

Paper-ID: VGI\_195408



## Die funktionellen Zusammenhänge von $\gamma$ -Parallaxengröße und Beobachtungsort in einem Stereomodell

Hans Schmid

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **42** (2, 3, 4, 5), S. 51–56, 70–82, 114–123, 148–156

1954

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Schmid_VGI_195408,  
  Title = {Die funktionellen Zusammenhänge von  $\gamma$ -Parallaxengröße und  
    Beobachtungsort in einem Stereomodell},  
  Author = {Schmid, Hans},  
  Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen},  
  Pages = {51--56, 70--82, 114--123, 148--156},  
  Number = {2, 3, 4, 5},  
  Year = {1954},  
  Volume = {42}  
}
```



# Die funktionellen Zusammenhänge von $y$ -Parallaxengröße und Beobachtungsort in einem Stereomodell; ein neues numerisches Orientierungsverfahren

Von H. S c h m i d, Wien

## I. Einleitung

Nach wie vor ist das Problem der gegenseitigen Orientierung von Luftbildern das wichtigste in der gesamten modernen Luftbildphotogrammetrie. Obwohl schon eine große Anzahl von Orientierungsverfahren entwickelt wurde, gibt es bis heute keines, das sowohl hinsichtlich der erreichten Genauigkeit, als auch der Wirtschaftlichkeit als optimal angesehen werden kann. Ob es überhaupt je gelingen wird, ein Verfahren zu entwickeln, das allgemein als das Beste angesehen wird, bleibt der Zukunft überlassen. Wie bei vielen Messungsverfahren stehen auch in der Photogrammetrie Genauigkeit der Messungsergebnisse und Wirtschaftlichkeit, gleichbedeutend mit geringem Zeitaufwand, im Widerspruch. Würde es bei der Lösung des Orientierungsproblems nur auf die erreichte Genauigkeit der Orientierungselemente ankommen, also die aufgewendete Zeit belanglos sein, so gäbe es wohl nur eine optimale Lösung. Man hätte nämlich in einer großen Anzahl von beliebig liegenden Orientierungspunkten die  $y$ -Parallaxen  $n$ -mal zu messen und die Orientierungselemente mit Hilfe der Ausgleichsrechnung zu berechnen. Es würde sich bei dieser Aufgabe um die Aufstellung und Lösung eines Normalgleichungssystems von fünf Gleichungen handeln, wobei die Koeffizienten der fünf Normalgleichungen aus ebenso vielen Verbesserungsgleichungen, als Orientierungspunkte verwendet wurden, zu berechnen wären. Diese mathematisch einwandfreie Lösung wurde auch von einer Anzahl von Autoren empfohlen und angewendet. Um jedoch den Umfang der Rechenarbeit auf ein erträgliches Maß zu reduzieren, wurden dabei bedeutende Einschränkungen hinsichtlich Geländebeschaffenheit einerseits und Orientierungspunktzahl andererseits gemacht. Da nun in der Natur mathematisch einfachste Geländeformen kaum vorkommen, so stellen die Ergebnisse dieser Verfahren nur Näherungslösungen dar.

Eine zweite Gruppe von Verfahren, die letzten Endes auch nur mehr oder weniger gute Näherungslösungen liefert, geht von der Voraussetzung aus, daß man das Gelände nicht idealisieren dürfe. Da aber bei nicht idealisiertem Gelände die Berechnung der wahrscheinlichsten Werte der Orientierungselemente aus den Verbesserungsgleichungen nur mit Hilfe von Normalgleichungssystemen zu einer strengen Lösung führt, ersetzt man diese Lösungsart durch eine Näherungsrechnung dergestalt, daß die Orientierungselemente nicht in einem Guß, sondern nacheinander gefunden werden.

Das in der vorliegenden Arbeit auf Grund der bestehenden Abhängigkeit von  $y$ -Parallaxengröße einerseits und Punktort im Stereomodell andererseits entwickelte Verfahren bedient sich unter Zugrundelegung beliebiger

Geländeformen einer streng mathematischen Lösung. Das Orientierungsverfahren ergibt sich aus einer Untersuchung über den Einfluß der Koordinaten der Orientierungspunkte auf die Orientierungselemente. Es können Gleichungen entwickelt werden, die einen Zusammenhang zwischen Raumparallaxen und „Ebenenparallaxen“<sup>1)</sup> herstellen. Unter „Ebenenparallaxe“ soll hiebei die auf eine zunächst beliebige horizontale Ebene  $Z = \text{const.}$  reduzierte gemessene Raumparallaxe verstanden werden. Die aus den Raumparallaxen  $p^*$  ermittelten Ebenenparallaxen  $p$  gestatten nun die Orientierungselemente aus bereits bekannten einfachen Formeln abzuleiten, wobei sich bei Annahme einer strengen Gruberschen Punktlage einfache Parallaxenrelationen ergeben. Die Formeln werden umfangreicher, wenn die formale Grubersche Punktlage nicht eingehalten werden kann. Geringe Abweichungen, die den Betrag von etwa  $\pm 5\%$  der Basislänge in der  $X$ -, bzw.  $Y$ -Richtung, entsprechend einem Quadrat von rund 80  $m$  Seitenlänge bei einem Modellmaßstab von 1:10.000 und einer Modellbasis von 80  $mm$ , nicht übersteigen, können bei kleinen  $y$ -Parallaxen von der Größenordnung  $\pm 0.3 \text{ mm}$  im allgemeinen vernachlässigt werden. Man wird daher in den meisten Fällen mit den einfachen Parallaxenrelationen das Auslangen finden.

Im Anschluß an die Ableitungen der für die Praxis notwendigen Gleichungen wird eine Fehlerrechnung durchgeführt, die zeigt, daß das Verfahren einerseits die fehlertheoretisch günstigsten Ergebnisse liefert und daß andererseits die am Wild A 7 möglichen Ablesegenauigkeiten der Punktkoordinaten keine zusätzlichen Genauigkeitsverluste bei der Bestimmung der Orientierungsverbesserungen nach sich ziehen. An mehreren gebirgigen Modellen mit Höhenunterschieden bis zu 600  $m$  wurde das Verfahren praktisch erprobt und lieferte sehr gute Endergebnisse.

Abschließend wurden noch Gleichungen und Nomogramme entwickelt, die es gestatten, auch die Glieder 2. Ordnung, die bei größeren  $y$ -Parallaxen bereits fühlbar werden, zu berücksichtigen. Die erforderlichen Gleichungen lassen sich deshalb relativ rasch und einfach herleiten, weil durch die Reduktion der Raumparallaxen alle Berechnungen für die Ebene durchgeführt werden können. Die oft sehr zeitraubende und viel Praxis erfordernde Vororientierung ist dadurch überflüssig geworden, wodurch eine Zeitersparnis zur Herstellung eines Stereomodelles zu erwarten ist.

## II. Über die Verfahren zur gegenseitigen Orientierung von Senkrechtaufnahmen

Man kann die bis jetzt veröffentlichten zahlreichen Orientierungsverfahren etwa in folgende Hauptgruppen einteilen:

1. die optisch-mechanischen Verfahren,
2. die numerischen und halbnnumerischen Verfahren und
3. die physikalischen Verfahren.

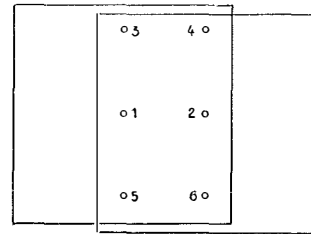
---

<sup>1)</sup> Diese Bezeichnung wurde von o. Prof. Dr. Hauer als Analogon zum Begriff der „Raumparallaxe“ vorgeschlagen.

Die optisch mechanischen Verfahren basieren auf den von O. v. Gruber angegebenen Methoden, der im „Ferienkurs für Photogrammetrie“ [10] und in anderen Veröffentlichungen eine Reihe von Varianten zur Restparallaxenreduktion beschrieben hat. In diese Gruppe gehört auch die Variante von W. K. Bachmann [1], die wegen der Fehlerrechnung, auf der „Beobachtungsfehlertheorie der sekundären Variablen“ beruhend, bemerkenswert erscheint. Obgleich von einer Anzahl von Autoren diese Methoden als die wirtschaftlichsten angesprochen werden, haften ihnen zwei große Nachteile an. Erstens wird die Restparallaxenreduktion je nach der Routine des Operateurs mehr oder weniger willkürlich vorgenommen, wodurch die Fehlerübertragungen auf Grund der übrigbleibenden Restparallaxen beim Folgebildanschluß keinem mathematischen Gesetz gehorchen. Hierzu soll ausdrücklich betont werden, daß die Übertragungsfehler aus anderen als den oben erwähnten Gründen hier nicht zur Diskussion stehen. Zweitens erfordert die optisch-mechanische Orientierung von Modellen, in welchen die verwendeten Orientierungspunkte Höhenunterschiede von etwa  $\frac{1}{4}$  der Flughöhe und darüber aufweisen, große Erfahrung des Operateurs und dauert unter Umständen recht lange.

Die Nachteile der zweiten Gruppe der Orientierungsverfahren sind schon in der Einleitung skizziert worden. Die Verfahren von Hallert und Brandenberger können als Formalverfahren bezeichnet werden, da die Berechnung der Orientierungselemente aus einer formalen, nämlich der Gruberschen Punktlage bei ebenem Gelände erfolgt (Figur 1).

Sie gehören also zur Gruppe jener Verfahren, bei welchen das Gelände idealisiert wird. Diese Verfahren sind daher nur bei ebenen Geländemodellen als mathematisch einwandfrei zu bezeichnen. Bei nicht allzu großer Abweichung des Geländes von der Ebene, werden diese Verfahren noch ganz brauchbare Resultate liefern. Van der Weele [2] sagt, daß das Formalverfahren noch sehr rasch konvergiert, wenn die Gelände-



Figur 1

unebenheiten 15% der Flughöhe nicht übersteigen. Im Übrigen ist dieses von van der Weele für die Praxis sehr gut vorbereitete Verfahren sicherlich eines der günstigsten, wenn die geländemäßigen Voraussetzungen gegeben sind. Das von H. Kasper angegebene Verfahren [3] liefert nur bei ebenem Gelände dieselben Ergebnisse wie das streng numerische Verfahren nach der Methode der kleinsten Quadrate. Es kann daher allgemein nur als Näherungsverfahren bezeichnet werden [4] und gehört wie die beiden folgenden Verfahren zur Gruppe jener Methoden, welche wohl die Geländeformen berücksichtigen, bei der Lösung der Gleichungssysteme aber Näherungslösungen anwenden.

G. Poivilliers [5] löst die Gleichungen durch originelle graphische Methoden. Die fehlertheoretische Untersuchung zeigt aber bei großen Basisverhältnissen von etwa 3:1 aufwärts ungünstige mittlere Restparallaxen [4].

L. Pauwen [6] verwendet fünfzehn Orientierungspunkte, um zwei Luftbilder zu orientieren. Das Verfahren wird a priori als Näherungsverfahren für Weitwinkelobjektive bei Verwendung von Filmen bezeichnet. Durch die große Anzahl von Beobachtungspunkten sollen die zufälligen Schrumpfungsfehler des Filmmaterials kompensiert werden. Obwohl die Punktlage bei Pauwen mit der vom Verfasser in einer früheren Untersuchung [7] geforderten nicht völlig übereinstimmt, ist es doch bemerkenswert, daß fünfzehn Orientierungspunkte in beiden Verfahren als die optimalste Anzahl gefunden wurde. Bei Verwendung der neuesten Feinkornplatten kann man die Anzahl der Orientierungspunkte reduzieren. Abschließend sei in dieser Gruppe noch das Verfahren von J. Krames erwähnt, das eigentlich aus dem in der Einleitung vorgezeichneten Rahmen fällt, da es ein mathematisch strenges Verfahren ist. Drei der ursprünglichen Gleichungen von Krames wurden vom Verfasser auf Grund fehlertheoretischer Untersuchungen berichtigt [4], so daß das Verfahren nach Addition verschiedener Zusatzglieder bei einzelnen Orientierungselementen dem strengen Ausgleichsverfahren entspricht. Krames hat aber seither sein Verfahren öfters abgeändert und verbessert und darüber laufend Berichte verfaßt. Bis Ende Juni 1952 hat Krames etwa 30 Arbeiten über dieses Thema veröffentlicht. Da das Verfahren von Krames mit Ausnahme der Konstruktion, die sich aber leicht vermeiden läßt, streng ist, liegt es nahe, einen Vergleich mit dem in der vorliegenden Untersuchung entwickelten Verfahren anzustellen. Die Vorzüge des auf der Reduktion der  $y$ -Parallaxen beruhenden Verfahrens liegen zunächst in der mathematisch wesentlich einfacheren Herleitung der Endformeln. Weiters sind die Endresultate für sämtliche in der Praxis vorkommenden Modellformen gültig, wobei solche, die mit gefährlichen Flächen zusammenfallen, ausgeschlossen sein sollen.

Durch die Möglichkeit, alle Berechnungen in der Reduktionsebene  $Z = \text{const.}$  durchführen zu können, lassen sich auch einfache Gleichungen für die Orientierungselemente unter Berücksichtigung der Glieder 2. Ordnung angeben, wodurch die Vororientierung praktisch wegfällt. Die dadurch gewonnene Zeitersparnis ist ein weiterer Vorteil des vorliegenden Verfahrens, das auch im Falle einer guten Vororientierung, wodurch in der Endphase nur die Glieder 1. Ordnung zu berücksichtigen sind, rascher als das Verfahren von Krames zum Ergebnis führt.

K. Killian hat in seiner Arbeit „Luftbild und Lotrichtung“ [8] die astronomischen und physikalischen Verfahren behandelt. Man kann sagen, daß sich kaum eines dieser astronomischen oder physikalischen Verfahren in der Praxis durchgesetzt hat, wenngleich die geforderten Voraussetzungen bei dem einen oder anderen Verfahren durch den heutigen Stand der Technik gegeben erscheinen. Bevor diese Möglichkeiten aber in die Tat umgesetzt sind, bleibt nichts anderes übrig, als durch Verfeinerung der klassischen Methoden das Orientierungsproblem zu lösen.

### III. Entwicklung der Reduktionsgleichungen für die beobachteten Raumparallaxen bei Einhaltung der Gruberschen Punktlage

#### 1. Gleichungen für die Orientierungselemente

Die Messung der  $y$ -Parallaxen in sechs Orientierungspunkten ist heute bei fast allen Orientierungsverfahren üblich, wenngleich gelegentlich Vorschläge zu einer Vermehrung der Parallaxenbeobachtungen gemacht wurden. Obwohl hier fehlertheoretisch natürlich günstigere Ergebnisse zu erwarten sind, sinkt doch die Wirtschaftlichkeit solcher Verfahren und gerade dies ist in der praktischen Photogrammetrie ein nicht zu übersehender wichtiger Faktor bei der Beurteilung eines Orientierungsverfahrens.

Im vorliegenden Verfahren steht es frei, die Raumparallaxen in sechs <sup>2)</sup> oder fünf Punkten zu messen. Zur Berechnung der Orientierungselemente sollen vorerst nur die notwendigen fünf Messungen verwendet werden.

Die für den Wild-Autographen A 5 und A 7 gültigen Parallaxengleichungen lauten für die Zuorientierung des linken Bildes zum festen rechten (I. Fall), wenn  $p^*$  die im Modell gemessene Parallaxe bedeutet  $db y'$ ,  $db z'$ ,  $d\varphi'$ ,  $dx'$ ,  $d\omega'$  die Orientierungsbewegungen der linken Kammer und analog  $db y''$ ,  $db z''$ ,  $d\varphi''$ ,  $dx''$ ,  $d\omega''$  jene der rechten Kammer sind, wobei die Raumparallaxen  $p^*$  mit der linken, bzw. mit der rechten  $by$ -Schraube gemessen werden,

$$(p^*)' = db y' + \frac{Y}{Z} db z' - Z \left( 1 + \frac{Y^2}{Z^2} \right) d\omega' - \frac{XY}{Z} d\varphi' - X \cdot dx', \quad (1a)$$

und für die Zuorientierung des rechten Bildes zum festen linken (II. Fall)

$$(p^*)'' = db y'' + \frac{Y}{Z} db z'' - Z \left( 1 + \frac{Y^2}{Z^2} \right) d\omega'' - \frac{(B-X)Y}{Z} d\varphi'' + (B-X) dx''. \quad (1b)$$

Stellt man für die sechs Schemapunkte die entsprechenden Parallaxengleichungen für die Ebene auf, so erhält man für den ersten Fall, wenn mit  $Z$  der Abstand der Ebene ( $E$ ) vom Objektivmittelpunkt bezeichnet wird (Fig. 1a),

$$\begin{aligned} p_1 &= db y' && - Z d\omega', \\ p_2 &= db y' && - Z d\omega' \quad - B dx', \\ p_3 &= db y' - \frac{K}{Z} db z' && - Z \left( 1 + \frac{K^2}{Z^2} \right) d\omega', \\ p_4 &= db y' - \frac{K}{Z} db z' + \frac{KB}{Z} d\varphi' && - Z \left( 1 + \frac{K^2}{Z^2} \right) d\omega' - B dx', \end{aligned}$$

<sup>2)</sup> Die Messung in sechs Punkten ist zwar fehlertheoretisch nicht zu begründen, da die einzige überschüssige Beobachtung praktisch keine Genauigkeitssteigerung bringt; durch die Entwicklung einer allgemeinen Bedingungsgleichung ist aber eine nicht zu unterschätzende Kontrollmöglichkeit gegeben.

$$p_5 = db y' + \frac{K}{Z} db z' - Z \left( 1 + \frac{K^2}{Z^2} \right) d\omega',$$

$$\left( p_6 = db y' + \frac{K}{Z} db z' - \frac{KB}{Z} d\varphi' - Z \left( 1 + \frac{K^2}{Z^2} \right) d\omega' - B dx' \right),$$

wobei das in Fig. 1b dargestellte Koordinatensystem gilt.

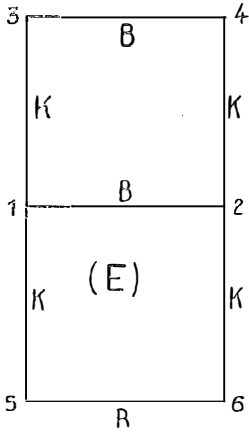


Fig. 1 a

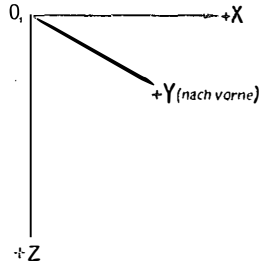


Fig. 1 b

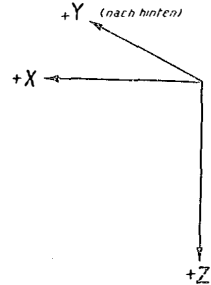


Fig. 1 c

Bei Auflösung des Gleichungssystems der ersten 5 Gleichungen ergibt sich für

$$\left. \begin{aligned} db y' &= Z d\omega + p_1, \\ db z' &= -\frac{Z}{2K} (p_3 - p_5), \\ d\varphi' &= \frac{Z}{KB} (p_1 - p_2 - p_3 + p_4), \end{aligned} \right\} \begin{aligned} dx' &= \frac{1}{B} (p_1 - p_2), \\ d\omega' &= \frac{Z}{2K^2} (2p_1 - p_3 - p_5), \end{aligned} \quad (2)$$

Die analogen Gleichungen für den II. Fall lauten

$$\left. \begin{aligned} db y'' &= Z \cdot d\omega + p_2, \\ db z'' &= -\frac{Z}{K} \left( p_1 - p_2 + p_4 - \frac{p_3 + p_5}{2} \right), \\ d\varphi'' &= \frac{Z}{BK} (-p_1 + p_2 + p_3 - p_4), \\ dx'' &= \frac{1}{B} (p_1 - p_2), \\ d\omega'' &= \frac{Z}{2K^2} (2p_1 - p_3 - p_5). \end{aligned} \right\} (3)$$

Diese Formeln gelten, wenn die Basis „innen“ eingedreht wird.

In den Geräten A 5 und A 7 ist auch noch der Fall der „außen“ eingedrehten Basis zu beachten. Für diesen Fall hat man in den obigen Formeln die Vorzeichen für  $B$  und  $K$  zu ändern. Es entsteht dadurch wieder ein „Rechtssystem“ (Fig. 1c), und es ändern sich dann die Vorzeichen von  $dx'$  und  $dx''$  sowie von  $dbz'$  und  $dbz''$ , die anderen Elemente bleiben gleich.

(Fortsetzung folgt)

15. Bestimmung des kürzesten Abstandes zweier sich kreuzender Geraden. Österr. Z. f. Verm. 1932.
16. Über die Parallaxe bei Spiegelablesungen. Berg- u. Hüttenm. Monatsh. 1932.
17. Absteckung eines Kreisbogens samt Übergangskurven aus deren zwei Tangenten und einem Punkt des Kreises. Öst. Z. f. Verm. 1933.
18. Ein einlotbares Dreieckspunktzeichen für Kleintriangulierungen. Österr. Z. f. Verm. 1933.
19. Ein Hilfsinstrument für geodätische Telemetrie. Österr. Z. f. Verm. 1934.
20. Die Verwendung eines Drehkeilpaares zum Waagrechtstellen von Ebenen oder Lotrechtstellen von Geraden. Österr. Z. f. Verm. 1937.
21. Das Objektivprisma als Hilfsmittel für Steilzielungen. Berg- und Hüttenm. Monatsh. 1938.
22. Doppelpunkteinschaltung mit Seitenzwang. Berg- und Hüttenm. Monatsh. 1938.
23. Ein Vorschlag zur Normung der Höhenkreise. Berg- und Hüttenm. Monatsh. 1939.
24. Ein Beitrag zur Fehlerfortpflanzung im Schachtschlußdreieck. Berg- und Hüttenm. Monatsh. 1939.
25. Das räumliche Rückwärtseinschneiden als Markscheideraufgabe. Berg- und Hüttenm. Monatsh. 1939.
26. Die Ausgleicheung eines Kranzes. Berg- und Hüttenm. Monatsh. 1939.
27. Zwei Merkmale der Steilschachtvermessung. Berg- und Hüttenm. Monatsh. 1939.

## Die funktionellen Zusammenhänge von $\gamma$ -Parallaxengröße und Beobachtungsort in einem Stereomodell; ein neues numerisches Orientierungsverfahren\*)

Von H. S c h m i d, Wien

(1. Fortsetzung)

### *2. Reduktion der Raumparallaxen auf eine Ebene $Z = \text{const.}$*

Nimmt man in einem orientierten, also parallaxenfreien Modell Drehungen an den fünf Orientierungsschrauben  $db_y$ ,  $db_z$ ,  $d\varphi$ ,  $dx$ ,  $d\omega$  vor, so entstehen

---

\*) Um Mißverständnissen über Ausführungen im Abschnitt II dieses Artikels vorzubeugen, betont der Unterzeichnete, daß er nur gewisse Modifikationen der von Prof. Dr. Krames im Jahre 1949 für den Fall „geometrischer“ Parallaxen abgeleiteten Formeln angegeben hat, wonach drei davon — und zwar nur für den Fall eines streng ebenen Geländes — bei vorliegenden „allgemeinen“ Parallaxen die wahrscheinlichsten Werte der betreffenden Orientierungselemente ergaben. Diese Modifikationen sind anfangs 1951 bei Anwendung der „Fehleranalyse“ des Unterzeichneten auf das Verfahren von Krames zustande gekommen, und zwar anschließend an die Mitteilungen von Krames über seine im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen in Wien ausgeführten Instrumentenversuche. Weitere Einzelheiten sind in der Veröffentlichung von Prof. Krames: „Erweiterung des graphischen Einpassens von Luftaufnahmen auf den Fall eines vorliegenden Widerspruches“ in der Schweiz. Z. f. V. u. K., Jahrg. 1951, S. 293 ff. nachzulesen. Insbesondere hat Krames in der Fußnote 6 auf S. 299 hervorgehoben, daß er den vom Unterzeichneten modifizierten Formeln für ebenes Gelände eine Anregung zur Lösung des allgemeinen Problems entnehmen konnte. H. Schmid



$y$ -Parallaxen. Denkt man sich das Modell durchsichtig, so entstehen außer an der Oberfläche auch im Innern des Modelles  $y$ -Parallaxen, die man messen kann. Sollen nun wieder die Parallaxen zum Verschwinden gebracht, das Modell also relativ orientiert werden, so müssen sich dieselben Werte für die Orientierungselemente ergeben, wenn man einerseits die Raumparallaxen an der Modelloberfläche oder andererseits irgendwelche andere  $y$ -Parallaxen im Innern des Modelles zur Berechnung der Orientierungselemente verwendet.

Um für die Drehungen  $d\varphi$ ,  $dx$ ,  $d\omega$ ,  $db y$ ,  $db z$  einfache Endformeln zu erhalten, kann man diejenigen reduzierten  $y$ -Parallaxen  $p_n$ , die sich auf einer Ebene  $Z = \text{const.}$  ergeben, berechnen. Man hat also eine Relation zwischen den an der Geländeoberfläche gemessenen Parallaxen  $p^*$  und den reduzierten Ebenenparallaxen  $p$  herzustellen.

Für die Raumparallaxen kann man nach Gleichung (1 b) die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} p_1^* &= && db y + B dx - (Z + \Delta Z_1) d\omega, \\ p_2^* &= && db y - (Z + \Delta Z_2) d\omega, \\ p_3^* &= -\frac{K}{Z + \Delta Z_3} \cdot db z + \frac{BK}{Z + \Delta Z_3} d\varphi + db y + B dx - (Z + \Delta Z_3) \left( 1 + \frac{K^2}{(Z + \Delta Z_3)^2} \right) \cdot d\omega, \\ p_4^* &= -\frac{K}{Z + \Delta Z_4} \cdot db z + db y - (Z + \Delta Z_4) \left( 1 + \frac{K^2}{(Z + \Delta Z_4)^2} \right) \cdot d\omega, \\ p_5^* &= +\frac{K}{Z + \Delta Z_5} \cdot db z - \frac{BK}{Z + \Delta Z_5} d\varphi + db y + B dx - (Z + \Delta Z_5) \left( 1 + \frac{K^2}{(Z + \Delta Z_5)^2} \right) \cdot d\omega, \\ (p_6^* &= +\frac{K}{Z + \Delta Z_6} \cdot db z + db y - (Z + \Delta Z_6) \left( 1 + \frac{K^2}{(Z + \Delta Z_6)^2} \right) \cdot d\omega) \end{aligned} \right\} (4)$$

herleiten, in denen  $\Delta Z_n = Z_n - Z$ , bzw.  $Z_n = Z + \Delta Z_n$  bedeutet, wenn mit  $Z_n$  die Höhe des Modellpunktes und mit  $Z$  die Höhe der Bezugsebene bezeichnet wird, wobei  $Z$  positiv nach abwärts (Fig. 1 b und 1 c) zu zählen ist.

Setzt man nun für die Orientierungselemente die Werte der Gleichungsgruppe (3) ein, so erhält man die Raumparallaxen in Funktion der Ebenenparallaxen. Mit Einführung von

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{Z^2}{K^2} \quad \text{und} \quad \zeta_n = \frac{\Delta Z_n}{Z}$$

ergeben sich die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} p_1^* &= p_1 (1 - 2 \varepsilon \zeta_1) + p_3 (\varepsilon \zeta_1) + p_5 (\varepsilon \zeta_1), \\ p_2^* &= -p_1 (2 \varepsilon \zeta_2) + p_2 + p_3 (\varepsilon \zeta_2) + p_5 (\varepsilon \zeta_2), \\ p_3^* &= p_1 \left( -2 \varepsilon \zeta_3 + \frac{\zeta_3}{1 + \zeta_3} \right) + p_3 \left( \varepsilon \zeta_3 + \frac{1}{1 + \zeta_3} \right) + p_5 (\varepsilon \zeta_3), \\ p_4^* &= -p_1 (2 \varepsilon \zeta_4) + p_2 \frac{\zeta_4}{1 + \zeta_4} + p_3 (\varepsilon \zeta_4) + p_4 \frac{1}{1 + \zeta_4} + p_5 (\varepsilon \zeta_4), \\ p_5^* &= p_1 \left( -2 \varepsilon \zeta_5 + \frac{\zeta_5}{1 + \zeta_5} \right) + p_3 (\varepsilon \zeta_5) + p_5 \left( \varepsilon \zeta_5 + \frac{1}{1 + \zeta_5} \right). \end{aligned} \right\} (5)$$

Dieselben Werte erhält man auch, wenn man in die Gleichungen für die Raumparallaxen entsprechend Gleichung (1 a) die Werte der Gleichungsgruppe (2) einsetzt. Die Relationen zwischen den Raumparallaxen und den Ebenenparallaxen sind also für den I. und II. Fall gleich. Wie sich leicht zeigen läßt, gelten dieselben Beziehungen auch für die analogen Fälle bei „außen“-eingedrehter Basis.

Da die Raumparallaxen gemessen werden und die Ebenenparallaxen zu berechnen sind, hat man nun das folgende Gleichungssystem dergestalt umzuformen, daß die Ebenenparallaxen  $p$  in Funktion der Raumparallaxen  $p^*$  dargestellt werden. Die Gleichungsgruppe (5) wird in

$$\left. \begin{array}{l} p_1(I) \quad p_2(II) \quad p_3(III) \quad p_4(IV) \quad p_5(V) \\ p_1^*(1 + \zeta_1) = (1 - 2 \varepsilon \zeta_1) (1 + \zeta_1) \quad \cdot \quad \varepsilon \zeta_1 (1 + \zeta_1) \quad \cdot \quad \varepsilon \zeta_1 (1 + \zeta_1), \\ p_2^*(1 + \zeta_2) = -2 \varepsilon \zeta_2 (1 + \zeta_2) \quad 1 + \zeta_2 \quad \varepsilon \zeta_2 (1 + \zeta_2) \quad \cdot \quad \varepsilon \zeta_2 (1 + \zeta_2), \\ p_3^*(1 + \zeta_3) = \zeta_3 - 2 \varepsilon \zeta_3 (1 + \zeta_3) \quad \cdot \quad 1 + \varepsilon \zeta_3 (1 + \zeta_3) \quad \cdot \quad \varepsilon \zeta_3 (1 + \zeta_3), \\ p_4^*(1 + \zeta_4) = -2 \varepsilon \zeta_4 (1 + \zeta_4) \quad \zeta_4 \quad \varepsilon \zeta_4 (1 + \zeta_4) \quad 1 \quad \varepsilon \zeta_4 (1 + \zeta_4), \\ p_5^*(1 + \zeta_5) = \zeta_5 - 2 \varepsilon \zeta_5 (1 + \zeta_5) \quad \cdot \quad \varepsilon \zeta_5 (1 + \zeta_5) \quad \cdot \quad 1 + \varepsilon \zeta_5 (1 + \zeta_5) \end{array} \right\} (6)$$

umgeformt. Ihre Koeffizientendeterminante läßt sich entsprechend der am Kopf jeder Spalte angedeuteten Rechenoperationen in

$$\left. \begin{array}{ccccc} I + 2V & II & III - V & IV & V \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 + \zeta_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon \zeta_1 (1 + \zeta_1) \\ \cdot & 1 + \zeta_2 & \cdot & \cdot & \varepsilon \zeta_2 (1 + \zeta_2) \\ \zeta_3 & \cdot & 1 & \cdot & \varepsilon \zeta_3 (1 + \zeta_3) \\ \cdot & \zeta_4 & \cdot & 1 & \varepsilon \zeta_4 (1 + \zeta_4) \\ 2 + \zeta_5 & \cdot & -1 & \cdot & \varepsilon \zeta_5 (1 + \zeta_5) \end{array} \right| & \end{array} \right\} (6a)$$

verwandeln. Die Auflösung dieses Gleichungssystems erfolgt mit Hilfe der Kramer'schen Regeln. Darnach ist bekanntlich

$$p_1 = D_1 : N, \quad (7)$$

wenn mit  $D_1$  jene Determinante bezeichnet wird, in der die erste Spalte der Koeffizientendeterminante durch die Raumparallaxenspalte

$$\left. \begin{array}{l} p_1^* (1 + \zeta_1) \\ p_2^* (1 + \zeta_2) \\ p_3^* (1 + \zeta_3) \\ p_4^* (1 + \zeta_4) \\ p_5^* (1 + \zeta_5) \end{array} \right\} = Sp^* \quad (7a)$$

ersetzt wird. Mit  $N$  wird die Koeffizienten- oder Nennerdeterminante bezeichnet. Analog lassen sich sämtliche Ebenenparallaxen  $p_n$  berechnen; man hat nur jeweils die Spalte der Koeffizientendeterminante durch die Raumparallaxenspalte  $Sp^*$  zu ersetzen, über welcher die zu berechnende Ebenenparallaxe  $p_n$  steht.

Bevor mit der Lösung des Gleichungssystems begonnen wird, sollen noch die vereinfachenden Bezeichnungen

$$1 + \zeta_n = Z_n'; \quad \varepsilon \zeta_n Z_n' = a_n \quad \text{und} \quad 1 + a_n = A_n \quad \text{gewählt werden.}$$

Die ausgewertete Koeffizientendeterminante, im Folgenden auch Nennerdeterminante genannt, ergibt sodann

$$N = Z_1' \cdot Z_2' (1 + a_3 + a_5) - a_1 Z_2' (2 + \zeta_3 + \zeta_5). \quad (8)$$

Über die Höhenlage der Bezugsebene ist bis jetzt noch keine Festsetzung getroffen worden; dies soll nun geschehen. Betrachtet man die Gleichung (8) als Kriterium für die Parallaxenrelation (7), so sieht man, daß für  $\zeta_1 = 0$  der Ausdruck mit

$$N = Z_2' (1 + a_3 + a_5)$$

am einfachsten wird. Man legt also die Bezugsebene am besten durch den Raumpunkt 1. Die Zählerdeterminante  $D_1$  für die Ebenenparallaxe  $p_1$  hat dann die Form

$$\begin{vmatrix} p_1^* & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_2^* Z_2' & Z_2' & \cdot & \cdot & a_2 \\ p_3^* Z_3' & \cdot & 1 & \cdot & a_3 \\ p_4^* Z_4' & \zeta_4 & \cdot & 1 & a_4 \\ p_5^* Z_5' & \cdot & -1 & \cdot & A_5 \end{vmatrix} = D_1 \quad (9)$$

Bei der Aufstellung der Zählerdeterminanten hat man vom Gleichungssystem (6) auszugehen; erst nach Einführung der Raumparallaxenspalte kann man Vereinfachungen nach den Determinantenregeln vornehmen.

Die Auswertung der Determinante (9) ergibt:

$$D_1 = p_1^* \cdot Z_2' (1 + a_3 + a_5).$$

Für die Ebenenparallaxe  $p_1$  erhält man entsprechend der Gleichung (7)

$$p_1 = p_1^*; \quad (10a)$$

dieses Ergebnis war zu erwarten, da die Bezugsebene  $Z = \text{const.}$  durch den Punkt 1 geht. Für  $p_2$  ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 1 & p_1^* & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & p_2^* Z_2' & \cdot & \cdot & a_2 \\ \zeta_3 & p_3^* Z_3' & 1 & \cdot & a_3 \\ \cdot & p_4^* Z_4' & \cdot & 1 & a_4 \\ 2 + \zeta_5 & p_5^* Z_5' & -1 & \cdot & A_5 \end{vmatrix} = D_2 \quad (9a)$$

d. i.

$D_2 = p_1^* [a_2 (2 + \zeta_3 + \zeta_5)] + p_2^* Z_2' (1 + a_3 + a_5) - a_2 (p_5^* Z_5' + p_3^* Z_3')$ ,  
und weiters nach Gleichung (7)

$$p_2 = p_2^* + (p_1^* - p_3^*) \frac{a_2 Z_3'}{N} + (p_1^* - p_5^*) \frac{a_2 Z_5'}{N}. \quad (10b)$$

Analoge Berechnungen führen schließlich zu den restlichen Parallaxenrelationen mit

$$p_3 = p_3^* + (p_1^* - p_3^*) \frac{a_3 - \zeta_3 A_5}{N_{35}} + (p_1^* - p_5^*) \frac{a_3 Z_5'}{N_{35}}, \quad (10c)$$

$$p_4 = p_4^* + (p_1^* - p_3^*) \frac{a_4 Z_3' \left(1 - \frac{\zeta_2}{Z_4'}\right)}{N_{35}} + (p_1^* - p_5^*) \frac{a_4 Z_5' \left(1 - \frac{\zeta_2}{Z_4'}\right)}{N_{35}} - (p_2^* - p_4^*) \cdot \xi_4, \quad (10d)$$

$$p_5 = p_5^* + (p_1^* - p_3^*) \cdot \frac{a_5 Z_3'}{N_{35}} + (p_1^* - p_5^*) \frac{a_5 - \zeta_5 A_3}{N_{35}}, \quad (10e)$$

worin  $N_{35} = 1 + a_3 + a_5$  ist.

Damit sind alle Parallaxenrelationen für die Gruberschen Punkte eins bis fünf gefunden<sup>3)</sup>. Um die umständliche Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen bei sechs beobachteten  $y$ -Parallaxen zu umgehen, wird nun eine allgemein gültige Bedingungsgleichung abgeleitet, die eine Ausgleichung der sechs Parallaxenbeobachtungen nach bedingten Beobachtungen ermöglicht. Es ist dann gleichgültig, welchen der sechs ausgeglichenen Parallaxenwerte man für die weitere Rechnung wegläßt.

Die Gleichungen (10) gelten bei Verwendung der ausgeglichenen Parallaxen eins bis fünf. Dieses Verfahren ist einfacher als die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen.

### 3. Die Widerspruchsgleichung bei Messung der $y$ -Parallaxen in den sechs Gruberschen Punkten

Bekanntlich erhält man bei Verwendung von sechs Orientierungspunkten für ebenes Gelände für die Orientierungselemente die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} dby &= Z \cdot d\omega - \frac{B}{2} dz + \frac{1}{2} (p_1 + p_2), \\ dbz &= + \frac{Z}{2K} (p_6 - p_4), \\ d\varphi &= \frac{Z}{2BK} (p_3 - p_4 - p_5 + p_6), \\ dz &= \frac{1}{3B} (p_1 + p_3 + p_5 - p_2 - p_4 - p_6), \\ d\omega &= \frac{Z}{4K^2} (2p_1 + 2p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6); \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ihre Eintragung in die Gleichungsgruppe (4) führt zu den folgenden Parallaxenrelationen für die sechs Schemapunkte, wobei die Bezugsebene ( $E$ ) wieder durch den Punkt 1 gelegt wird.

<sup>3)</sup> C. Cladas, Athen, hat in den „Allgemeinen Vermessungsnachrichten“ 1953, Heft 3, einen Vorschlag für die Parallaxenreduktion veröffentlicht. Die dort entwickelte Reduktionsformel ist unrichtig; es erübrigt sich auf Grund der bisher gebrachten Entwicklungen, weiter auf diese Arbeit einzugehen.

	$p_1$ (I)	$p_2$ (II)	$p_3$ (III)
$p_1^* =$	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{6}$
$p_2^* =$	$+\frac{1}{3} - \varepsilon\zeta_2$	$+\frac{2}{3} - \varepsilon\zeta_2$	$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_2$
$p_3^* =$	$+\frac{2}{3} - \varepsilon\zeta_3 - \frac{1}{2Z_3'}$	$+\frac{1}{3} - \varepsilon\zeta_3 - \frac{1}{2Z_3'}$	$+\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_3 + \frac{3}{4Z_3'}$
$p_4^* =$	$+\frac{1}{3} - \varepsilon\zeta_4 - \frac{1}{2Z_4'}$	$+\frac{2}{3} - \varepsilon\zeta_4 - \frac{1}{2Z_4'}$	$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_4 + \frac{1}{4Z_4'}$
$p_5^* =$	$+\frac{2}{3} - \varepsilon\zeta_5 - \frac{1}{2Z_5'}$	$+\frac{1}{3} - \varepsilon\zeta_5 - \frac{1}{2Z_5'}$	$+\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_5 - \frac{1}{4Z_5'}$
$p_6^* =$	$+\frac{1}{3} - \varepsilon\zeta_6 - \frac{1}{2Z_6'}$	$+\frac{2}{3} - \varepsilon\zeta_6 - \frac{1}{2Z_6'}$	$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_6 + \frac{1}{4Z_6'}$
			(12)
	$p_4$ (IV)	$p_5$ (V)	$p_6$ (VI)
	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$ ,
	$+\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_2$	$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_2$	$+\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_2$ ,
	$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_3 + \frac{1}{4Z_3'}$	$+\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_3 - \frac{1}{4Z_3'}$	$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_3 + \frac{1}{4Z_3'}$ ,
	$+\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_4 + \frac{3}{4Z_4'}$	$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_4 + \frac{1}{4Z_4'}$	$+\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_4 - \frac{1}{4Z_4'}$ ,
	$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_5 + \frac{1}{4Z_5'}$	$+\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_5 + \frac{3}{4Z_5'}$	$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_5 + \frac{1}{4Z_5'}$ ,
	$+\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_6 - \frac{1}{4Z_6'}$	$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_6 + \frac{1}{4Z_6'}$	$+\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\varepsilon\zeta_6 + \frac{3}{4Z_6'}$ ,

Subtrahiert man nun in der Koeffizientendeterminante die II. Spalte von der I. Spalte und die halbe Summe der IV. und VI. Spalte von der halben Summe der III. und V. Spalte, so erhält man zwei gleiche Spalten. Dies bedeutet, daß die Determinante Null wird. Das Gleichungssystem ist also unlösbar, da entweder ein Widerspruch, oder zwischen den Gleichungen eine Abhängigkeit besteht. Da durch die sechs Parallaxenmessungen eine Beobachtung überschüssig ist, muß eine Bedingungsgleichung zwischen den beobachteten Parallaxen  $p^*$  bestehen.

Nach den Regeln der Determinantenrechnung erhält man diese Bedingungsgleichung durch Auflösung einer Determinante, bei der eine der beiden gleichen Spalten durch die Raumparallaxenspalte ersetzt wird. Führt man dies durch und stürzt man die Determinante, so gelangt man nach einigen Vereinfachungen schließlich zu

$$\begin{vmatrix} p_1^* & p_2^* - p_1^* & p_3^* - p_1^* & p_4^* - p_1^* & p_5^* - p_1^* & p_6^* - p_1^* \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \zeta_2 & \frac{A_3}{Z_3'} & \frac{A_4}{Z_4'} & \varepsilon \zeta_5 & \varepsilon \zeta_6 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2Z_3'} & +\frac{1}{2Z_4'} & \frac{1}{2Z_5'} & -\frac{1}{2Z_6'} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{Z_4'} & 0 & \frac{1_6}{Z_6'} \\ 1 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad (13a)$$

und damit zur impliziten Form der Bedingungsgleichung. Ihre Auflösung ergibt

$$p_1^* \frac{Z_3' + Z_5'}{N_{35}} - p_2^* \frac{Z_4' + Z_6'}{N_{46}'} - p_3^* \frac{Z_3'}{N_{35}} + p_4^* \frac{Z_4'}{N_{46}'} - p_5^* \frac{Z_5'}{N_{35}} + p_6^* \frac{Z_6'}{N_{46}'} = 0, \quad (13)$$

wenn für

$$N_{46}' = 1 + a_4 + a_6 - a_2 \frac{Z_4' + Z_6'}{Z_2'} = 1 + a_4 \left(1 - \frac{\zeta_2}{\zeta_4}\right) + a_6 \left(1 - \frac{\zeta_2}{\zeta_6}\right)$$

gesetzt wird. Für die Ebene ( $\zeta_n = 0$ ,  $Z_n' = 1$ ,  $N_{35} = N_{46}' = 1$ ) folgt die längst bekannte, doch bei Orientierungsverfahren nie angewendete Bedingungsgleichung

$$2 p_1^* - 2 p_2^* - p_3^* + p_4^* - p_5^* + p_6^* = 0, \quad (13b)$$

wobei in diesem Fall  $p_n^*$  ident mit  $p_n$  ist.

Gleicht man nun vor Berechnung der Unbekannten die gemessenen Parallaxen  $p^*$  mit Hilfe der Bedingungsgleichung (13) aus, so erhält man für die Orientierungselemente, wenn man sie nun aus fünf der sechs ausgeglichenen  $y$ -Parallaxen berechnet, dieselben Werte, wie aus einer Ermittlung mit sechs beobachteten  $y$ -Parallaxen nach vermittelnden Beobachtungen. Es ist wohl ohne Beweis einzusehen, daß für beliebiges Gelände die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen rascher zum Ziele führt, als die schwerfällige Lösung von fünf Normalgleichungen, deren Koeffizientenberechnung bei gebirgigem Gelände sehr umständlich wird. Für ebenes Gelände gehen die Gleichungen (2), bzw. (3) mittels (13 b) in die Gleichungen (11) über. Es ist damit gezeigt, daß es bei diesem Verfahren ohne weiteres möglich ist, bei konservativer Parallaxenmessung in sechs Punkten alle Messungen zu verwenden, obwohl die Parallaxenrelationen und die Gleichungen für die Orientierungselemente nur für fünf Punkte zu entwickeln waren. Die durch die Ausgleichung gewonnenen Verbesserungen der gemessenen Parallaxen  $p^*$  geben ein Bild von der Güte der Messungen, bzw. des Bildmaterials. Die praktischen Versuche am Wild-Gerät A 7 haben Verbesserungen in der Größenordnung von  $\pm 0.01 \text{ mm}$  ergeben.; man sieht daraus, daß sowohl das Bildmaterial als auch die Parallaxenmessungen sehr gut waren.

An einem praktischen Beispiel wird im VI. Abschnitt der Berechnungsgang gezeigt werden.

#### IV. Entwicklung der Reduktionsgleichungen für die beobachteten Raumparallaxen bei Abweichung von der Gruberschen Punktlage

##### 1. Ableitung der Parallaxenrelationen

Obwohl die bisher entwickelten Formeln für die meisten praktisch vorkommenden Modelle ausreichen, sollen nun Gleichungen hergeleitet werden, für welche die Grubersche Punktlage nicht Voraussetzung ist.

Unter der Annahme, daß die Orientierungspunkte um die Beträge  $\Delta X_n$  und  $\Delta Y_n$  von der Schemapunktlage so abweichen, daß

$$\Delta Y = Y_{\text{ist}} - Y_{\text{soll}} \text{ und } \Delta X = X_{\text{ist}} - X_{\text{soll}} \text{ beträgt,}$$

lautet die allgemeine Parallaxengleichung

$$\begin{aligned} p_n^* = & dby'' + \frac{Y_n + \Delta Y_n}{Z_n + \Delta Z_n} \cdot dbz'' - (Z_n + \Delta Z_n) \left[ 1 + \left( \frac{Y_n + \Delta Y_n}{Z_n + \Delta Z_n} \right)^2 \right] \cdot d\omega'' - \\ & - \frac{[B - (X_n + \Delta X_n)] (Y_n + \Delta Y_n)}{Z_n + \Delta Z_n} \cdot d\varphi'' + [B - (X_n + \Delta X_n)] \cdot dx''. \end{aligned} \quad (14)$$

Führt man nun die analogen Berechnungen wie im III. Abschnitt durch, d. h. setzt man die Werte der Gleichungsgruppe (3) für die Orientierungselemente in die Gleichungen (14) für die Raumparallaxen ein, so gelangt man schließlich zu den Parallaxenrelationen

$$p_1 \text{ (I) .}$$

$$\begin{aligned} p_1^* &= 1 - \beta_1 - \gamma_1^2 - \beta_1 \gamma_1 \\ p_2^* Z_2' &= -\beta_2 Z_2' - \gamma_2 - \gamma_2^2 - 2a_2 - \beta_2 \gamma_2 \\ p_3^* Z_3' &= -\beta_3 \zeta_3 + 2\gamma_3 - \gamma_3^2 - 2a_3 - \beta_3 \gamma_3 + \zeta_3 \\ p_4^* Z_4' &= -\beta_4 \zeta_4 + \gamma_4 - \gamma_4^2 - 2a_4 - \beta_4 \gamma_4 \\ p_5^* Z_5' &= -\beta_5 (2 + \zeta_5) - 2\gamma_5 - \gamma_5^2 - 2a_5 - \beta_5 \gamma_5 + \zeta_5 \end{aligned}$$

$$p_2 \text{ (II) .}$$

$$\begin{aligned} &+ \beta_1 + \beta_1 \gamma_1 \\ &+ Z_2' + \beta_2 Z_2' + \gamma_2 + \beta_2 \gamma_2 \\ &+ \beta_3 \zeta_3 + \beta_3 \gamma_3 \\ &+ \beta_4 \zeta_4 + \gamma_4 + \beta_4 \gamma_4 + \zeta_4 \\ &+ \beta_5 (2 + \zeta_5) + \beta_5 \gamma_5 \end{aligned}$$

$$p_3 \text{ (III) .}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \gamma_1 + \frac{1}{2} \gamma_1^2 + \beta_1 \gamma_1 \\ & + \frac{1}{2} \gamma_2 + \frac{1}{2} \gamma_2^2 + a_2 + \beta_2 \gamma_2 \\ & 1 - \beta_3 - \frac{3}{2} \gamma_3 + \frac{1}{2} \gamma_3^2 + a_3 + \beta_3 \gamma_3 \\ & - \beta_4 - \frac{1}{2} \gamma_4 + \frac{1}{2} \gamma_4^2 + a_4 + \beta_4 \gamma_4 \\ & + \beta_5 + \frac{1}{2} \gamma_5 + \frac{1}{2} \gamma_5^2 + a_5 + \beta_5 \gamma_5 \end{aligned}$$

(15)

$$\begin{array}{r}
 p_4 \text{ (IV) .} \\
 -\beta_1 \gamma_1 \\
 -\gamma_2 - \beta_2 \gamma_2 \\
 +\beta_3 - \beta_3 \gamma_3 \\
 1 + \beta_4 - \gamma_4 - \beta_4 \gamma_4 \\
 -\beta_5 - \beta_5 \gamma_5
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 p_5 \text{ (V) .} \\
 +\frac{1}{2} \gamma_1 + \frac{1}{2} \gamma_1^2, \\
 +\frac{1}{2} \gamma_2 + \frac{1}{2} \gamma_2^2 + a_2, \\
 -\frac{1}{2} \gamma_3 + \frac{1}{2} \gamma_3^2 + a_3, \\
 -\frac{1}{2} \gamma_4 + \frac{1}{2} \gamma_4^2 + a_4, \\
 1 + \frac{3}{2} \gamma_5 + \frac{1}{2} \gamma_5^2 + a_5;
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} p_4 \text{ (IV) .} \\ p_5 \text{ (V) .} \end{array}} \right\} (15)$$

sie sind streng, da noch keinerlei Reihenentwicklungen vorgenommen worden sind. Die Koeffizientendeterminante läßt sich nun für die Auswertung in die Form

$$\begin{array}{r}
 \text{I + II + III} \\
 \text{+ IV + V} \qquad \text{II + IV} \qquad \text{III - V + IV} \qquad \text{IV} \qquad \text{V}
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 + 1 & + \beta_1 & -\gamma_1 & -\beta_1 \gamma_1 & \frac{1}{2} \gamma_1 (1 + \gamma_1) \\
 + Z_2' & + Z_2' (1 + \beta_2) & -\gamma_2 & -\gamma_2 (1 + \beta_2) & \frac{1}{2} \gamma_2 (1 + \gamma_2) + a_2 \\
 + Z_3' & + \beta_3 Z_3' & + 1 - \gamma_3 & \beta_3 (1 - \gamma_3) & -\frac{1}{2} \gamma_3 (1 - \gamma_3) + a_3 \\
 + Z_4' & + Z_4' (1 + \beta_4) & + 1 - \gamma_4 & (1 + \beta_4) (1 - \gamma_4) & -\frac{1}{2} \gamma_4 (1 - \gamma_4) + a_4 \\
 + Z_5' & + \beta_5 Z_5' & -1 - \gamma_5 & -\beta_5 (1 + \gamma_5) & +\frac{1}{2} \gamma_5 (3 + \gamma_5) + A_5
 \end{array} \right] (15 a)$$

bringen. Ihre Auflösung bietet keinerlei Schwierigkeiten. Da aber im allgemeinen die Abweichungen von der Gruberschen Punktlage im Vergleich zur Basis und zur  $Y$ -Koordinate klein sein werden, sollen bei der Auswertung nur die linearen Glieder von  $\beta$  und  $\gamma$  Berücksichtigung finden.

Zur Messung der  $y$ -Parallaxen stellt man die vorgegebenen Maschinenkoordinaten der Gruberschen Punkte ein. Nun kann es vorkommen, daß gerade in einem oder auch mehreren Punkten die  $y$ -Parallaxen sehr schwer zu messen sind. Die Gründe hierfür sind mannigfaltig: die Punkte können z. B. in ein Waldgelände, auf einen sehr steilen Abhang oder auf ein im Schlagschatten liegendes Flächenstück fallen. Fast immer findet man aber in unmittelbarer Umgebung Geländepunkte, in denen sich die Parallaxen wesentlich besser messen lassen. Solange diese Abweichungen kleiner als ca. 4 mm bei einer Basis von ungefähr 80 mm sind, d. h.  $\beta = \gamma < 0.05$  ist, wird man sie überhaupt vernachlässigen können. Für Abweichungen bis rund 15 mm, d. h.  $\beta = \gamma < 0.2$ , bzw.  $\beta^2 = \gamma^2 < 0.04$ , werden die in den folgenden Endgleichungen (17) angegebenen Glieder 1. Ordnung in  $\beta$  und  $\gamma$



ausreichen. Mit diesen Größen aber wird man für alle praktisch vorkommenden Fälle das Auslangen finden. Es ergibt sich aber keinerlei Schwierigkeit, in besonders gearteten Ausnahmefällen die Determinanten streng aufzulösen, d. h. vor ihrer Berechnung die speziellen Werte für  $\zeta$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  einzusetzen. Für diese Fälle seien noch die Zählerdeterminanten für die einzelnen Ebenenparallaxen angegeben.

Die Zählerdeterminante für  $p_1$  entsteht, wenn man die erste Spalte aus der Gleichungsgruppe 15 a durch die Parallaxenspalte  $S_p^*$  aus Gleichung (7 a) ersetzt.

Für  $p_2$  ergibt sich die Zählerdeterminante mit

$$\begin{vmatrix} 1 - \beta_1 & p_1^* & & & \\ -\beta_2 Z_2' & p_2^* Z_2' & & & \\ + Z_3' (1 - \beta_3) & p_3^* Z_3' & \dots & & \\ -\beta_4 Z_4' & p_4^* Z_4' & & & \\ + Z_5' (1 - \beta_5) & p_5^* Z_5' & & & \end{vmatrix}, \quad (16 a)$$

wobei die weiteren Spalten dieselben sind, wie in Gleichungsgruppe (15 a).

Für  $p_3$  erhält man

$$\begin{vmatrix} 1 + \gamma_1 & \cdot & p_1^* & \cdot & \\ \gamma_2 + Z_2' & \cdot & p_2^* Z_2' & \cdot & \\ \gamma_3 + \zeta_3 & \cdot & p_3^* Z_3' & \cdot & \\ \gamma_4 + \zeta_4 & \cdot & p_4^* Z_4' & \cdot & \\ 2 + \gamma_5 + \zeta_5 & \cdot & p_5^* Z_5' & \cdot & \end{vmatrix}, \quad (16 b)$$

wobei die 2., 4. und 5. Spalte wieder der Gruppe (15 a) entnommen werden können.

Für  $p_4$  folgt

$$\begin{vmatrix} & & -\gamma_1 (1 - \beta_1) & p_1^* & & \\ \text{siehe} & \text{siehe} & + \beta_2 \gamma_2 & p_2^* Z_2' & \text{siehe} & \\ (16 a) & (15) & + (1 - \beta_3) (1 - \gamma_3) & p_3^* Z_3' & (15 a) & \\ & & -\beta_4 (1 - \gamma_4) & p_4^* Z_4' & & \\ & & - (1 - \beta_5) (1 + \gamma_5) & p_5^* Z_5' & & \end{vmatrix} \quad (16 c)$$

und schließlich bekommt man für  $p_5$

$$\begin{vmatrix} 1 - \gamma_1 & & -\frac{1}{2}\gamma_1 (1 - \gamma_1) & & p_1^* & \\ Z_2' - \gamma_2 & \text{siehe} & -\frac{1}{2}\gamma_2 (1 - \gamma_2) + a_2 & \text{siehe} & p_2^* Z_2' & \\ (15 a) & (15 a) & & (15 a) & & \\ 1 + Z_3' - \gamma_3 & & -\frac{1}{2}\gamma_3 (3 - \gamma_3) + A_3 & & p_3^* Z_3' & \\ 1 + Z_4' - \gamma_4 & & -\frac{1}{2}\gamma_4 (3 - \gamma_4) + A_4 & & p_4^* Z_4' & \\ \zeta_5 - \gamma_5 & & + \frac{1}{2}\gamma_5 (1 + \gamma_5) + a_5 & & p_5^* Z_5' & \end{vmatrix}$$

Die Parallaxenrelationen für eine allgemeine Punktlage unter Berücksichtigung der Glieder 1. Ordnung in  $\beta$  und  $\gamma$  sind in der Gleichungsgruppe (17) (siehe Beilage) zusammengestellt, wobei wieder die Gleichung (7) auf diesen allgemeinen Fall Anwendung findet.

Für die praktische Berechnung wird man nun vor genauer Ermittlung der Einflüsse der Punktabweichungen  $\beta$  und  $\gamma$  zuerst überschlägig ihren Wert feststellen, da diese Beträge, im folgenden Verbesserungen genannt, aus den schon erwähnten Gründen meist unberücksichtigt bleiben können. Es ist ferner zu beachten, daß die Hauptglieder der 1. Spalte bereits zum größten Teil in der Gleichungsgruppe (10) enthalten sind. Denkt man sich den Nenner  $N_a$  in Gleichungsgruppe (17) in eine Potenzreihe

$$N_a = N_{35} + \Delta N = N_{35} \left( 1 + \frac{\Delta N}{N_{35}} + \dots \right)$$

entwickelt und vernachlässigt man alle Glieder, die kleiner als von 1. Ordnung sind, so ergeben sich für die Hauptglieder die Ausdrücke der Gleichungsgruppe (10), vermindert um die Produkte aus  $\frac{\Delta N}{N_{35}}$  mit dem entsprechenden Koeffizienten von Gleichungsgruppe (10); so erhält man z. B. für  $p_1$  den Ausdruck

$$p_1 = p_1^* - \frac{\Delta N}{N_{35}} \cdot p_1^* + \text{Verbesserungsglieder in } \beta \text{ und } \gamma.$$

Man wird also bei der praktischen Durchführung zuerst die Hauptglieder nach Gleichungsgruppe (10) berechnen und dann erst die Verbesserungen anbringen. In einem praktischen Beispiel wird auf diese Verbesserungen der Reduktionsgrößen noch hingewiesen werden.

## 2. Die allgemeine Widerspruchsgleichung

Setzt man für sechs Punkte die Parallaxenrelationen an, so ergibt sich eine der Gleichungsgruppe (12) entsprechende Formelgruppe. Wie leicht einzusehen ist, läßt sich nach Durchführung ganz analoger Rechenvorgänge daraus die allgemeinste Widerspruchsgleichung bei beliebiger Punktlage bilden; sie lautet in Determinantenform

$$\begin{vmatrix} p_1^* & 1 - \frac{1}{2}\gamma_1(1 - \gamma_1) & \frac{1}{2}\gamma_1(1 - 2\beta_1) & \gamma_1 & 1 - 2\beta_1 \\ p_2^* & 1 - \frac{1}{Z_2'} \left[ a_2 - \frac{1}{2}\gamma_2(1 - \gamma_2) \right] & -\frac{1}{2Z_2'}\gamma_2(1 + 2\beta_2) & \frac{\gamma_2}{Z_2'} & -1 + 2\beta_2 \\ p_3^* & 1 - \frac{1}{Z_3'} \left[ a_3 + \left( 1 - \frac{1}{2}\gamma_3 \right) (1 - \gamma_3) \right] & -\frac{1}{2Z_3'}(1 - \gamma_3)(1 - 2\beta_3) - \frac{1}{Z_3'}(1 - \gamma_3) & 1 - 2\beta_3 \\ p_4^* & 1 - \frac{1}{Z_4'} \left[ a_4 + \left( 1 - \frac{1}{2}\gamma_4 \right) (1 - \gamma_4) \right] & +\frac{1}{2Z_4'}(1 - \gamma_4)(1 + 2\beta_4) - \frac{1}{Z_4'}(1 - \gamma_4) & -1 - 2\beta_4 \\ p_5^* & 1 - \frac{1}{Z_5'} \left[ a_5 + \frac{1}{2}\gamma_5(1 + \gamma_5) \right] & +\frac{1}{2Z_5'}(1 + \gamma_5)(1 - 2\beta_5) & \frac{1}{Z_5'}(1 + \gamma_5) & 1 - 2\beta_5 \\ p_6^* & 1 - \frac{1}{Z_6'} \left[ a_6 + \frac{1}{2}\gamma_6(1 + \gamma_6) \right] & -\frac{1}{2Z_6'}(1 + \gamma_6)(1 + 2\beta_6) & \frac{1}{Z_6'}(1 + \gamma_6) & -1 - 2\beta_6 \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

Bei Vernachlässigung der Glieder 2. und höherer Ordnung in  $\beta$  und  $\gamma$  läßt sich diese strenge Darstellung noch wesentlich vereinfachen.

Diese Determinante hat wohl in erster Linie theoretischen Wert, da in der Praxis kaum solche Extremfälle vorkommen, daß in der Nähe der Gruberschen Punkte überhaupt keine Parallaxenmessungen möglich sind und daher die Größen  $\beta$  und  $\gamma$  sehr große Werte erreichen. Selbst in diesen Fällen aber wird man die Determinante (18) kaum verwenden müssen, da ja die in den Modellen auftretenden Widersprüche und Verbesserungen, wie schon erwähnt, heutzutage nur noch sehr klein sind. Da aber die Determinante (18) nur für die bedingte Parallaxenausgleichung benötigt wird, ist es wohl leicht einzusehen, daß die Gleichung (13) allen praktischen Anforderungen genügt.

Für besondere Punktlagen wie z. B. die Verschiebung eines Vertikalschnittes gegen die Modellmitte oder die Verkürzung der  $y$ -Koordinaten für die Randpunkte, die übrigens einen Genauigkeitsverlust nach sich zieht, gibt die Gleichungsgruppe (15) für die Parallaxenrelationen und die Determinante (18) für die Bedingungs-gleichung die Ausgangswerte. Man kann die jeweilige besondere Punktlage in diese Determinanten einführen und die Endgleichungen analog den gezeigten Fällen im III. und IV. Abschnitt bilden; prinzipielle Schwierigkeiten treten dabei keine auf. Solche Fälle können in der Praxis vorkommen, werden aber so selten sein, daß eine explizite Darstellung im Rahmen dieser Arbeit überflüssig erscheint.

## V. Fehlerrechnung

Im Rahmen der Fehlerrechnung sollen Gleichungen für die mittleren Fehler der Orientierungselemente abgeleitet werden und außerdem soll untersucht werden, mit welcher Genauigkeit die Maschinen-Koordinaten der Orientierungspunkte gemessen werden müssen, damit die Endresultate möglichst keinen Genauigkeitsverlust durch die Koordinatenmessung erleiden.

Das Kriterium für die Genauigkeit der Orientierung ist schlechthin die Beobachtungsgenauigkeit der  $y$ -Parallaxen. Diese kann beim Gerät A 7 mit  $\pm 10 - 20 \mu$  im Modell angenommen werden. Den Wert von  $\pm 10 \mu$  erreichen aber nur sehr geübte Operateure. Diese Werte stellen Mittelwerte dar, da wie schon erwähnt, die Geländeform und Bedeckung wesentlichen Einfluß auf die Meßgenauigkeit haben. Die Einführung von Gewichten wäre in Extremfällen zu empfehlen.

Zum Zwecke der Berechnung der mittleren Fehler der Orientierungselemente hat man diese in Funktion der gemessenen Größen  $p_n^*$ ,  $X_n$ ,  $Y_n$ ,  $Z_n$  darzustellen. Für die Fehlerrechnung genügt es, eine strenge Grubersche Punktlage vorauszusetzen.

Für die Orientierungselemente ergibt sich durch Einsetzen der Gleichungen (10) in die Gleichungen (3)

$$\left. \begin{aligned}
 d\omega &= \frac{Z_1}{2K^2 N_{35}} [p_1^* (Z_3' + Z_5') - p_3^* Z_3' - p_5^* Z_5'] = \frac{Z_1}{2K^2 N_{35}} \cdot P^*, \\
 dx &= \frac{1}{B} \left[ p_1^* - p_2^* - \frac{\varepsilon \zeta_2}{N_{35}} \cdot P^* \right], \\
 d\varphi &= \frac{Z_1}{KB} \left[ \frac{p_1^*}{N_{35}} \{Z_3' (a_2' Z_4' - N_{45}) + Z_5' (a_2' Z_4' + a_3 - a_4)\} + \right. \\
 &\quad \left. + Z_4' (p_3^* - p_4^*) - \frac{p_3^* Z_3'}{N_{35}} (a_2' Z_4' - N_{45}) - \frac{p_5^* Z_5'}{N_{35}} (a_2' Z_4' + a_3 - a_4) \right], \\
 dby &= p_2^* + Z_1 \cdot d\omega + \frac{\varepsilon \zeta_2}{N_{35}} \cdot P^*, \\
 dbz &= -\frac{Z_1}{K} \left[ Z_4' (p_4^* - p_2^*) - \frac{1}{2N_{35}} (2a_2' Z_4' - 1 - 2a_4) \cdot P^* \right].
 \end{aligned} \right\} (19)$$

Entsprechende Gleichungen erhält man durch Einsetzen der Gleichungsgruppe (10) in die Gleichungen (2).

(Fortsetzung folgt)

## Referate

### Der Internationale Kurs für Geodätische Streckenmessung in München, September 1953

Von Josef Mitter

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

(Schluß)

Der Streckenmeßkurs wurde von allen namhaften deutschen und schweizer Erzeugerfirmen für geodätische Instrumente zur Ausstellung ihrer modernsten Geräte und zu Referaten über ihre Programme benützt. Die Geräte wurden außerdem zu den Meßübungen, die auf dem Meßfeld des Geodätischen Institutes der TH. München in Roggenstein stattfanden, zur Verfügung gestellt.

Von den von den Firmen vorgeführten Neu- und Spezialkonstruktionen von Entfernungsmessern sind vier besonders zu erwähnen: Der *Präzisionsfadendistanzmesser Breithaupt-Heckmann* und ein neuer *Fadendistanzmesser der Fa. Kern*, denen beiden auf verschiedene Art die Tendenz gemeinsam ist, die Unsicherheit der Fadenablesung durch die Einstellung auf feste Marken zu verbessern und die Genauigkeit um eine Stelle zu erhöhen; der *Einstanddistanzmesser Breithaupt-Berroth* für topographische Zwecke und schließlich der *Ortungstachygraph Breithaupt-Picht*, der für spezielle Fluß- und Wasserbauzwecke entwickelt wurde.

Das *Breithaupt-Heckmannsche Gerät*, das die Schrägentfernung gibt, arbeitet mit einer horizontalen Speziallatte und mit einem Fadenkeil, Neigung des Meßfadens gegen den Vertikalfaden 1:10, Konstante  $k = 100$ ; Genauigkeit ca. 15–20 mm auf 100 m. Es wurde auf die mögliche Verschärfung der Feineinstellung mit Hilfe eines optischen Mikrometers hingewiesen.

Der automatisch reduzierte *Fadendistanzmesser von Kern*, der mit einem festen horizontalen und mit einem nach  $\cos^2 \alpha$  gesteuerten beweglichen Faden sowie mit einer vertikalen Speziallatte ausgestattet ist, geht einen neuen Weg und ist noch im Entwicklungsstadium. Das Prinzip entspricht in gewissem Sinne dem ins Vertikale über-

# Die funktionellen Zusammenhänge von $y$ -Parallaxengröße und Beobachtungsort in einem Stereomodell; ein neues numerisches Orientierungsverfahren

Von H. S c h m i d, Wien

(2. Fortsetzung)

Die mittleren Fehler daraus lassen sich durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes berechnen. Bevor dies geschieht, ist noch zu bedenken, daß in den Gleichungen (19) die Werte  $p^*$  bereits ausgeglichene Parallaxen darstellen; für die fehlertheoretischen Betrachtungen hat man jedoch die beobachteten  $y$ -Parallaxen einzusetzen, was einfach mittels der Bedingungsgleichung (13) geschehen kann. Bezeichnet man die beobachteten  $y$ -Parallaxen mit „ $p$ “, so erhält man entsprechend der Gleichung (13) für die ausgeglichenen Parallaxen  $p^*$

$$\left. \begin{aligned}
 p_1^* &= p_1 - \frac{w}{[gg]} \cdot \frac{Z_3' + Z_5'}{N_{35}} = \\
 & p_1 \left[ 1 - \frac{(Z_3' + Z_5')^2}{N_{35}^2 [gg]} \right] + p_2 \frac{(Z_4' + Z_6')(Z_3' + Z_5')}{N_{35} N_{46}' [gg]} + p_3 \frac{Z_3'(Z_3' + Z_5')}{N_{35}^2 [gg]} \\
 & - p_4 \frac{Z_4'(Z_3' + Z_5')}{N_{35} N_{46}' [gg]} + p_5 \frac{Z_5'(Z_3' + Z_5')}{N_{35}^2 [gg]} - p_6 \frac{Z_6'(Z_3' + Z_5')}{N_{35} N_{46}' [gg]},
 \end{aligned} \right\} (20)$$

wenn mit  $[gg]$  die Summe der Quadrate der Parallaxenkoeffizienten in Gleichung (13) bezeichnet wird und für die Ebene

$$p_1^* = \frac{2}{3} p_1 + \frac{1}{3} p_2 + \frac{1}{6} p_3 - \frac{1}{6} p_4 + \frac{1}{6} p_5 - \frac{1}{6} p_6.$$

Weiters ist

$$\begin{aligned}
 p_3^* &= p_3 + \frac{w}{[gg]} \cdot \frac{Z_3'}{N_{35}}, & p_2^* &= p_2 + \frac{w}{[gg]} \cdot \frac{Z_4' + Z_6'}{N_{46}'}, & p_6 &= p_6 - \frac{w}{[gg]} \cdot \frac{Z_6'}{N_{46}'}, \\
 p_5^* &= p_5 + \frac{w}{[gg]} \cdot \frac{Z_5'}{N_{35}}, & p_4^* &= p_4 - \frac{w}{[gg]} \cdot \frac{Z_4'}{N_{46}'}.
 \end{aligned}$$

Da in diesen Parallaxengleichungen die Höhen der Orientierungspunkte vorkommen, ist es klar, daß man für verschiedene Geländeformen verschiedene mittlere Fehler für die Orientierungselemente erhält, die sowohl kleiner als auch größer als die entsprechenden Werte für die Ebene werden können. Diese mittleren Fehler  $m_0$ ,  $m_x$ ,  $m_\varphi$ ,  $m_{bz}$ ,  $m_{by}$  für ebene Gelände-

modelle, welche man am einfachsten aus den Gleichungen (11) durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes erhält, sind

$$\left. \begin{aligned} m_{\omega} &= \pm m \frac{Z}{2 K^2} \sqrt{3}, & m_{by} &= \pm m \sqrt{\frac{3 Z^4}{4 K^4} + \frac{Z^2}{K^2} + \left(\frac{2}{3}\right)}, \\ m_{\varphi} &= \pm m \frac{Z}{BK}, & m_{bz} &= \pm m \frac{Z}{K} \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ m_z &= \pm m \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2}{3}}, \end{aligned} \right\} (21)$$

wenn mit „ $m$ “ der mittlere Fehler einer  $y$ -Parallaxenmessung bezeichnet wird. Ersetzt man die Werte  $p^*$  in den Gleichungen (19) durch die entsprechenden aus Gleichung (20), so lassen sich für verschiedene charakteristische Geländeformen verhältnismäßig einfach die zugehörigen mittleren Fehler der Orientierungselemente berechnen; dies sei jedoch einer weiteren Arbeit vorbehalten. Erwähnt sei nur noch, daß sich mit Hilfe dieser allgemeinen Gleichungen auch Studien über die gefährlichen Räume durchführen lassen. Da die Größe der mittleren Fehler mehr theoretischen als praktischen Wert hat, erscheint es überflüssig, die Formelgruppe (20) weiter auszuführen, umso mehr als bei Messung von nur fünf Parallaxen die Formeln (19) direkt die gesuchten mittleren Fehler zu berechnen gestatten. Für die Abschätzung der Genauigkeit, mit der man die  $Z$ -Werte messen muß, sei der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß man nur in fünf Punkten die  $y$ -Parallaxen gemessen hat. Man kann die Gleichungen (19) zur Ermittlung der Differentialformeln verwenden.

In diesen Gleichungen hat man die Werte  $\varepsilon$ ,  $\zeta$ ,  $Z'$  und  $N_{35}$  durch die entsprechenden Funktionen von  $Z_1$  bis  $Z_5$  zu substituieren; hierauf ist nach den Höhen  $Z_1$  bis  $Z_5$  zu differenzieren. Wendet man nun wieder das Fehlerfortpflanzungsgesetz an, so soll  $m_z$ , d. i. der Messungsfehler in  $Z$ , so bestimmt werden, daß die dadurch entstehenden Fehler in den Orientierungselementen wesentlich kleiner bleiben als die durch die Parallaxmessung entstehenden. Zur Erläuterung sei das totale Differential von  $\omega$  mit

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= dZ_1 \left[ \frac{Z_3 + Z_5}{(2 K^2 N_{35})^2} \cdot P^* \right] + dZ_3 \left[ \frac{p_1^* - p_3^*}{2 K^2 N_{35}} - \frac{2 Z_3 - Z_1}{(2 K^2 N_{35})^2} \cdot P^* \right] + \\ &+ dZ_5 \left[ \frac{p_1^* - p_5^*}{2 K^2 N_{35}} - \frac{2 Z_5 - Z_1}{(2 K^2 N_{35})^2} \cdot P^* \right] \end{aligned}$$

angegeben.

Setzt man nun eine mittlere Arbeitshöhe von 250 mm fest und nimmt man an, daß  $Z = Z_1 = Z_2 = \dots = Z_5$  ist, wie dies zum Zwecke der Abschätzung ohne weiteres gestattet werden kann, so erhält man für den mittleren Fehler von  $\omega$

$$\overline{m_{\omega}} = \pm m_z \sqrt{\left[ \frac{2 Z P^*}{4 K^4 N_{35}^2} \right]^2 + \left[ \frac{p_1^* - p_3^*}{2 K^2 N_{35}} - \frac{Z \cdot P^*}{4 K^4 N_{35}^2} \right]^2 + \left[ \frac{p_1^* - p_5^*}{2 K^2 N_{35}} - \frac{Z P^*}{4 K^4 N_{35}^2} \right]^2}$$

Nimmt man nun für  $p_1^* - p_3^*$  und  $p_1^* - p_5^*$  Beträge von  $\pm 2 \text{ mm}$  an, was für die Praxis sicher Maximalwerte sind, so ergibt sich bei  $\frac{Z^2}{K^2} \doteq 10$  für

$$\overline{m_\omega} = \pm m_z \frac{1}{2K^2} \cdot 48.$$

Der mittlere Fehler von  $\omega$ , durch die Parallaxenmessungen verursacht, beträgt nach den Gleichungen (21) unter denselben Voraussetzungen <sup>4)</sup>

$$m_\omega = \pm m \frac{1}{2K^2} \cdot 430.$$

Für den mittleren Fehler einer Parallaxenbeobachtung  $m$  wird  $\pm 0.01 \text{ mm}$  angenommen. Da man die  $Z$ -Werte auf ein Hundertstel Millimeter ablesen kann, wenngleich die effektive Genauigkeit der Maschinenhöhen etwas geringer ist, verhalten sich die mittleren Fehlereinflüsse für die  $\omega$ -Bestimmung ungefähr wie 10: 1. Praktisch spielen also diese durch die  $Z$ -Messungen entstehenden Fehler keine Rolle. Für die übrigen Elemente lassen sich analoge Berechnungen anstellen und man erhält dabei als Verhältniszahlen für die mittleren Fehlereinflüsse auf die Orientierungselemente die Werte

$$\overline{m_z} : m_z \doteq 1:6 \quad ; \quad \overline{m_\varphi} : m_\varphi \doteq 1:4 \quad ; \quad \overline{m_{b_y}} : m_{b_y} \doteq 1:9 \quad ; \quad \overline{m_{b_z}} : m_{b_z} \doteq 1:5.$$

Selbst im ungünstigsten Fall, der für  $\varphi$  eintritt, sind die Fehlereinflüsse durch die  $Z$ -Messungen etwa ein Viertel der der Parallaxenmessungen und spielen daher keine Rolle, da sich der totale mittlere Fehler  $M_\varphi$  durch den Ausdruck

$$M_\varphi = \pm \sqrt{\overline{m_\varphi}^2 + m_\varphi^2} \doteq m_\varphi$$

darstellen läßt. Der Einfluß von  $\overline{m_\varphi}$  wegen der Messungsfehler in  $Z$  ist praktisch Null. Man sieht also, daß durch die Messungsfehler in den  $Z$ -Werten praktisch keine Genauigkeitsverluste eintreten.

Die Einflüsse der Messungsfehler der  $X$ -, bzw.  $Y$ -Koordinaten könnten aus den Gleichungen (17), die wieder in die Gleichungen (2) oder (3) einzusetzen wären, nach Differentiation und Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes berechnet werden. Man kann sich diese Berechnung aber ersparen, denn ein Überschlag zeigt, daß bei einer Koordinatenmessung von nur  $\pm 0.1 \text{ mm}$  Genauigkeit, die Koeffizienten der Werte  $p^*$  etwa eine Genauigkeit von  $\pm 0.001$  aufweisen werden, da ja  $\beta = \frac{\Delta X}{\mathbf{B}}$  und  $\gamma = \frac{\Delta Y}{K}$  ist. Diese Genauigkeit ist aber vollkommen ausreichend, da selbst bei einer  $y$ -Parallaxe von  $1 \text{ mm}$  das Reduktionsglied noch immer auf  $0.001 \text{ mm}$  genau sein wird.

<sup>4)</sup> Man hätte eigentlich die entsprechenden Gleichungen für 5 Orientierungspunkte verwenden müssen. Für die Abschätzung ist dies aber bedeutungslos.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß die Fehler der Koordinatenmessung praktisch keinen Einfluß auf die Genauigkeit der Orientierungselemente haben werden, wenn man die  $Z$ -Koordinaten auf  $\pm 0.01$  bis  $\pm 0.02$  mm, die  $X$ - und  $Y$ -Werte hingegen bloß auf  $\pm 0.10$  mm angibt.

Die mittleren Fehler der Orientierungselemente hängen von der Beobachtungsgenauigkeit der  $y$ -Parallaxen ab und können größer, aber auch kleiner wie jene für ebenes Gelände  $Z_1 = \text{const}$  werden. Durch die bedingte Ausgleichung der sechs gemessenen Raumparallaxen  $p_n^*$  vor Eingang in die Elementenberechnung entspricht dieses Verfahren streng der Methode der kleinsten Quadrate.

## VI. Praktische Orientierungsbeispiele

1. *Beispiel, Modell 1186/85:* In den Orientierungspunkten 1 bis 6 wurden die in Fig. 2 angegebenen Koordinaten, bzw. Parallaxen gemessen. Da die Grubersche Punktlage zur Berechnung sehr vorteilhaft ist, werden die Maschinenkoordinaten der Orientierungselemente so gefunden, daß man auf Millimeterpapier die Projektionen der Objektivzentren  $O_1$  und  $O_2$  kartiert. Hierauf werden senkrecht zur Basis 2 Parallele durch  $O_1$  und  $O_2$  gelegt. Im Abstand  $K$  werden die vier Punkte 3 bis 6 festgelegt.  $K$  soll möglichst groß sein, da dadurch die Bestimmung der Orientierungselemente genauer wird. Hierauf liest man am Millimeterpapier die Maschinenkoordinaten direkt ab. Wie die Fehlerrechnung gezeigt hat, genügt diese Ablesegenauigkeit für die  $X$ - und  $Y$ -Werte.

Modell 1186/85, Basis „außen“, linkes Bild fest,  $B = 82.4$  mm,  
 $K = 80.0$  mm

$X = 544.7$		$X = 462.2$
$Y = 392.6$		$Y = 389.4$
$Z = 260.0$	● 3	● 4 $Z = 224.8$
$p^* = + 0.15$ min		$p^* = - 0.01$ mm
$X = 541.2$		$X = 458.8$
$Y = 472.6$		$Y = 469.4$
$Z = 248.5$	● 1	● 2 $Z = 253.8$
$p^* = 0.00$ mm		$p^* = 0.00$ mm
$X = 535.9$ (Soll 537.8)		$X = 455.3$
$Y = 550.4$ ( „ 552.6)		$Y = 547.4$
$Z = 285.5$	● 5	● 6 $Z = 275.3$
$p^* = + 0.16$ mm		$p^* = + 0.09_5$ mm

Fig. 2



In diesem Beispiel wurden die  $Z$ -Werte lediglich auf  $0.1 \text{ mm}$  angegeben, da die  $y$ -Parallaxen absolut genommen nicht größer als  $0.16 \text{ mm}$  sind; in der Fehlerrechnung hingegen wurden die Parallaxendifferenzen mit  $2 \text{ mm}$  angenommen. Die Berechnung der Orientierungselemente läßt sich etwa nach dem beiliegenden Berechnungsschema 1 durchführen.

Für die rasche Berechnung der Größen  $Z_n'$  und  $a_n$  könnte z. B. folgende Tabelle dienen.

Tabelle I

$\xi$ $Z'$	$\varepsilon$											
	-0.24	-0.22	-0.20	-0.18	-0.16	-0.14	-0.12	-0.10	... 0	+0.02	+0.04	+0.06
	0.76	0.78	0.80	0.82	0.84	0.86	0.88	0.90	... 1	1.02	1.04	1.06
3.000	0.547	0.515	0.480	0.443	0.403	0.361	0.317	0.270	0	...		
Diff.		32	35	37	40	42	44	47	49			
	18	17	16	15	14	12	10	9				
3.100	0.565	0.532	0.496	0.458	0.417	0.373	0.327	0.279	0	...		
Diff.		33	36	38	41	44	46	48	51			
3.200	.	.	.	.	.	.	.	.	.			

Außerdem ist es ohne weiteres möglich, geeignete einfache Nomogramme zu entwerfen, um die Koeffizienten der Parallaxenrelationen rasch zu finden. Die Berechnung ist aber auch ohne besondere Tabellen und Nomogramme rasch durchzuführen, da sämtliche Rechenoperationen mit dem Rechenschieber vorgenommen werden können. Bei einiger Übung mit dem Rechenschieber benötigt man ca. eine halbe Stunde zur Ermittlung der Orientierungselemente aus sechs gemessenen Parallaxen; wenn der Parallaxenausgleich entfällt, reduziert sich diese Zeit noch um etwa 10 Minuten.

Im 1. Beispiel konnte die Grubersche Punktlage des 5. und 6. Punktes nicht streng eingehalten werden. Die Abweichungen betragen:

$$\beta_5 = -0.026 \quad \text{und} \quad \gamma_5 = +0.028$$

Man hat bei der Bestimmung der Vorzeichen von  $\beta$  und  $\gamma$  darauf zu achten, daß bei Basis „außen“ entsprechend der Vorzeichenregel die positive  $X$ -Richtung von rechts nach links und die positive  $Y$ -Richtung vom Beobachter nach hinten weist. Um den geringen Einfluß dieser Abweichungen der Orientierungspunkte von der Soll-Lage aufzuzeigen, wurden für dieses Beispiel die zusätzlichen Reduktionsglieder für die Abweichungen  $\beta_5$  und  $\gamma_5$  gerechnet, wobei sich die Ebenenparallaxen  $p_1$  bis  $p_5$  um die Beträge

$$\begin{aligned}
 p_1 &= +0.0003 \text{ mm}, & p_3 &= +0.0050 \text{ mm}, & p_5 &= -0.0005 \text{ mm} \\
 p_2 &= -0.0010 \text{ mm}, & p_4 &= +0.0014 \text{ mm}, & &
 \end{aligned}$$

ändern. Diese Parallaxenverbesserungen  $\Delta p$  liegen unter der Beobachtungsgenauigkeit, die ja im günstigsten Fall mit  $\pm 0.0100 \text{ mm}$  anzunehmen ist. Die Ergebnisse decken sich innerhalb der Parallaxenbeobachtungsgenauigkeit mit den bereits bekannt gewesenen Bündeldrehungen. Nach Einstellung der Orientierungsverbesserungen sind sämtliche  $y$ -Parallaxen zum Verschwinden gebracht worden. Die numerische Kontrollrechnung ergab Restparallaxen von der Größenordnung  $0.001 \text{ mm}$ .

Das Rechenschema 1 läßt sich noch vereinfachen, wenn bei der Parallaxenmessung die Grubersche Punktlage streng eingehalten werden kann. Es existieren dann keine Einflüsse durch die Abweichungen  $\beta$  und  $\gamma$  auf die Ebenenparallaxen und man kann die Orientierungselemente direkt mit den Formeln (19) berechnen. Zur einfacheren Auswertung, die im Berechnungsschema 2 gezeigt wird, setzt man jetzt für:

$$\Delta Z_{2n+1} = Z_{2n+1} - Z_1 \quad \text{und} \quad \Delta Z_{2n+2} = Z_{2n+2} - Z_2 \quad (n = 1, 2)$$

wobei für  $Z'_{2n+1}$ ,  $Z'_{2n+2}$ ,  $a_{2n+1}$  und  $a_{2n+2}$  die entsprechenden Ausdrücke zu setzen sind. Die Bedingungsgleichung (13) geht dann über in

$$p_1^* \frac{Z_3' + Z_5'}{N_{35}} - p_2^* \cdot \frac{Z_2}{Z_1} \frac{Z_4' + Z_6'}{N_{46}} - p_3^* \frac{Z_3'}{N_{35}} + p_4^* \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_4'}{N_{46}} - p_5^* \cdot \frac{Z_5'}{N_{35}} +$$

$$+ p_6^* \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_6'}{N_{46}} = 0$$

und die Gleichungsgruppe (19) in

$$d\omega = \frac{Z_1}{2K^2 N_{35}} \{p_1^* (Z_3' + Z_5') - p_3^* Z_3' - p_5^* Z_5'\} = \frac{Z_1}{2K^2 N_{35}} \cdot P^*,$$

$$dz = \frac{1}{B} \{p_1^* - p_2^* - (Z_2 - Z_1) d\omega\}$$

$$db_y = p_2^* + Z_2 \cdot d\omega$$

$$db_z = \frac{Z_4}{K} (p_2^* - p_4^*) - K (1 + 2a_4) \cdot d\omega$$

$$d\varphi = \frac{1}{B} \left\{ db_z + \frac{Z_5}{K} (p_1^* - p_5^*) - K (1 + 2a_5) d\omega \right\} =$$

$$= \frac{1}{B} \left\{ db_z - \frac{Z_3}{K} (p_1^* - p_3^*) + K (1 + 2a_3) d\omega \right\}$$

(19 a)

Berechnungsschema 2

	1	2	3	4	5	6	$\varepsilon = 4.825$							
$Z_n$	248.50	253.80	260.00	224.80	285.50	275.30	$B = 82.43$							
$Z'$	1.00	1.020	1.046	0.887	1.149	1.086	$K = 80.00$							
$a$	0.00	—	0.232	- 0.489	+ 0.825	+ 0.444	$N_{35} = 2.057$ $N_{46} = 0.955$							
$g$	$p_g^*$	+ 1.07	0	- 2.10	0	- 0.51	+ 0.150	+ 0.94	- 0.010	- 0.56	+ 0.160	+ 1.15	+ 0.095	—
$g \cdot p_g^*$		0	0	- 0.076	- 0.009	- 0.089	+ 0.109							$w = - 0.065$ $\mathfrak{K} = + 0.008$
$\mathfrak{K}g$	$p_a^*$	+ 8	+ 0.008	- 17	- 0.017	- 4	+ 0.146	+ 8	- 0.002	- 4	+ 0.156	+ 9	+ 0.104	

$\frac{Z_1}{2 K^2 N_{35}}$	60.2	$\frac{1}{B}$	- 77.3		$\frac{Z_4}{K}$	- 2.81	$\frac{Z_5}{K}$	- 3.57		
$P^*$	+ 16	$p_1^* - p_2^*$	+ 25	$p_2^*$	- 17	$\frac{Z_4}{K} (p_2^* - p_4^*)$	+ 41	$\frac{Z_5}{K} (p_1^* - p_5^*)$	+ 527	
	- 153	$(Z_2 - Z_1) d\omega$	+ 16	$Z_2 d\omega$	- 756	$K \cdot d\omega \cdot (1 + 2 a_4)$	+	4	$K \cdot d\omega \cdot (1 + 2 a_5)$	- 632
	- 179		+ 0.041						- 0.060	
$d\omega$	- 0.316									
	- 19.00	$dz$	- 3.17	$dby$	- 0.773	$dbz$	+ 0.045	$d\varphi$	+ 4.65	

2. *Beispiel, Modell 1184/85*: Das bereits optisch-mechanisch orientierte Stereomodell, bei dem allerdings noch Restparallaxen vorhanden waren, wurde durch Eindrehen von  $d\varphi'' = d\omega'' = dz'' = + 10^{\circ}0$  und  $dbz'' = + 0.100 \text{ mm}$  desorientiert. Die Grubersche Punktlage konnte mit  $K = 75.0 \text{ mm}$  und  $B = 88.0 \text{ mm}$  praktisch eingehalten werden (Fig. 3).

Modell 1184/85, Basis „innen“, linkes Bild fest,  $B = 88,0 \text{ mm}$ ,  $K = 75,0 \text{ mm}$

1. Restparallaxen	+ 0.031			1. + 0.010
2. nach der Desorientierung	+ 0.307	● 3	● 4	2. + 0.425
3. Gesamtparall.	+ 0.276			3. + 0.415
4. Theoret. Parall.	+ 0.263			4. + 0.437
1.	- 0.005			1. 0.000
2.	+ 0.259	● 1	● 2	2. + 0.372
3.	+ 0.264			3. + 0.372
4.	+ 0.258			4. + 0.410 (!)
1.	- 0.018			1. - 0.016
2.	+ 0.321	● 5	● 6	2. + 0.414
3.	+ 0.339			3. + 0.430
4.	+ 0.340			4. + 0.444

Fig. 3

Im ersten Berechnungsgang wurden die im Modell verbliebenen Restparallaxen nicht berücksichtigt und aus den nach der Eindrehung obiger Orientierungsgrößen gemessenen  $y$ -Parallaxen die Orientierungselemente berechnet. Es ergaben sich die Werte

$$\begin{aligned}
 dby &= - 0.130 \text{ mm}, & d\varphi &= - 4^{\circ}6, & d\omega &= - 12^{\circ}4 \\
 dbz &= - 0.158 \text{ mm}, & dz &= - 7^{\circ}6,
 \end{aligned}$$

für die Bündeldrehungen; sie erfüllen die Parallaxengleichungen und geben Restparallaxen die den Wert von  $0.001 \text{ mm}$  nicht übersteigen. Werden hingegen die im Modell vorhandenen  $y$ -Parallaxen berücksichtigt, so ergeben sich die in Fig. 3 unter Punkt 3 stehenden Werte für die  $y$ -Parallaxen mit den Orientierungselementen

$$\begin{aligned}
 dby &= - 0.039 \text{ mm}, & d\varphi &= - 10^{\circ}7 \text{ mm}, & d\omega &= - 10^{\circ}1. \\
 dbz &= - 0.162 \text{ mm}, & dz &= - 7^{\circ}4 \text{ mm},
 \end{aligned}$$

Die Differenzen zwischen den Endresultaten und den eingedrehten Werten sind für  $dby$ ,  $dbz$  und  $dz$  größer als jene, die durch unvermeidliche Beobachtungsfehler entstehen dürften. Da man die zur Desorientierung

verwendeten Werte für die Bündeldrehungen kennt, lassen sich die dadurch entstehenden  $y$ -Parallaxen, in Fig. 3 unter Punkt 4 dargestellt, berechnen. Tatsächlich zeigt sich dabei, daß im Orientierungspunkt 2 offenbar ein Beobachtungsfehler von  $+0.04 \text{ mm}$  begangen wurde; im Orientierungspunkt 4 ergab sich eine Differenz zwischen dem Parallaxensollwert und der tatsächlich gemessenen  $y$ -Parallaxe von  $+0.02 \text{ mm}$ ; in den Orientierungspunkten 3 und 6 solche von  $0.01 \text{ mm}$ . In den Punkten 1 und 5 ergaben sich keine Differenzen. Bei Berücksichtigung dieser Fehler stimmen die Ergebnisse absolut mit den eingedrehten Werten überein.

3. *Beispiel, Modell 1186/87*: In diesem Beispiel (Fig. 4) wurde die Grubersche Punktlage aus einem Versehen des Technikers nicht eingehalten.

Modell 1186/87, Basis „innen“, rechtes Bild fest,  $B = 82.40 \text{ mm}$ ,  $K = 80.0 \text{ m}$

$X = 455.80$ $Y = 391.98$ $Z = 259.43$ $p^* = +0.155 \text{ mm}$	● 3		● 4	$X = 538.20$ $Y = 395.09$ $Z = 293.18$ $p^* = +0.095 \text{ mm}$
$X = 458.80$ $Y = 471.98$ $Z = 248.43$ $p^* = 0.00$	● 1		● 2	$X = 541.20$ $Y = 475.09$ $Z = 303.68$ $p^* = 0.00$
$X = 461.52$ $Y = 551.75$ $Z = 285.43$ $p^* = +0.135 \text{ mm}$	● 5		● 6	$X = 544.20$ $Y = 555.09$ $Z = 287.65$ $p^* = -0.010 \text{ mm}$

Fig. 4

Die Abweichungen  $\gamma_2$  und  $\gamma_4$  in der  $Y$ -Richtung betragen für die Orientierungspunkte 2 und 4 je  $+0.075$ . Für die Orientierungselemente resultierten die nachstehenden Werte, wobei der jeweils zweite Summand von den Abweichungen  $\gamma_2$  und  $\gamma_4$  herrührt:

$$\begin{aligned}
 dx &= -12.08 + 0.31 = -11.77, & dbz &= +0.155 + 0 = +0.155 \text{ mm}, \\
 d\varphi &= -0.48 - 2.88 = -3.36, & dby &= -0.780 + 0 = -0.780 \text{ mm}, \\
 d\omega &= +19.95 - 0 = +19.95.
 \end{aligned}$$

Nach Eindrehen dieser Orientierungselemente verschwanden sämtliche  $y$ -Parallaxen. Da für dieses Modell bereits Ergebnisse aus einem Orientierungsvorgang nach der Methode von J. Krames vorlagen, konnten die Differenzen zwischen den einzelnen Bündelbewegungen gebildet werden. In der folgenden Zusammenstellung sind die Differenzen und die jeweils korrespondierenden Beobachtungsfehler gegenübergestellt.

nach Krames	Differenz	Beob. Differenz
$dx = -12^{\circ}18$	$0^{\circ}41$	$0.0053 \text{ mm}$
$d\varphi = -10^{\circ}70$	$7^{\circ}34$	$0.0306 \text{ mm}$
$d\omega = -19^{\circ}08$	$0^{\circ}82$	$0.0066 \text{ mm}$
$dby = -0.816 \text{ mm}$	$0.036 \text{ mm}$	$0.036 \text{ mm}$ oder $0.01 \text{ mm}$ bei der Berechnung von $\omega$
$dbz = -0.082 \text{ mm}$	$0.073 \text{ mm}$	$0.023 \text{ mm}$

Da sowohl der Zeitpunkt der Beobachtung, als auch die Orientierungspunkte für die Parallaxenbeobachtung nicht die gleichen waren und außerdem verschiedene Beobachter die Messungen durchführten, war zu erwarten, daß die Beobachtungsdifferenzen den Wert von  $\pm 0.01 \text{ mm}$  übersteigen werden. Dennoch kann man sie unter den geschilderten Voraussetzungen als klein bezeichnen.

Die praktischen Ergebnisse haben gezeigt, daß dieses Orientierungsverfahren sowohl hinsichtlich der erzielten Genauigkeit als auch der aufzuwendenden Zeit sehr günstig ist.

(Schluß folgt)

## Kleine Mitteilungen

### Sektionschef i. R. Dipl.-Ing. Dr. Josef Wolf, Ehrenmitglied des Ö. V. W., wurde zum Ehrenmitglied des Wasserwirtschaftsverbandes ernannt

Der Österreichische Wasserwirtschaftsverband ehrte seinen langjährigen Vizepräsidenten, Sektionschef i. R. Dipl.-Ing. Dr. Wolf, durch Ernennung zum Ehrenmitglied. Auf der am 15. Juni 1954 stattgefundenen außerordentlichen Hauptversammlung des Verbandes überreichte dessen Präsident, Staatssekretär a. D. Stepski-Doliwa, Dr. Wolf eine künstlerisch ausgeführte Urkunde und würdigte in einer Ansprache an den Gefeierten dessen langjährige fruchtbare Tätigkeit für die österreichische Wasserwirtschaft im allgemeinen und im Rahmen des Verbandes im besonderen. Sektionschef Wolf, der zu Beginn des Jahres 1950 aus dem aktiven Dienst ausgeschieden ist, hat trotzdem noch vier Jahre seine reiche Erfahrung dem Wasserwirtschaftsverband zur Verfügung gestellt. In seinen Dankesworten versicherte Sektionschef Wolf, daß er es als seine Ehrenpflicht erachte, auch weiterhin für die österreichische Wasserwirtschaft und den Verband zu wirken. Präsident Stepski brachte in seinen Schlußworten in überzeugender Weise zum Ausdruck, daß der Verband sich glücklich schätzt, auch weiterhin diesen verdienten Ingenieur zu den Seinen zählen zu dürfen. *O. Vas*

### Präsident Dipl.-Ing. Karl Lego — Ehrenmitglied des Deutschen Vereins für Vermessungswesen

Der DVW. hat auf seiner im Rahmen des 39. Deutschen Geodätentages 1954 am 30. August in Wiesbaden abgehaltenen Hauptversammlung den stellvertretenden Obmann des ÖVW., Herrn Präsidenten Dipl.-Ing. Karl Lego, zu seinem Ehrenmitglied ernannt. Diese hohe Ehrung ist nicht nur eine besondere Auszeichnung dieses seit 42 Jahren im ÖVM. unermüdlich und erfolgreich tätigen Funktionärs, der nach der Katastrophe von 1945 Verein und Zeitschrift wieder ins Leben gerufen hat. Sie ist auch eine Ehrung und Anerkennung des österreichischen Vereines und seiner Mitglieder, welche trotz

4. Die formale Strenge des Ausgleichsverfahrens allein genügt nicht für die einwandfreie Erzielung der gewünschten Projektion. Hier spielt auch die Netzform eine nicht zu unterschätzende Rolle.

5. Für die Projektion haben die Grundlinien dieselbe wichtige Funktion wie die L a p l a c e schen Bedingungen.

Übrigens erweist sich auch hinsichtlich des Maßstabproblems das naturtreue Netz als das günstigste. Denn die Projektion auf das mittlere Erdellipsoid liefert nicht nur das ähnlichste Abbild der Punktkonfiguration des Geoides, wenn man die ganze Erde betrachtet; unter diesem Gesichtspunkt können auch die Geoidundulationen nicht im gleichen Ausmaß systematisch anwachsen wie die Geoidhöhen bezüglich irgendeines Referenzellipsoides. Für das naturtreue Netz ist auch eine Grundlinienausgleichung vollkommen korrekt, wenn die beobachteten Richtungen auf das Geoid, die Grundlinien jedoch auf das Ellipsoid reduziert sind. Abschließend braucht wohl kaum betont zu werden, daß diese prinzipiellen Betrachtungen praktisch nur bei kontinentalen Netzen fühlbar werden.

## **Die funktionellen Zusammenhänge von $\gamma$ -Parallaxengröße und Beobachtungsort in einem Stereomodell; ein neues numerisches Orientierungsverfahren**

Von H. S c h m i d, Wien

(Schluß)

### VII. Erweiterung des Anwendungsbereiches durch Berücksichtigung der Glieder 2. Ordnung in den Parallaxengleichungen

Sämtliche bisher veröffentlichten Orientierungsverfahren gehen von der Voraussetzung aus, daß man die Vororientierung so genau durchführen kann, daß bei der Schlußorientierung die Glieder 2. und höherer Ordnung keinen Einfluß mehr auf die Endergebnisse haben. Außerdem wurde in den bisher veröffentlichten Verfahren auf die Achsstellungen der Auswertegeräte und ihren Einfluß bei der Bestimmung der Orientierungselemente keine Rücksicht genommen. H. Bernhard [9] hat jene Gleichungen abgeleitet, die es am Ende des Orientierungsverfahrens gestatten, die Verbesserungen wegen der Achsstellungen an die Elemente anzubringen; diese Verbesserungen sind größer, als bisher angenommen wurde, und werden bei Bündelbewegungen von etwa  $20^\circ$  schon fühlbar. Die Vernachlässigung der Glieder 2. und höherer Ordnung setzt voraus, daß man die Vororientierung schon so genau ausführt, daß die noch verbleibenden Restparallaxen den Betrag von etwa  $\pm 0.3-0.5 \text{ mm}$  nicht übersteigen. In normalen Fällen wird eine derartige Vororientierung von geübten Operateuren in etwa 10 Minuten zu-

stande gebracht. Handelt es sich aber um schwierige Geländeformen, d. h. um Modelle, in welchen die Höhenunterschiede der Orientierungspunkte sehr groß, etwa  $\frac{1}{4}$  der Flughöhe über Grund, sind, so können diese Vororientierungen recht langwierig werden. Es wäre daher äußerst vorteilhaft, wenn man ohne oder fast ohne Vororientierung sofort das Schlußverfahren anwenden könnte. Da beim vorliegenden Orientierungsverfahren sämtliche Beobachtungen trotz größter Höhenunterschiede auf eine Ebene reduziert werden, sind die Endwerte für die Orientierungselemente auch unter Berücksichtigung der Glieder 2. Ordnung relativ rasch zu ermitteln. Geeignete Nomogramme ermöglichen eine rasche Berechnung dieser Zusatzglieder.

Entwickelt man die von O. v. Gruber [10] angegebenen Grundgleichungen für die  $y$ -Parallaxen<sup>5)</sup> bis einschließlich Glieder 2. Ordnung für die Elemente  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ,  $\varkappa'$ ,  $\varkappa''$  und  $\omega$ , so gelangt man, wenn man  $\varphi'$  und  $\varkappa'$  durch  $db_z''$ , bzw.  $db_y''$  ersetzt, zur folgenden Parallaxenrelation:

$$\begin{aligned}
 p^* = & db_y + \frac{Y}{Z} db_z - \frac{(B-X)Y}{Z} d\varphi + (B-X) \cdot dx - Z \left(1 + \frac{Y^2}{Z^2}\right) \cdot d\omega \\
 & + \frac{2X-B}{B} \cdot \frac{Y}{Z^2} db_z^2 - \left[1 + \frac{2(X-B)^2}{Z^2}\right] \frac{Y}{2} d\varphi^2 + \frac{Y}{Z} \cdot dx^2 - \left(1 + \frac{Y^2}{Z^2}\right) Y \cdot d\omega^2 \\
 & + \frac{2X-B}{BZ} \cdot db_y \cdot db_z + \frac{Y^2 - (X-B)^2}{BZ} db_y \cdot d\varphi + \frac{Y}{B} db_y \cdot dx - \frac{2(X-B)Y}{BZ} db_y \cdot d\omega \\
 & + \left[1 + \frac{2(X-B)^2}{Z^2}\right] \frac{Y}{B} db_z \cdot d\varphi + \frac{Y^2 - (X-B)^2}{BZ} db_z \cdot dx + \left(1 - \frac{X}{B}\right) \left(1 + \frac{2Y^2}{Z^2}\right) db_z \cdot d\omega \\
 & + \frac{Y^2 - (X-B)^2}{Z} d\varphi \cdot dx + (X-B) \left(1 + \frac{2Y^2}{Z^2}\right) d\varphi \cdot d\omega \\
 & - \frac{2(X-B)Y}{Z} \cdot dx \cdot d\omega .
 \end{aligned} \tag{22}$$

Sie gilt für den Fall der Hinzuorientierung des rechten zum festen linken Bild<sup>6)</sup>, wobei die Basis „innen“ eingedreht wurde. Für die ersten 5 Gruberschen Punkte kann man nun durch Einsetzen der Koordinatenwerte die für die Ebene  $Z_1 = \text{const.}$  bestehenden Parallaxengleichungen aufstellen.

<sup>5)</sup> Siehe auch Finsterwalder, Lehrbuch für Photogrammetrie, Ausgabe 1953.

<sup>6)</sup> Die analogen Ausdrücke für die Zuorientierung des linken zum festen rechten Bild folgen direkt aus Gleichung (1 a).



Sie lauten:

*Glieder 1. Ordnung*

$$\begin{aligned}
 p_1 &= dby && - Zd\omega && - Bdx \\
 p_2 &= dby && - Zd\omega && \\
 p_3 &= dby - \frac{K}{Z} dbz + \frac{KB}{Z} d\varphi - \left(Z + \frac{K^2}{Z}\right) d\omega + Bdx \\
 p_4 &= dby - \frac{K}{Z} dbz && - \left(Z + \frac{K^2}{Z}\right) d\omega && \\
 p_5 &= dby + \frac{K}{Z} dbz - \frac{KB}{Z} d\varphi - \left(Z + \frac{K^2}{Z}\right) d\omega + Bdx
 \end{aligned}$$

*Glieder 2. Ordnung*

$$\text{zu } p_1 \quad - \frac{1}{Z} dby dbz - \frac{B}{Z} dby d\varphi - \frac{B}{Z} dbz dx + dbz d\omega - \frac{B^2}{Z} d\varphi dx - Bd\varphi d\omega,$$

$$\text{zu } p_2 \quad + \frac{1}{Z} dby dbz,$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 &+ \frac{K}{Z^2} dbz^2 + \left(1 + 2 \frac{B^2}{Z^2}\right) \frac{K}{2} d\varphi^2 - \frac{K}{2} dx^2 + K \left(1 + \frac{K^2}{Z^2}\right) d\omega^2 \\
 &- \frac{1}{Z} dby dbz + \frac{K^2 - B^2}{BZ} dby d\varphi - \frac{K}{Z} dby dx - \frac{2K}{Z} dby d\omega \\
 \text{zu } p_3 & \left\{ \begin{aligned}
 &- \frac{K}{B} \left(1 + 2 \frac{B^2}{Z^2}\right) dbz d\varphi + \frac{K^2 - B^2}{ZB} dbz dx + \left(1 + \frac{2K^2}{Z^2}\right) dbz d\omega \\
 &\frac{K^2 - B^2}{Z} d\varphi \cdot dx - B \left(1 + \frac{2K^2}{Z^2}\right) d\varphi d\omega - \frac{2KB}{Z} dx \cdot d\omega,
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 &- \frac{K}{Z^2} dbz^2 + \frac{K}{Z} d\varphi^2 - \frac{K}{Z} dx^2 + K \left(1 + \frac{K^2}{Z^2}\right) d\omega^2 + \frac{K^2}{BZ} dby d\varphi + \frac{1}{Z} dby dbz \\
 \text{zu } p_4 & \left\{ \begin{aligned}
 &- \frac{K}{B} dbz d\varphi + \frac{K^2}{ZB} dbz dx - \frac{K}{B} dby dx + \frac{K^2}{Z} d\varphi \cdot dx,
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 &- \frac{K}{Z^2} dbz^2 - \frac{K}{2} \left(1 + 2 \frac{B^2}{Z^2}\right) d\varphi^2 + \frac{K}{2} dx^2 - K \left(1 + \frac{K^2}{Z^2}\right) d\omega^2 + \frac{K^2 - B^2}{BZ} dby d\varphi \\
 \text{zu } p_5 & \left\{ \begin{aligned}
 &+ \frac{K}{B} dby dx + \frac{2K}{Z} dby \cdot d\omega - \frac{1}{Z} dby dbz + \frac{K}{B} \left(1 + 2 \frac{B^2}{Z^2}\right) dbz d\varphi + \frac{K^2 - B^2}{ZB} dbz dx \\
 &+ \left(1 + \frac{2K^2}{Z^2}\right) dbz \cdot d\omega + \frac{K^2 - B^2}{Z} d\varphi \cdot dx - B \left(1 + \frac{2K^2}{Z^2}\right) d\varphi \cdot d\omega + \frac{2KB}{Z} dx \cdot d\omega.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \right.$$

Löst man dieses Gleichungssystem nach den linearen Gliedern der Orientierungselemente auf, wobei für

$$\begin{aligned}
 dby &= p_2 + \frac{Z^2}{2K^2} (2p_1 - p_3 - p_5) - \frac{1}{Z} dby dbz + \frac{Z}{B} dby d\varphi + \\
 &\quad + \frac{Z}{B} dbz dx + 2 dbz d\omega + Z d\varphi dx - 2 B d\varphi d\omega, \\
 dbz &= -\frac{Z}{K} \left( p_1 - p_2 + p_4 - \frac{p_3 + p_5}{2} \right) - \frac{1}{Z} dbz^2 + \frac{Z}{2} d\varphi^2 - \frac{Z}{2} dx^2 + \\
 &\quad + Z \left( 1 + \frac{K^2}{Z^2} \right) d\omega^2 - \frac{Z}{B} dby dx - \frac{Z}{B} dbz d\varphi - \frac{2K}{Z} dbz d\omega + \frac{2KB}{Z} d\varphi d\omega, \\
 d\varphi &= \frac{Z}{KB} (-p_1 + p_2 + p_3 - p_4) - \frac{2}{BZ} dbz^2 - \frac{B}{Z} d\varphi^2 + \frac{2}{B} dby d\omega + \\
 &\quad + \frac{2}{Z} dbz d\varphi - \frac{2K}{BZ} dbz d\omega + \frac{2K}{Z} d\varphi d\omega + 2 dx d\omega, \\
 dx &= \frac{1}{B} (p_1 - p_2) + \frac{2}{BZ} dby dbz + \frac{1}{Z} dby d\varphi + \frac{1}{Z} dbz dx - \frac{1}{B} dbz d\omega + \\
 &\quad + \frac{B}{Z} d\varphi dx + d\varphi d\omega, \\
 d\omega &= \frac{Z}{2K^2} (2p_1 - p_3 - p_5) + \frac{1}{B} dby d\varphi + \frac{1}{B} dbz dx + \frac{2}{Z} dbz d\omega + d\varphi dx - \\
 &\quad \frac{2B}{Z} d\varphi d\omega
 \end{aligned} \tag{24}$$

folgt, so stellen diese Ergebnisse eine strenge Lösung des Gleichungssystems (23) dar. Die Berechnung der Unbekannten geschieht durch ein Iterationsverfahren, das nach dem ersten Rechengang bereits die Endresultate liefert, nachdem die Glieder 2. Ordnung in der Größenordnung von einem Hundertstel der Hauptglieder sind. Zur Berechnung der Glieder 2. Ordnung wurde das Nomogramm 1 entworfen.

Bevor auf die Arbeitsweise mit diesem eingegangen wird, sei noch bemerkt, daß die Korrekturen 2. Ordnung in Gleichung (24) aus Nomogramm 1 im Winkelmaß gefunden werden, es sind deshalb die im Streckenmaß ausgedrückten Elemente  $by$  und  $bz$  in das Winkelmaß umzuformen, was durch die Quotienten  $\frac{by}{B} \rho^c$  und  $\frac{bz}{B} \rho^c$  geschehen ist. Das einfache Nomogramm 2 erlaubt für verschiedene Basislängen sofort die entsprechenden Winkelwerte aus den Streckenmaßen abzugreifen, wobei der Maßstab der gleiche wie im Nomogramm 1 ist.

Die praktische Ermittlung der Glieder 2. Ordnung ist so durchzuführen, daß mittels der reduzierten Parallaxensummen aus der Gleichungsgruppe (24) zuerst die Hauptwerte 1. Ordnung mit dem Rechenschieber berechnet

werden. Man erhält diese Ergebnisse für  $\varphi$ ,  $\alpha$  und  $\omega$  im Winkelmaß, während  $by$  und  $bz$  in Millimetern erhalten werden. Die Produkte 2. Ordnung werden nun mit dem Stechzirkel an der logarithmischen Leiter unterhalb des Nomogramms 1 gebildet, wobei die 0-Stelle mit  $1^g$  bezeichnet wurde. Die Beträge größer als  $1^g$  sind als positive Strecken, die kleiner als  $1^g$  als negative Strecken dargestellt. Hat man nun das Produkt durch graphische Summierung unter Berücksichtigung des Vorzeichens gefunden, so geht man damit in das Nomogramm 1 so ein, daß positive Strecken oberhalb und negative unterhalb der 0-Linie bei der entsprechenden vertikalen Koeffizientengeraden aufgetragen werden. Die Koeffizienten sind für ein Modell konstant und können leicht angegeben werden. Es sind dies die Werte  $\frac{2B}{Z}$ ,  $\frac{B}{Z}$ , 1, 2,  $\frac{2K}{Z}$ ,  $\frac{Z}{2B}$ ,  $\frac{Z}{B} \left(1 + \frac{K}{Z}\right)$ ,  $\frac{Z}{B}$ , wenn man in Gleichung (24) für  $by$  und  $bz$  die Winkelwerte einführt.

An einem praktischen Beispiel soll der Rechenvorgang gezeigt werden. Die in die Ebene  $Z = 250 \text{ mm}$  reduzierten  $y$ -Raumparallaxen sind ausgedrückt in Millimetern

$$\begin{aligned} p_1 &= -1.67, & p_3 &= -2.78, & p_5 &= -1.34. \\ p_2 &= -2.93, & p_4 &= -3.64, \end{aligned}$$

$B = K = 80 \text{ mm}$ ; die strenge Grubersche Punktlage soll vorausgesetzt werden. Für die Bündeldrehungen 1. Ordnung ergeben sich daraus die Werte

$$\begin{aligned} d\alpha_1 &= 100^\circ 00, & dby_1 &= +1.00 \text{ mm}, \\ d\varphi_1 &= 100^\circ 00, & dbz_1 &= +1.00 \text{ mm}, \\ d\omega_1 &= 100^\circ 00, \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Nomogramme 1 und 2 erhält man für die Bündelbewegungen 2. Ordnung in Neuminuten

$$\begin{aligned} d\alpha_{II} &= +0.64 + 0.40 - 1.25 - 0.40 - 0.50 - 1.57 = -2^\circ 68, \\ d\varphi_{II} &= -0.64 - 0.50 - 0.80 - 0.80 + 2.50 - 1.01 + \\ &\quad + 3.14 = +1^\circ 89, \\ d\omega_{II} &= +1.25 + 0.80 - 1.25 - 1.60 + 1.01 = +0^\circ 21, \\ dby_{II} &= -0.004 + 0.050 + 0.031 - 0.050 - 0.060 + 0.040 = +0.007 \text{ mm}, \\ dbz_{II} &= -0.004 + 0.031 - 0.031 + 0.050 - 0.010 - 0.050 - \\ &\quad - 0.010 + 0.060 = +0.036 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Bildet man nun die entsprechenden Summen und führt man die Berechnung ein zweites Mal mit den verbesserten Werten durch, so erhält man dieselben Ergebnisse. Das Iterationsverfahren hat somit bereits nach dem 1. Durchgang die endgültigen Werte geliefert. Man erhält für die endgültigen Bündelbewegungen die Werte

$$d\alpha = 97^\circ 32, \quad d\varphi = 98^\circ 11, \quad d\omega = 100^\circ 21, \quad dby = +1.01 \text{ mm}$$

und  $dbz = + 1.04 \text{ mm}$  als Summe der entsprechenden Werte I. und II. Ordnung. Die Gleichungen (23) werden durch diese Bündeldrehungen bis auf Abrundungsgrößen erfüllt.

Die Glieder 2. Ordnung haben ferner einen Einfluß sowohl auf die bedingte Ausgleichung bei Verwendung von sechs Parallaxen, als auch auf die Parallaxenrelationen. Um die Einflüsse auf die Bedingungsgleichung (13) zu studieren, geht man von der Gleichungsgruppe (12) aus. Die Größenordnung der Glieder 2. Ordnung ist etwa ein Hundertstel der Hauptglieder. Man sieht sofort, daß diese Größen praktisch ohne Einfluß auf die bedingte Ausgleichung bleiben.

(Die Aufstellung dieser Bedingungsgleichung durch ein Iterationsverfahren ist möglich, wenn man sich die Gleichungsgruppe (12) auf der rechten Gleichungsseite durch die Glieder 2. Ordnung ergänzt denkt. Dies gelingt, wenn man die Gleichungen (24) in die Parallaxengleichung (22) für die sechs Schemapunkte einsetzt. Die Summen der Glieder 2. Ordnung werden nun entsprechend dem Iterationsverfahren auf die linke Gleichungsseite gebracht, wodurch an Stelle der gemessenen Parallaxen  $p^*$  die Summen  $p^* \pm \Delta p^*$  in die Bedingungsgleichung (13) einzusetzen sind. In einer folgenden Arbeit werden diese hier skizzierten Berechnungen durchgeführt werden.)

Die erweiterten Parallaxenrelationen werden durch Einsetzen der Werte aus der Gleichungsgruppe (24) in die für gebirgiges Gelände transformierten Gleichungen (23) gewonnen. Man erhält:

$$\begin{aligned}
 p_1^* &= p_1, \\
 p_2^* &= p_2 - 2 \varepsilon \zeta_2 p_1 + \varepsilon \zeta_2 p_3 + \varepsilon \zeta_2 p_5 - \frac{\Delta Z_2}{B} dby d\varphi - \frac{\Delta Z_2}{B} dbz dx - 2 \zeta_2 dbz d\omega \\
 &\quad - \Delta Z_2 d\varphi dx + 2 B \zeta_2 d\varphi d\omega, \\
 p_3^* &= p_3 \left( \varepsilon \zeta_3 + \frac{1}{Z_3'} \right) + p_1 \left( -2 \varepsilon \zeta_3 + \frac{\zeta_3}{Z_3'} \right) + p_5 (\varepsilon \zeta_3) \\
 &\quad - \frac{\Delta Z_3}{B} dby d\varphi - \frac{\Delta Z_3}{B} dbz dx - 2 \zeta_3 dbz d\omega \\
 &\quad - \Delta Z_3 d\varphi dx + 2 B \zeta_3 d\varphi d\omega, \\
 p_4^* &= p_4 \frac{1}{Z_4'} + p_1 (-2 \varepsilon \zeta_4) + p_2 \frac{\zeta_4}{Z_4'} + p_3 \varepsilon \zeta_4 + p_5 \varepsilon \zeta_4 - \frac{\Delta Z_4}{B} dby d\varphi - \frac{\Delta Z_4}{B} dbz dx \\
 &\quad - 2 \zeta_4 dbz d\omega - \Delta Z_4 d\varphi dx + 2 B \zeta_4 d\varphi d\omega, \\
 p_5^* &= p_5 \left( \varepsilon \zeta_5 + \frac{1}{Z_5'} \right) + p_1 \left( -2 \varepsilon \zeta_5 + \frac{\zeta_5}{Z_5'} \right) + p_3 \varepsilon \zeta_5 - \frac{\Delta Z_5}{B} dby d\varphi - \\
 &\quad - \frac{\Delta Z_5}{B} dbz dx - 2 \zeta_5 dbz d\omega - \Delta Z_5 d\varphi dx + 2 B \zeta_5 d\varphi d\omega.
 \end{aligned} \tag{25}$$

In diesen Gleichungen sind nur jene Glieder angeführt, die praktisch eine Rolle spielen können. Für die praktische Berechnung hätte man also zu den

Verbesserungen 2. Ordnung, wie sie sich aus den Gleichungen (24) ergeben, noch zweite Verbesserungen aus den Parallaxenrelationen (25) hinzuzufügen. Zur Auflösung der Gleichungen (25) wendet man wieder ein Iterationsverfahren an, wonach die Summe der Glieder 2. Ordnung für jede Parallaxe zu bilden ist. Aus den Gleichungen (10) ergeben sich dadurch wieder Verbesserungen für die Ebenenparallaxen  $p$ , die schließlich die zweiten Verbesserungen für die Orientierungselemente ergeben. Im angeführten Rechenbeispiel würden bei maximalen  $\zeta$ -Werten von 0·25 der Flughöhe die Einflüsse auf die Ebenenparallaxen etwa  $\pm 0\cdot001 \text{ mm}$  betragen; sie können praktisch vernachlässigt werden.

Abschließend soll die chronologische Reihenfolge dieser Berechnungen angeführt werden.

1. Messung der  $y$ -Parallaxen ohne Vororientierung;
2. Ausgleich der  $y$ -Parallaxen nach Gleichung (13);
3. Reduktion der  $p^*$ -Werte auf die  $p$ -Werte nach Gleichung (10);
4. Berechnung der Werte 1. Ordnung für  $dby$ ,  $dbz$ ,  $d\varphi$ ,  $dx$ ,  $d\omega$  nach den Gleichungen (2) oder (3);
5. Berechnung der Glieder 2. Ordnung, nach Gleichung (25), deren Summe jeweils  $\Delta p^*$  ergibt, woraus mittels Gleichung (10) die endgültigen ebenen Parallaxen gefunden werden;
6. Berechnung der Verbesserungen der Orientierungselemente wegen  $\Delta p^*$  und wegen der Glieder 2. Ordnung entsprechend Gleichung (24).

Die Glieder 2. Ordnung in Gleichung (25) lassen sich sehr rasch durch eine dem Nomogramm 1 sehr ähnliche Netztafel berechnen. Es sind lediglich die Koeffizienten und die Bezifferungen entsprechend zu ändern.

### VIII. Z u s a m m e n f a s s u n g

1. Das vorliegende Orientierungsverfahren gestattet, die Bündelbewegungen mathematisch streng und ohne Idealisierung des Geländes zu berechnen.

2. Die aufgewendeten Zeiten sind trotz strenger Berechnung nicht nur nicht größer, sondern werden bei Verwendung geeigneter Rechentafeln und Nomogramme kürzer als bei den meisten bisher veröffentlichten Verfahren, wobei die Herleitung der Endformeln einfach und übersichtlich ist. Sonderfälle, für die das Verfahren nicht oder nur auf Umwegen, etwa durch Eindrehen „künstlicher“  $d\omega$  usw., konvergiert, treten nicht auf.

3. Durch die Reduktion der Parallaxen auf die Ebene ist die Berücksichtigung der Glieder 2. Ordnung relativ einfach möglich. Dadurch ist die Vororientierung überflüssig geworden. Dies ist wohl einer der wesentlichsten Vorteile dieses Verfahrens. Es wurde bisher noch bei keinem Orientierungsverfahren <sup>7)</sup> auf die Berechnung der Glieder 2. Ordnung eingegangen. Nach-

<sup>7)</sup> F. Schroeder, Die rechnerische Orientierung von Luftbildaufnahmen auf Grund von Messungen am Stereokomparator und ihr Verhältnis zu den optisch-mechanischen Verfahren! Dieses Verfahren beruht auf Parallaxenmessungen im Komparator und ist nach Finsterwalder für die Praxis ungeeignet.

dem durch die Gleichungen von H. Bernhard [9] auch die Einflüsse der Achsstellungen am Gerät berechnet werden können, ist bei Ausführung einer Relativorientierung nach diesem Verfahren wohl eine hohe Genauigkeit zu erwarten. Es sei jedoch ausdrücklich festgestellt, daß diese Gleichungen vom Verfahren unabhängig und daher am Ende jedes Orientierungsverfahrens anzuschließen sind.

4. Die Grubersche Grundrißpunktlage ist durch Entwicklung geeigneter Formeln nicht unbedingt erforderlich, obwohl bei ihrer Einhaltung das Verfahren sehr abgekürzt wird.

5. Das Verfahren ist ein rein numerisches und auf einfachen Formeln aufgebaut; es kann daher auch von theoretisch wenig geschulten Kräften, die lediglich  $y$ -Parallaxen genau zu messen imstande sind, durchgeführt werden. Die in dieser Arbeit skizzierten Tabellen und Nomogramme stellen bloß Vorschläge dar; die Praxis wird zeigen, welche Form von Tabellen und Nomogrammen schließlich die besten technischen und wirtschaftlichen Ergebnisse liefert.

#### L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s :

- [1] *W. K. Bachmann* Théorie des erreurs de l'orientation relative, Lausanne, Imprimerie La Concorde 1943.
- [2] *Van der Weele* Die numerische gegenseitige Orientierung auf die Aerotriangulation angewendet. Bulletin de la Société Belge de Photogrammetrie 1951, Nr. 23.
- [3] *H. Kasper* Ein numerisches Verfahren des Folgebildanschlusses für gebirgiges Gelände. Schweizer Zeitschr. f. Verm.Wesen 1950, Heft 4.
- [4] *H. Schmid* Fehlertheoretische Untersuchung der neueren Verfahren zur gegenseitigen Orientierung von Luftbildern. Österr. Zeitschr. f. Verm.Wesen 1952, Heft 2—4.
- [5] *G. Poivilliers* Formation de l'image plastique dans les appareils de restitution. Photogrammetria 1949/50, Heft 3.
- [6] *L. Pauwen* Sur un procédé d'orientation relative fondé sur la mesure des parallaxes verticales en de nombreux points. Bulletin de la Société Belge de Photogrammetrie 1949.
- [7] *H. Schmid* Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung von Luftbildern unter Zugrundelegung eines Orientierungspunktgitters. Sitzungsberichte der Österr. Akademie der Wissenschaften Mathem.-naturw. Klasse, Abtlg. II a, 159. Bd. 3. bis 6. Heft, 1950.
- [8] *K. Killian* Luftbild und Lotrichtung. Festschrift Doležal zum 90. Geburtstag.
- [9] *H. Bernhard* Über den Einfluß der Achsstellungen des Auswertegerätes auf die gegenseitige Orientierung von Luftaufnahmen (unter besonderer Berücksichtigung der Autographen A 5 und A 7 von Wild). Erscheint demnächst in der Photogrammetria.
- [10] *O. v. Gruber* Ferienkurs für Photogrammetrie. Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart 1930.
- [11] *J. Krames* Über ein graphisches Verfahren zum gegenseitigen Einpassen von Luftaufnahmen. Ö. Z. f. V. W. 1949.
- [12] *J. Krames* Graphisches Einpassen von Luftaufnahmen bei beschränktem Gesichtsfeld . . . . . Ö. Z. f. V. W. 1953 (siehe dort weitere Literaturhinweise).

### *Berichtigungen und Ergänzungen*

1. Seite 52, Absatz 2, Zeile 7 ist nach „600 m“ einzufügen: „bei einer Flughöhe von etwa 2500 m über Grund“.
2. Seite 53, Absatz 3, Zeile 8: der Betrag von 15% ist praktisch noch nicht nachgewiesen worden und scheint zu groß zu sein.
3. Seite 76, Fußnote zur 4. Zeile von unten: „Der mittlere Fehler einer Parallaxenmessung vor der Ausgleichung ( $m_p$ ) ist durch  $\sqrt{[\overline{v^2}]}$  gegeben.“
4. Das Berechnungsschema 1 gehört im 2. Punkt „Parallaxenausgleich“ in der Zeile 5 durch „ $m_p = \pm 0.023$ “ ergänzt.

## Kleine Mitteilungen

### Prof. Simon Stampfer — ein Pionier der Kinematographie

In der Bibliothek der Technischen Hochschule Wien befindet sich unter den vielen Werken des bekannten Geodäsieprofessors Simon Stampfer auch ein kleines Büchlein, betitelt: „Die stroboscopischen Scheiben oder optischen Zauberscheiben. Deren Theorie und wissenschaftliche Anwendung, erklärt von dem Erfinder S. Stampfer, Professor der Praktischen Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien.“ Es erschien im Verlag Trentsensky und Vieweg, Wien und Leipzig, im Jahre 1833. Diese Zauberscheiben, welche ein in früheren Zeiten beliebtes optisches Spielzeug waren, bestanden ursprünglich aus zwei miteinander fest verbundenen horizontalen Scheiben, die um eine gemeinsame vertikale Achse in Drehung versetzt werden konnten. Die obere Scheibe hatte längs des Umfanges geeignete Schaulöcher, denen gegenüber auf der unteren Scheibe Bilder angebracht waren, die die einzelnen Phasen einer periodischen Bewegung (z. B. Phasen aus der Bewegung eines laufenden Pferdes) darstellten. Der Beobachter blickte in fixer Richtung durch die Schaulöcher der in Rotation befindlichen Scheiben auf die immer wechselnden Bilder und bekam den Eindruck eines „lebenden Bildes“. Dieser optische Apparat, der später auch in Form eines um seine vertikal stehende Achse drehbaren Zylinders, Wundertrommel genannt, gebaut wurde, beruht auf der Eigenschaft des menschlichen Auges, daß die Lichtempfindung etwas länger dauert als der sie hervorrufende Reiz. Diese Nachwirkung, die die Verschmelzung zweier aufeinanderfolgender Bilder bewirkt, erzeugt einen kontinuierlichen Eindruck. Dies ist die physiologische Grundlage der Kinematographie.

Die diesbezüglichen optischen Täuschungsphänome waren schon längere Zeit bekannt und z. B. von Faraday beschrieben worden. Stampfer war jedoch der erste, der auf den Gedanken kam, sie zur Erzeugung „lebender Bilder“ zu verwenden und einen entsprechenden Apparat zu bauen.

Leider sind in der letzten Zeit zwei Publikationen erschienen, die diese eindeutig von Stampfer gemachte Erfindung als gemeinsame Arbeit des Verlagsbuchhändlers M. Trentsensky und Professor Stampfers hinstellen\*). Daß dies nicht zutreffend ist, ergibt sich aus dem Titel des Büchleins, aber auch aus dem von den Verlagsbuchhändlern Trentsensky und Vieweg verfaßten und unterschriebenen Vorwort dazu, in dem sie mitteilen, daß Herr Professor Stampfer im Dezember 1832 seine Versuche mit den stroboskopischen Scheiben begonnen habe und im Februar 1833 eine Sammlung von sechs Doppelscheiben fertig hatte, die bald bekannt wurde. Das Interesse, welches diese Erfindung erregte, war weit über seine Erwartung, und von allen Seiten, besonders hohen Ortes aufgefordert, diese, Österreich gebührende neueste Erfindung im Gebiete

---

\*) Notring Almanach 1954. S. 83. „Die Privilegiensammlung der Technischen Hochschule in Wien“ und Band 20 der „Abhandlungen des Dokumentationszentrums für Technik und Wirtschaft“ von A. Grüller.