^4\eta^4)$$
$$\frac{\partial^5}{\partial\varphi^5} N\cos\varphi = N\cos\varphi\, l\,(-1 + 91\,\eta^2 - 30\, l^2\eta^2)$$

Die Aufstellung der erwähnten Potenzreihen mit Hilfe der obigen Ableitungen, deren Eintragung in (18) und weiterhin die Entwicklung des

Nenners von (18) nach dem binomischen Satz ergibt — alle von der Breite abhängigen Größen beziehen sich auf die Mittelbreite —

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \triangle\alpha = \operatorname{tg} \alpha_m \Big[& \frac{1}{2} l (1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6) \triangle\varphi \\ & + \frac{1}{24} l (1 + 2\eta^2 + 3 l^2 \eta^2 - 5\eta^4 - 3 l^2 \eta^4) \triangle\varphi^3 \\ & + \frac{1}{240} l (1 + \eta^2) \triangle\varphi^5 \Big]. \end{aligned} \tag{19}$$

Mit dieser Gleichung, die nur eine Umformung von (17) darstellt, ist eine Kontrolle der Rechnung der ersten und der zweiten Hauptaufgabe gegeben. Unter Voraussetzung der üblichen Rechengenauigkeit in Breite und Azimut (10^{-4} bzw. 10^{-3} sec) kann sie bei Bogenlängen der geodätischen Kurve bis zu 1000 km angewendet werden.

Brechen wir die Entwicklung (19) nach den Gliedern dritter Ordnung ab und gehen wir von der Tangente auf den Bogen über, wobei wir höhere Potenzen von tg α_m mit Hilfe von (16) eliminieren, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \triangle\alpha = \operatorname{tg} \alpha_m \Big[& l (1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6) \triangle\varphi + \frac{1}{12} l (1 + 2\eta^2 + 3 l^2 \eta^2) \triangle\varphi^3 \\ & + \frac{1}{12} l^3 \cos^2\varphi (-1 + \eta^2) \triangle\varphi \triangle\lambda^2 \Big]. \end{aligned} \tag{20}$$

Diese Gleichung können wir dem System der Mittelbreitenformeln (14) (15), mit dem sie in Aufbau und Konvergenz übereinstimmt, als Ergänzung zur Kontrolle der Rechnung beifügen. Tragen wir hierin (15a, b) ein, so ergibt sich ebenso wie aus der Eintragung dieser Gleichungen in (11)

$$\begin{aligned} \triangle\alpha = \frac{l}{N} s \sin\alpha_m + & \frac{l}{24 N^3} (2 + 7\eta^2 + 9 l^2 \eta^2) s^3 \cos\alpha_m{}^2 \sin\alpha_m \\ & + \frac{l}{24 N^3} (2 + l^2 + 2\eta^2) s^3 \sin^3\alpha_m. \end{aligned} \tag{21}$$

IV.

In den vorstehenden Abschnitten haben wir eine vollständige Entwicklung der Gauss'schen Mittelbreitenformeln auf anderer als sonst üblicher Grundlage gegeben. Eine kritische Betrachtung zeigt, daß sich damit eine gedanklich einfachere und glattere Entwicklung der Gauss'schen Formeln ergibt, wobei, wie wir gesehen haben, jedes Ergebnis überdies doppelt gewonnen wird.

Die Berechnung der Glieder fünfter Ordnung der Mittelbreitenformeln — in der Literatur als „recht umständlich" bezeichnet [7] — gelingt ebenfalls leicht, wenn man (8a, c) um diese Glieder erweitert und zur Berechnung der Azimutdifferenz die Gleichung (19) heranzieht.

Graz, am 30. April 1951.

L i t e r a t u r:

[1] *Hopfner* Die beiden Hauptaufgaben der geodätischen Übertragung, D. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1939, Seite 237, Abschnitt d), auch [2].

[2] *Hopfner* Grundlagen der höheren Geodäsie, 1949, Art. 33, b), Seite 77, 78, auch [1].

[3] *Hristow* Änderung der geographischen Koordinaten zufolge Umorientierung eines geodätischen Netzes, D. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1942, Seite 132, Formel 32, 33 u. a.

[4] *Jordan-Eggert* Handbuch der Vermessungskunde III/2 1941, § 21, Seite 86.

[5] *Baeschlin* Lehrbuch der Geodäsie, 1948, § 27, Seite 129 u. a.

[6] *Näbauer* Grundzüge der Geodäsie, 1925 C, II, 25, Seite 418, auch:
Krüger Die kürzeste Entfernung und ihre Azimute zwischen zwei gegebenen Punkten des Erdellipsoids, Nachrichten der K. Ges. der Wissenschaften Göttingen, 1918.

[7] *Jordan-Eggert* Handbuch der Vermessungskunde III/2 1941, § 21, Seite 96.

[8] *Hubeny* Ein Beitrag zur Lösung der zweiten Hauptaufgabe der geodätischen Übertragung, Ö. Z. f. V., Festschrift Doležal, 1952, Seite 343.

Die Reduktion des astronomischen und ellipsoidischen Azimutes auf den geoidischen Zielpunkt

Von Karl L e d e r s t e g e r, Wien

(Veröffentlichung der Österr. Kommission für die Internationale Erdmessung)

Zusammenfassung: Der neuen Formel von V e n i n g M e i n e s z für die Reduktion des astronomischen Azimutes wegen der Meereshöhe des Zielpunktes wird eine analoge Reduktion des ellipsoidischen Azimutes auf den geoidischen Zielpunkt gegenübergestellt, in welcher die Reduktion wegen der Meereshöhe des Zielpunktes mit der Reduktion vom astronomischen auf das ellipsoidische Zenit zusammengefaßt ist. Aus der Gegenüberstellung des reduzierten astronomischen und ellipsoidischen Azimutes ergibt sich eine azimutale Lotabweichungskomponente, die einen theoretischen L a p l a c e schen Widerspruch erzeugt. Dieser Widerspruch hängt allein von der Lotabweichung des Standpunktes und der Meereshöhe eines zur Distanz s gehörigen und im Horizont des Standpunktes erscheinenden Zielpunktes ab.

Summary: The new formula of V e n i n g M e i n e s z for the correction of astronomic azimuths for skew normals will be compared with an analogous reduction of the spheroidal azimuths, in which the correction for skew normals and the correction for deviation of the vertical are connected. The difference of the reduced astronomic and spheroidal azimuth produces an azimuthal component of deviation and also a L a p l a c e's discrapency which depends only on the deviation of the vertical at the station and of the height of a target in the horizon of P_1 and in the distance to P_2.

Résumé: A la nouvelle formule de V e n i n g M e i n e s z servant à la réduction de l'azimut astronomique en raison du niveau de la mer du point de visée on oppose une réduction analogue de l'azimut ellipsoïdique au point de visée geoïdique, dans laquelle la réduction en raison du niveau de la mer du point de visée est réunie à la réduction du zénith astronomique au zénith ellipsoïdique. De la confrontation des azimuts astronomique et ellipsoïdique réduits il résulte une composante azimutale de déviation de la verticale, engendrant une contradiction théorique de L a p l a c e. Cette contradiction dépend uniquement de la déviation de la verticale en la station, et de l'altitude d'un point de visée appartenant à la distance „s" et apparaissant dans l'horizon de la station.