

Paper-ID: VGI_195412



Die Rolle der Grundlinien bei der Netzprojektion

Karl Ledersteger ¹

¹ *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **42** (4, 5), S. 106–113, 143–148

1954

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Ledersteger_VGI_195412,  
Title = {Die Rolle der Grundlinien bei der Netzprojektion},  
Author = {Ledersteger, Karl},  
Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {106--113, 143--148},  
Number = {4, 5},  
Year = {1954},  
Volume = {42}  
}
```



Die Rolle der Grundlinien bei der Netzprojektion

Von K. Ledersteger, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

In einem kürzlich erschienenen Aufsatz ¹⁾ habe ich versucht, die beiden möglichen Verfahren der astronomisch-geodätischen Netzausgleichung, die translative und die projektive Methode der astronomischen Geodäsie, systematisch zu umschreiben und nachzuweisen, daß man mit beiden Verfahren — bei der translativen Methode allerdings nur mehr oder minder bewußt — eigentlich dasselbe Ziel anstrebt, nämlich das naturtreue Netz. Dabei wollen wir unter dem naturtreuen Netz jene Konfiguration der Dreieckspunkte auf dem eindeutig gelagerten und mit dem Normalsphäroid der Erde fast vollständig zusammenfallenden mittleren Erdellipsoid verstehen, die aus einer Projektion der Geoidpunkte hervorgeht. Prinzipiell könnte man der Definition des naturtreuen Netzes im Sinne H e l m e r t s natürlich auch die Projektion der tatsächlichen Meßpunkte auf der physischen Erdoberfläche zugrundelegen. Dies hätte sogar den großen Vorteil, daß dadurch die mit der Lotlinienkrümmung verbundenen Schwierigkeiten des Überganges von den Oberflächen- zu den Geoidpunkten umgangen wären. Doch sollte dieser kluge Ausweg H e l m e r t s nicht mehr beschritten werden, seit man nach V e n i n g M e i n e s z ²⁾ die absoluten Lotabweichungen auf gravimetrischem Wege ableiten kann und seitdem eine astronomisch-gravimetrische Methode ³⁾ gleichzeitig das mittlere Erdellipsoid und die absolute Lage der Triangulierungsnetze liefert. Diese beiden Möglichkeiten lassen nämlich eine exakte Gegenüberstellung von Geoid und mittlerem Erdellipsoid wünschenswert erscheinen.

Die früher allgemein übliche Methode der rein geometrischen Netzausgleichung, gefolgt von einer geodätischen Übertragung auf einem beliebigen Referenzellipsoid, welchen Vorgang man kurz als „Netzausbreitung“ bezeichnen darf, führt auf systematische L a p l a c e s c h e Widersprüche, die aufs engste mit dem translativen Prinzip einer differentiellen Verschiebung des Netzes auf dem Referenzellipsoid zusammenhängen. Ganz allge-

¹⁾ K. L e d e r s t e g e r: „Die translative und die projektive Methode der astronomischen Geodäsie“, Schweizerische Zeitschrift f. Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, 52. Jg., 1954.

²⁾ F. A. V e n i n g M e i n e s z: A formula expressing the deflection of the plumb line in the gravity anomalies and some formulas for the gravity potential outside the geoid, Proc. Koninkl. Akad. Wet. Amsterdam, Band 31, Nr. 3, 1928.

³⁾ K. L e d e r s t e g e r: Die Achse des Normalsphäroides der Erde, Österr. Zeitschrift f. Vermessungswesen, 38. Jg., 1950, Seite 113—129.

—: Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides und der absoluten Lage der Landstriangulationen, Sonderheft 12 der Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, Wien 1951.

mein ist eine unmittelbare Projektion auf das Referenzellipsoid oder ein „geodätisch fehlerfreies“ Netz nur zu erzielen, wenn sowohl die *L a p l a c e*-schen Bedingungen in die Netzausgleichung einbezogen als auch die Grundlinien exakt auf das Referenzellipsoid reduziert werden. Je nach der Art der Projektion treten nun in der *L a p l a c e*-schen Gleichung kleine Zusatzglieder auf, deren negative Beträge man auch als „theoretische Widersprüche“ des üblichen *L a p l a c e*-schen Binoms deuten kann. Sie sind aber nicht gefährlich, weil sie nicht systematisch anwachsen und im übrigen für die *P i z z e t t i*-sche Projektion der Geoidpunkte fast vollständig verschwinden. Hingegen ist die exakte Reduktion der Grundlinien mangels Kenntnis der Höhen z des Geoides über dem Referenzellipsoid nicht durchführbar, was letzten Endes zur Netzausbreitung und Translation geführt hat.

H e l m e r t's klassische Methode der astronomisch-geodätischen Netzausgleichung, deren Zweck bekanntlich einerseits die verschärfte Orientierung in den Dreieckspunkten 1. O., andererseits die Aufstellung eines wissenschaftlichen Lotabweichungssystems war, kann auch als Angleichung des ausgebreiteten Netzes an eine Projektion gedeutet werden, sofern dabei die *L a p l a c e*-schen Bedingungen streng erfüllt werden. Ja noch mehr! Da sich alle Korrekturen in Funktion der noch offenen Lotabweichung des Fundamentalpunktes und der möglichen Abänderung der Ellipsoidparameter ergeben, könnte das Ergebnis der Ausgleichung die Gesamtheit aller Projektionen darstellen, wenn ebenso exakt die Eigenheiten des Projektionsmaßstabes erfaßt wären. Dies ist aber leider nicht der Fall, obwohl die Grundlinien für die Erzielung der Projektion genau so wichtig sind wie die *L a p l a c e*-schen Gleichungen. Denn die *L a p l a c e*-schen Widersprüche sind unempfindlich gegenüber einer gleichförmigen Änderung des Maßstabes eines Dreiecksnetzes oder gegenüber einer Längenänderung geodätischer Linien.

Im Folgenden soll daher im Anschluß an die eingangs zitierte Arbeit die Frage untersucht werden, inwieweit bei den verschiedenen Verfahren der astronomisch-geodätischen Netzausgleichung die wichtige Funktion der Grundlinien gebührend beachtet wurde. Solange man die Grundlinien überhaupt nur auf das Geoid reduzieren konnte, standen für die ältere Netzausbreitung prinzipiell zwei Möglichkeiten offen:

a) Man führte die Grundlinien als fehlerfreie Größen, also mit unendlichem Gewicht in die Ausgleichung ein. *H e l m e r t*'s einziges Bedenken gegen die Mitnahme der Basisgleichungen als Zwangsbedingungen bestand allein in der mangelnden Reduktion der Grundlinien. „Verbesserungen anzubringen erscheint schon darum überflüssig, weil das Verhältnis zweier Basislängen aus ihren Messungen weit schärfer hervorgeht als aus den Winkelmessungen“ (*H e l m e r t*, Höhere Geodäsie I, Seite 499).

b) Man glied das Netz nur hinsichtlich der Winkelmessungen aus und bestimmte den Netzmaßstab nachträglich so, daß das Netz in seinen Dimensionen möglichst gleichmäßig allen Grundlinien angepaßt ist, daß es also einen Maßstab erhält, der dem Mittel aus allen Grundlinien entspricht.

Für die Gewinnung eines geodätisch fehlerfreien Netzes muß demgegenüber die Veränderlichkeit des Projektionsmaßstabes möglichst sicher erfaßt werden, was nur durch exakte Reduktion der Grundlinien auf das Referenzellipsoid, somit nur bei Kenntnis der zugehörigen Geoidhöhen z erreicht werden kann. Dabei sind die rasch wechselnden lokalen Geoidstörungen nur von sehr geringem Einfluß, so daß wir die Untersuchung auf die systematischen Neigungen zwischen Geoid und Referenzellipsoid beschränken dürfen. Solche systematische Geoidneigungen sind teils physikalischen, teils geometrischen Ursprunges. Physikalisch handelt es sich um die mit den großen kontinentalen Geoidwellen verbundene systematische Änderung der Undulationen ζ . Von diesen unterscheiden sich rein geometrisch die auf das Referenzellipsoid bezogenen Geoidhöhen z , deren systematischer Charakter dadurch bedingt ist, daß die Referenzellipsoide in ihren Dimensionen und in ihrer Lage vom mittleren Erdellipsoid abweichen.

Am einfachsten ist die richtige Reduktion der Grundlinien für das naturtreue Netz zu bewerkstelligen. Eine bereits auf das Geoid reduzierte Grundlinie habe die Länge s . Ist dann ζ die Undulation im Basismittelpunkt, liegt ferner daselbst die absolute Lotabweichung ϑ mit den Komponenten ξ und η im Azimut A , während die Grundlinie im Azimut α verläuft, so ist die mittlere Neigung ε der Grundlinie gegenüber dem mittleren Erdellipsoid

$$\varepsilon = \vartheta \cos(\alpha - A) = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \quad (1)$$

und es ergibt sich für die weitere Reduktion der Grundlinie auf das eindeutig gelagerte mittlere Erdellipsoid strenge

$$s' = s \cos \varepsilon \left(1 - \frac{\zeta}{R}\right) = \left[1 - 157 \cdot 10^{-9} \zeta_m - \frac{\varepsilon^2}{2}\right] s. \quad (2)$$

Wie man leicht erkennt, darf das Neigungsglied vollständig unterdrückt werden; es macht für $\varepsilon = 10''$ und $s = 10 \text{ km}$ nur $125 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ aus.

Nunmehr betrachten wir eine lange geodätische Linie s auf dem Geoid, deren beide Endpunkte A und B durch eine Dreieckskette verbunden sind, wobei Anfangs- und Endseite je Vergrößerungsseite einer Basis sei (Fig. 1). Für die Projektion dieser Linie auf das Erdellipsoid findet man

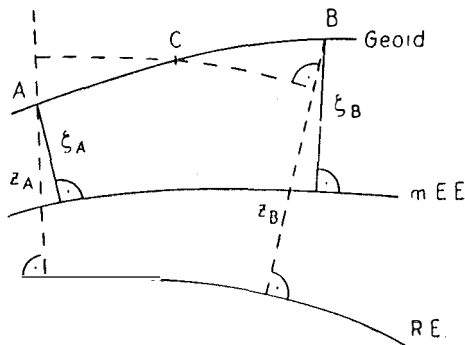


Fig. 1

$$s' = \int_A^B \left(1 - \frac{\zeta}{R}\right) ds \doteq s - \frac{1}{a} \int_A^B \zeta ds, \quad (3)$$

da man den lokalen Krümmungsradius R im jeweiligen Azimut α der Linie mit ausreichender Genauigkeit durch die große Halbachse a des Erdellipsoides ersetzen darf. Ferner ergibt sich für die Undulation im laufenden Punkt P

$$\zeta_P = \zeta_A + \int_A^P \varepsilon ds. \quad (4)$$

Die Auswertung des Integrales in (3) mittels mechanischer Quadratur erfordert die Kenntnis der Geoidundulationen entlang unserer geodätischen Linie. Näherungsweise kann man jedoch $\varepsilon = \frac{d\zeta}{ds}$ oder, falls man allgemeiner ein beliebiges Referenzellipsoid zugrundelegt, $\varepsilon = \frac{dz}{ds}$ durch einen konstanten Mittelwert k ersetzen, für den sich aus (4)

$$k = \frac{1}{s} (\zeta_B - \zeta_A), \text{ resp. } \frac{1}{s} (z_B - z_A) \quad (5)$$

ergibt. Dies entspricht der Annahme eines linearen Maßstabgefälles zwischen A und B . Mit k folgt aber aus (3)

$$s' = \left(1 - \frac{z_A}{a}\right) s - \frac{ks^2}{2a} = \left[1 - \frac{(z_A + z_B)}{2a}\right] s. \quad (6)$$

Geometrisch kann dies so interpretiert werden, daß die geodätische Linie s zuerst eine Drehung um ihren Mittelpunkt C in die zum Referenzellipsoid parallele Lage erfährt und sodann aus der dem Punkt C gemäß der Annahme einer konstanten mittleren Neigung zugehörigen mittleren Höhe $\frac{1}{2} (z_A + z_B)$ auf das Ellipsoid projiziert wird. Dies darf aber keineswegs dahin mißverstanden werden, daß die Linie bei der Projektion einen mittleren Maßstab erhält, wie er durch

$$ds' = \left[1 - \frac{(z_A + z_B)}{2a}\right] ds \quad (7)$$

definiert wäre. Vielmehr erfährt bei der vorhergehenden Drehung wegen der Divergenz der Ellipsoidnormalen die gehobene Hälfte der Linie eine Streckung, die gesenkte Hälfte eine Verkürzung vom gleichen Betrag.

Dieses lineare Maßstabgefälle der Projektion wird aber in der Basisgleichung durch entsprechende Änderung der Dreieckswinkel nur dann richtig vermittelt, wenn die reduzierten Grundlinien als Zwangsbedingungen mit unendlichem Gewicht eingeführt werden. Dies scheint nicht nur gerechtfertigt, weil im wesentlichen das obige Urteil *H e l m e r t s* aufrecht bleibt, sondern auch notwendig, weil die Einführung von Verbesserungen für die

gemessenen Grundlinien entgegen der Projektion im Sinne einer Maßstabglättung, d. h. der Angleichung an einen mittleren Maßstab (7) wirken würde. Jegliche Grundlinienausgleichung hat eben einen einheitlichen Maßstab zur Voraussetzung, der durch p Grundlinien $(p-1)$ fach überbestimmt ist.

Andererseits ist zu bedenken, daß eine Undulationsdifferenz $(\zeta_B - \zeta_A)$ oder eine Geoidhöhendifferenz $(z_B - z_A) = + 6.4 \text{ m}$ erst eine relative Verkürzung der zweiten Basis von $1 : 10^6$ bedingt, welcher Effekt sehr wohl durch die auf systematischen Fehlerquellen beruhende äußere Unsicherheit in der Basismessung überboten werden kann. Namentlich bei Verwertung älteren Grundlinienmateriales oder bei geringeren Abständen der benachbarten Grundlinien wird sich also eine Einführung von Verbesserungen für die Vergrößerungsseiten nicht vermeiden lassen. Denn die Zwangsbedingung ist an die Voraussetzung gebunden, daß der mittlere Fehler der Maßstabübertragung U zwischen zwei Vergrößerungsseiten deren mittleren Fehler weit überwiegt oder daß

$$K = \sqrt{m_{s_1}^2 + m_{s_2}^2} \quad : \quad m_U \sim 0 \quad (8)$$

ist⁴⁾. Dann aber muß die Grundlinienausgleichung streng genommen mit den auf das Geoid reduzierten Grundlinien durchgeführt werden. Denn die Punktkonfiguration auf dem Geoid gilt als Urbild mit einheitlichem Maßstab, der durch die Projektion auf das Referenzellipsoid verloren geht. Wieder zeigt sich der große Vorteil des naturtreuen Netzes; die Undulationen ζ sind ja trotz der kontinentalen Geoidwellen nicht derselben Gefahr eines systematischen Anwachsens ausgesetzt wie die Geoidhöhen z bezüglich eines Referenzellipsoides.

Die bisherigen Betrachtungen sind von der Voraussetzung ausgegangen, daß das Dreiecksnetz auf dem Geoid liegt und lediglich die Grundlinien auf das Ellipsoid reduziert werden. Es war dies notwendig, um klar das Maßstabgefälle der Projektion zu erkennen. Werden aber die Dreieckswinkel ebenso wie die Grundlinien exakt auf das Referenzellipsoid reduziert, so erübrigt sich natürlich die Bezugnahme auf das geoidische Urbild und es steht einer Grundlinienausgleichung nichts im Wege. Letztere darf also prinzipiell immer nur dann durchgeführt werden, wenn alle Beobachtungen (Winkel und Grundlinien) streng auf das Ellipsoid reduziert sind. Im Falle einer *Helmer*-Projektion wäre es z. B. verfehlt, die wegen der Geoidhöhen reduzierten Grundlinien einer Ausgleichung zu unterziehen, wenn die Reduktion $d_1\alpha$ der Richtungen vom astronomischen auf das ellipsoidische Zenit mangels Kenntnis der Lotabweichungen unterblieben ist. Hier wird gerade umgekehrt die Basis-Zwangsbedingung die unvollständig reduzierten Dreieckswinkel im Sinne der Projektion verbessern!

Der Fall eines Geoidberges wurde bereits in der angeführten Arbeit¹⁾ an einem extrem gewählten Beispiel diskutiert. Der Geoidbogen $AC = 2783$

⁴⁾ H. Wolf: Allgemeine Betrachtungen zur Grundlinien-, Azimut- und Schleifenausgleichung des Zentraleuropäischen Netzes, Heft 4 der Veröff. d. Institutes für Erdmessung, Bamberg 1949.

km erfuhr dort für $z_A = 0 \text{ m}$, $z_C = 103.7 \text{ m}$ unter der Annahme eines linearen Maßstabgefälles oder einer konstanten Neigung $\varepsilon = 7''.7$ bei der Projektion eine Verkürzung um 22.6 m . Um zu zeigen, wie sich dieser Betrag auf die beiden Hälften des Bogens aufteilt, unterteilen wir ihn durch den Mittelpunkt E mit der Geoidhöhe $z_E = 51.85 \text{ m}$ und finden für $d = AE = EC = 1391.5 \text{ km}$:

$$\begin{aligned} d_1' &= d \left[1 - \frac{51.85}{2a} \right] = d \left[1 - 4065 \cdot 10^{-9} \right] = d - 5.66 \text{ m}; \\ d_2' &= d \left[1 - \frac{155.55}{2a} \right] = d \left[1 - 1219 \cdot 10^{-8} \right] = d - 16.97 \text{ m}. \end{aligned} \quad (9)$$

Nach (7) hätte sich hingegen $d_1' = d_2'$ ergeben! Das in (9) klar zum Ausdruck kommende lineare Maßstabgefälle stellt natürlich nur eine Näherung dar, die umso mehr gerechtfertigt erscheint, je kleiner der gegenseitige Abstand der Grundlinien ist. In obigem Beispiel bleibt die Gesamtverkürzung des Bogens von 22.6 m um 7.3 m , d. s. $1:380\,000$ hinter dem wahren Wert zurück. Andererseits entspricht bei einem Grundlinienabstand von $s = 300 \text{ km}$ einer mittleren Geoidneigung $\varepsilon = 10''$ erst eine Höhendifferenz $(z_B - z_A) = 14.5 \text{ m}$ und eine Bogendifferenz $(s - s') = 0.34 \text{ m}$.

Zusammenfassend darf festgestellt werden, daß es bei der Herstellung des Projektionsmaßstabes immer nur auf die mittlere Geoidneigung, niemals aber auf mehr lokale Krümmungsunterschiede zwischen zwei aufeinander folgenden Grundlinien bei verschwindender mittlerer Neigung ankommt. Ein Geoidberg könnte nur gefährlich werden, wenn die Grundlinien mehrere 1000 km auseinander liegen würden.

Es bleibt noch die Frage der Geoidhöhen z zu erörtern. Die dritte der projektiven Lotabweichungsgleichungen von V e n i n g M e i n e s z⁵⁾ kann mit Hilfe der sphärischen Beziehungen des Dreieckes Fig. 2 in folgende, sphärisch vereinfachte Form gebracht werden:

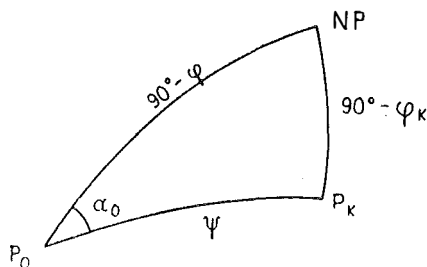


Fig. 2

$$\begin{aligned} \Delta z_k &= -a \vartheta_0 \sin \psi \cos (\alpha_0 - A) + \Delta z_0 \cos \psi - \\ &- (1 - \cos \psi) da - a (1 - \cos \psi) \sin^2 \varphi_0 da + a (\sin \varphi_k - \sin \varphi_0)^2 da. \end{aligned} \quad (10)$$

⁵⁾ F. A. V e n i n g - M e i n e s z: New formulas for systems of deflections of the plumb-line and Laplace's theorem, und: Changes of deflections of the plumb-line brought about by a change of the reference-ellipsoid, Bulletin géodésique Nr. 15, 1950.

Hierin bedeutet ϑ_0 die Lotabweichung im Fundamentalpunkt P_0 .

$$\xi_0 = \vartheta_0 \cos A \quad , \quad \eta_0 = \vartheta_0 \sin A \quad (10a)$$

und lautet das erste Glied, in Metern ausgedrückt:

$$- 31 \vartheta_0'' \sin \psi \cos (\alpha_0 - A).$$

Die Formel liefert, ausgehend von jener Lage des Referenzellipsoides, bei der es das Geoid im Fundamentalpunkt P_0 berührt, die Änderung Δz_k der Geoidhöhe des Punktes P_k in Funktion der bei einer gegenseitigen Verschiebung von Geoid und Ellipsoid in P_0 auftretenden Lotabweichung ϑ_0 , der daselbst entstehenden Geoidhöhe Δz_0 und in Funktion einer Änderung da und $d\alpha$ von Achse und Abplattung des Ellipsoides. Zur Abschätzung der Anteile der einzelnen Glieder an Δz_k setzen wir $\cos (\alpha_0 - A) = 1$ und $da = + 565 \cdot 10^{-7}$, entsprechend dem Übergang von der Abplattung 1:300 zur Abplattung 1:295. Nimmt man ferner $\varphi_0 = 45^\circ$ an, so wird $a \cdot da = + 360 m$ und $a \cdot da \sin^2 \varphi_0 = + 180 m$. Für den Bogen $\psi = P_0 P_k$ setzen wir der Reihe nach $5^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ und 40° und schließlich für das fünfte Glied $\varphi_k = 40^\circ, 35^\circ, 25^\circ, 15^\circ$ und 5° . Damit erhalten wir folgende kleine Tabelle:

ψ u. $(\varphi_0 - \varphi_k)$	+	5°	10°	20°	30°	40°
$\vartheta_0 = + 10''$	—	27 m;	— 54 m;	— 106 m;	— 155 m;	— 199 m
$\Delta z_0 = + 100 m$	+	100	+ 98	+ 94	+ 87	+ 77
$da = + 1 km$	—	4	— 15	— 60	— 134	— 234
4. Glied	—	1	— 3	— 11	— 24	— 42
5. Glied	+	1	+ 6	+ 29	+ 72	+ 139

Der Einfluß einer horizontalen Verschiebung des Referenzellipsoides nimmt mit wachsendem Abstand des Punktes P_k vom Ursprung P_0 annähernd linear, der Einfluß einer Achsenänderung annähernd quadratisch zu, während der Einfluß einer vertikalen Verschiebung langsam abnimmt. Eine Änderung der Abplattung macht in kleineren Abständen fast nichts aus. Wie man sieht, dürfen diese Änderungen der Geoidhöhen bei größeren Änderungen des Referenzellipsoides hinsichtlich seiner Lage oder seiner Dimensionen, besonders aber bei kontinentalen Netzen nicht vernachlässigt werden.

Im Mittelpunkt P_k einer bereits auf dem Geoid liegenden Basis sei bezüglich der Ausgangslage eines beliebigen Referenzellipsoides die Geoidhöhe z_k vorhanden. Um auf das eindeutig gelagerte mittlere Erdellipsoid überzugehen, haben wir im Fundamentalpunkt P_0 die absolute Lotabweichung ϑ_0 und die Undulation ζ_0 herzustellen und gleichzeitig die Ellipsoidparameter entsprechend abzuändern (da und $d\alpha$). Damit ändert sich die Geoidhöhe in P_k nach (10) um Δz_k , wodurch die Undulation $\zeta_k = z_k + \Delta z_k$ entsteht, und es folgt unmittelbar:

$$z_k = \zeta_k + a \xi_0 \sin \psi \cos \alpha_0 + a \eta_0 \sin \psi \sin \alpha_0 - \zeta_0 \cos \psi + a (1 - \cos \psi) \left(\frac{da}{a} + \sin^2 \varphi_0 \cdot d\alpha \right) - a (\sin \varphi_k - \sin \varphi_0)^2 da. \quad (11)$$

Mit dieser Formel sind die Geoidhöhen z_P bezüglich der Ausgangslage jedes beliebigen Referenzellipsoides berechenbar, wenn das mittlere Erdellipsoid, die absolute Lotabweichung im Fundamentalpunkt und die Geoidundulation bekannt sind. Die Formel gestattet für jede gewünschte Helmer- oder Pizzetti-Projektion eine einwandfreie Reduktion der Grundlinien auf das Referenzellipsoid. Damit steht der Anwendung der projektiven Methode der astronomischen Geodäsie nichts mehr im Wege; man kann jegliche Projektion sofort erzielen, wenn zur Versicherung der geodätischen Fehlerfreiheit sowohl die Laplace'schen Bedingungen wie auch die exakt auf das Referenzellipsoid reduzierten Grundlinien oder ihre Vergrößerungsseiten als Zwangsbedingungen in die Netzausgleichung eingeführt werden. Eine eventuelle Grundlinienausgleichung ist jedenfalls nur dann empfehlenswert, wenn auch die Winkel exakt reduziert sind. Doch hat dieser Fall nur mehr systematische Bedeutung. Denn sind einmal die Voraussetzungen für die Auswertung von (11) gegeben, so wird man sofort das naturtreue Netz suchen und alle übrigen Projektionen haben jegliches praktische Interesse verloren.

Mangels Kenntnis der Geoidhöhen z hat man früher bekanntlich alle Grundlinien auf das Geoid reduziert und durch den Ausgleich der Winkel- und Basisbedingungen gleichsam geodätische Linien erhalten, die mit unveränderter Länge vom Geoid auf das Referenzellipsoid übernommen wurden. Wendet man sodann die translative Methode der astronomisch-geodätischen Ausgleichung an, so könnte man nach einem Gedanken Krassowski⁶⁾ der Änderung des projektiven Maßstabes beim Übergang vom ursprünglichen Referenzellipsoid zu einem neuen Ellipsoid in neuer Lage für jede geodätische Linie vermöge (6) und (10) Rechnung tragen:

$$ds_{ik} = k s_{ik} = - \frac{\Delta z_i + \Delta z_k}{2a} s_{ik} = f(\xi_o, \eta_o, \Delta z_o, da, d\alpha), \quad (12)$$

indem man diesen theoretischen Effekt in den Helmer'schen „Anfangssystemen“ mittels $p_3 ds_{ik} = -p_6 k$ und $q_3 ds_{ik} = r_3 ds_{ik} = -q_6 k = -r_6 k$ berücksichtigt. Auf diese Weise würde lediglich Δz_o als zusätzliche Unbekannte auftreten. Der Wert dieses Vorganges wird aber dadurch beeinträchtigt, daß der entsprechende Einfluß der Geoidundulationen nicht erfaßt ist. Sind aber auch diese bekannt und könnte man demnach alle Grundlinien sofort auf das Erdellipsoid reduzieren, dann wird die translative Methode überhaupt unzweckmäßig und man wird abermals sofort im Sinne der projektiven Methode das naturtreue Netz anstreben. Übrigens bedeutet dieser Vorschlag Krassowski eine weitere projektive Durchdringung der translativen Methode. In völliger Reinheit liegt das translative Prinzip nur bei der Netzausbreitung mit einheitlichem Maßstab vor, also nur dann, wenn die Grundlinien bewußt nur auf das Geoid reduziert werden.

(Schluß folgt)

⁶⁾ Th. N. Krassowski: Einige neue Grundlagen für die Aufstellung der Gleichungen und Programme der Gradmessungen, Verhandl. der in Helsinki vom 21. bis 25. Juli 1936 abgehaltenen 9. Tagung der Baltischen Geod. Kommission, Helsinki 1937.

Fußnoten:

1) [2], Gleichung (1a).

4) [2], Abschnitt A, letzter Absatz.

2) [2], Gleichung (2b).

5) [2], Tabelle 1.

3) [2], Abschnitt B, a).

6) [3], Abschnitt 4, 5 und 6.

I Figurenbeilage.

Die Rolle der Grundlinien bei der Netzprojektion

Von K. Ledersteger, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

(Schluß)

Der mit diesen Betrachtungen gewonnene Einblick in das Maßstabproblem der Projektion setzt uns in den Stand zu prüfen, inwieweit bei den verschiedenen Methoden der astronomisch-geodätischen Netzausgleichung die Verwertung der Grundlinien den prinzipiellen Erfordernissen der Projektion gerecht wird. Wie bereits erwähnt, bedauert Helmer t schon für die übliche Netzausbreitung die mangelnde Reduktion der Grundlinien vom Geoid auf das Referenzellipsoid. Denn der dadurch bedingte Fehler in den Vergrößerungsseiten beeinträchtigt, wenn auch zumeist nur sehr geringfügig, die Berechtigung der Basisgleichungen. Der Sachverhalt ändert sich aber sofort, wenn ein ursprünglich rein geometrisch ausgeglichenes Großnetz nachträglich einer astronomisch-geodätischen Ausgleichung im Sinne der translativen Methode Helmer t s unterworfen wird. Weil nämlich diese geodätisch dahin gedeutet werden kann, daß sie auf die Gesamtheit aller Projektionen abzielt, steht hier für die exakte Lösung des Maßstabproblems nur folgender Weg offen. Man reduziert alle Grundlinien exakt auf das ursprüngliche Referenzellipsoid und muß beim Ellipsoidübergang genau so wie bei der Netzverschiebung die Änderung der Geoidhöhen berücksichtigen. Dann ergeben sich gemäß (12) alle Verbesserungen in Funktion von 5 statt wie bei Helmer t in Funktion von 4 Größen, weil Δz_0 als weitere Unbekannte auftritt. Außerdem erfahren selbstverständlich die Koeffizienten der übrigen vier Unbekannten ξ_0 , η_0 , $\frac{da}{a}$ und da gewisse Änderungen. Kennt man aber die ursprünglichen Geoidhöhen nicht, kann also die Grundlinien nur auf das Geoid reduzieren, so wäre es zwecklos, den von Krassowski j vorgeschlagenen Weg zu gehen; denn ist eine individuelle Behandlung aller Ellipsoide und Netzlagen unmöglich, so sind die auf dem Geoid liegenden Grundlinien wenigstens bestmöglich im Sinne aller Projektionen reduziert und das Helmer t sche Verfahren stellt noch den besten Ausweg aus dem Dilemma dar. In diesem Falle brauchen die Basisgleichungen auch nicht Zwangsbedingungen zu sein, sondern können in die erste, geometrische Netzausgleichung ohneweiters Verbesserungen für die Basisvergrößerungsseiten einbezogen werden, deren Gewicht natürlich sorgfältig bestimmt werden muß.

Für die weitere Diskussion wollen wir von einer Änderung des Referenzellipsoides und der Ausgangswerte im Fundamentalpunkt abstrahieren, d. h. nicht mehr die Gesamtheit aller Projektionen, sondern nur eine individuelle Projektion ins Auge fassen. Es ist klar, daß man in erster Linie an das naturtreue Netz denken wird; doch gelten die folgenden Überlegungen für jedes geodätisch fehlerfreie Netz, oder für jede Projektion. Ferner sei vorausgesetzt, daß die Grundlinien exakt auf das Referenzellipsoid reduziert wurden und daß die Basisgleichungen bei der rein geometrischen Netzausgleichung als Zwangsbedingungen Berücksichtigung fanden. Außerdem legen wir sofort ein modernes Rahmennetz von Dreiecksketten zugrunde, die im wesentlichen den Richtungen der Meridiane und Parallelkreise folgen. In den Kreuzungsstellen dieser Ketten, den sogenannten „Knoten“, sei je ein „Knotenstrahl“ gleichzeitig Basisvergrößerungsseite wie auch durch ein *L a p l a c e* sches Azimut festgelegt. Dann kann jede Verbindungskette zwischen benachbarten Knotenpunkten P_i und P_k durch eine geodätische Linie s_{ik} und ihre beiden „Anschlußwinkel“ β_{ik} und β_{ki} ersetzt werden, die sie mit den Knotenstrahlen $P_i P_i'$ und $P_k P_k'$ bildet.

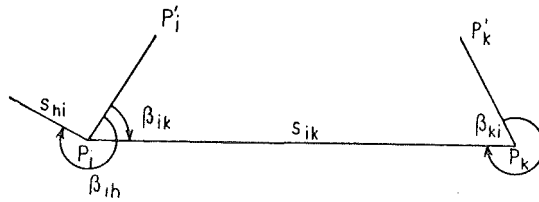


Fig. 3

Die moderne, bedingte Groß-Ausgleichung zerfällt nun bekanntlich in die vorläufige Ausgleichung der Kettenabschnitte oder Verbindungsketten, in die Hauptausgleichung des aus den geodätischen Linien gebildeten Polygonnetzes und in die anschließende, definitive Ausgleichung der Verbindungsketten. Werden also, wie oben angenommen, die Basisgleichungen in die geometrische Ausgleichung der Verbindungsketten einbezogen, so beruhen die daraus abgeleiteten geodätischen Linien s_{ik} auf einem partiellen Minimum und müssen demnach in der Hauptausgleichung Korrekturen erfahren. Der definitive Projektionsmaßstab kann eben erst bei gleichzeitiger Berücksichtigung der *L a p l a c e* schen Bedingungen gewonnen werden. Wegen der Unempfindlichkeit der *L a p l a c e* schen Widersprüche treten die Seitenverbesserungen aber nur in den Breiten- und Längengleichungen der geschlossenen Polygone auf und man erkennt, daß die Anlage des Netzes keineswegs gleichgültig ist. In der ursprünglichen *H e l m e r t* schen Form enthält das astronomisch-geodätische Netz noch vielfach freie Polygonzüge, deren translativer Maßstab nicht die notwendige projektive Korrektur erfährt. Wohl vermitteln für diese Polygonzüge die Basisgleichungen unter den obigen Voraussetzungen gleichfalls ein lineares Maßstabgefälle, doch ist dieses im allgemeinen nicht mit dem Maßstabgefälle der gewünschten Projektion identisch; denn die *L a p l a c e* schen Widersprüche der freien Züge

werden in der Hauptausgleichung lediglich durch eine Drehung der Linien beseitigt. In den Polygonen haben die Seitenverbesserungen gleichsam nur die Nebenfunktion, den durch die L a p l a c e schen Bedingungen zerstörten geometrischen Netzzusammenhang wieder herzustellen. Auch wenn man die abgeleiteten Funktionen s_{ik} , β_i , β_k nicht wie unmittelbare Beobachtungen behandelt, sondern die H e l m e r t sche Methodeder Netzausgleichung mit E g g e r t ⁷⁾ auf Grund der Theorie der partielläquivalenten Beobachtungen in ein strenges Verfahren verwandelt, würde man bei einer derartigen Netzform nicht die reine Projektion erzielen. Die modernen Rahmennetze sind daher wesentlich günstiger, zumal sie keine freien Polygonzüge enthalten. Aber auch hier wird man, gleichgültig, ob man die strenge E g g e r t sche Methode oder das verbesserte Näherungsverfahren von K r a s s o w s k i j ⁸⁾ verwendet, den veränderlichen Projektionsmaßstab umso sicherer erfassen, je enger die Polygonschleifen sind. Es scheint demnach besser zu sein, die nötige Versteifung des Rahmennetzes statt durch Doppelketten lieber durch Verkürzung der Verbindungsketten herbeizuführen. Damit erhält auch das durch die Basisgleichungen vermittelte lineare Maßstabgefälle eine erhöhte Berechtigung. Gleichzeitig wird aber eine Grundlinienausgleichung umso dringlicher, weil sich das Verhältnis ⁸⁾ mit abnehmender Länge der Verbindungsketten immer mehr von Null entfernt.

An diesen Überlegungen ändert sich grundsätzlich nichts, wenn an Stelle der Längen der geodätischen Linien und ihrer Anschlußwinkel oder auch ihrer Azimute die Koordinatendifferenzen benachbarter Knotenpunkte als abgeleitete Funktionen auftreten. So werden z. B. bei der Methode von B o w i e ⁹⁾ aus den Verschneidungen der Ketten Knotennetze gebildet, die je aus einer Grundlinie und einem L a p l a c e schen Azimut sofort ihre definitive Dimensionierung und Orientierung erhalten, während ihre endgültige gegenseitige Lage aus der vermittelnden Hauptausgleichung der Koordinatendifferenzen der Knotenpunkte hervorgeht. Dies bedeutet aber auch die definitive Festlegung des projektiven Maßstabgefälles. Auch W o l f ¹⁰⁾ verwendet bei seiner im Anschluß an E g g e r t und B o w i e entwickelten Iterationsmethode, der strengen Ausgleichung „mittels schrittweiser Annäherung“, die Längen- und Breitendifferenzen der Endpunkte der die Verbindungsketten ersetzenden geodätischen Linien als abgeleitete Funktionen.

⁷⁾ O. E g g e r t: Über die Ausgleichung großer Dreiecksnetze, Verhandlungen der 9. Tagung der Baltischen Geodätischen Kommission 1936, Helsinki 1937.

⁸⁾ Th. N. K r a s s o w s k i j: Methoden zur Ausgleichung der staatlichen Triangulation I. O., Arbeiten des Staatl. Inst. f. Geodäsie u. Kartographie, Moskau 1931. In deutscher Übersetzung herausgegeben von M. K n e i ß l, Mitteil. d. Chefs Kriegs-Kart. u. Verm.-Wes., 1. Jg., Heft 3, Berlin 1942.

⁹⁾ O. S. A d a m s: The Bowie-Method of Triangulation Adjustment as Applied to the First-Order Net in the Western Parts of the United States, Washington, 1930. Deutsche Übersetzung herausgegeben von M. K n e i ß l, Mitteil. d. Chefs Kriegs-Kart. u. Verm.-Wes., 2. Jg., Heft 7, Berlin, 1943.

¹⁰⁾ H. W o l f: Die strenge Ausgleichung großer astronomisch-geodätischer Netze mittels schrittweiser Annäherung, Veröff. d. Inst. f. Erdmessung, Band 7, Bamberg, 1950.

Bei diesem sehr scharfsinnigen Verfahren ist vollkommen korrekt in die Hauptausgleichung eine Grundlinienausgleichung einbezogen. Doch hat dieser Vorgang die exakte Reduktion auch der Winkel zur unumgänglichen Voraussetzung, wie sie bisher leider noch niemals verwirklicht wurde. Ansonst wäre diese Maßnahme eher geeignet, das natürliche Maßstabgefälle der Projektion zu zerstören.

Bei der zweiten Hauptform der astronomisch-geodätischen Netzausgleichung, der vermittelnden Koordinatenausgleichung *H e l m e r t s*, tritt die bekannte Bedingung

$$s_{ik}' + \delta s_{ik}' = s_{ik} + d s_{ik} \quad (13)$$

nicht für lange geodätische Linien, sondern für die Basisvergrößerungsseiten auf. Dabei ist s_{ik}' die aus der reduzierten Grundlinie abgeleitete, also beobachtete Seitenlänge, s_{ik} die dem gewählten System der Näherungskordinaten streng zugehörige Seite, deren Verbesserung in Funktion der sechs Verbesserungen $d\varphi_i, d\lambda_i, d\varphi_K, d\lambda_K, da$ und $d\alpha$ darzustellen ist. Im Gegensatz zur bedingten Netzausgleichung kann hier der reine Messungsfehler $-\delta s_{ik}'$ trotz der Veränderlichkeit des Projektionsmaßstabes ganz zwanglos berücksichtigt werden; es wird ja keine Bedingung aufgestellt, die an die Voraussetzung eines streng einheitlichen Maßstabes gebunden ist. Sind aber weder die Geoidundulationen ζ , noch die Geoidhöhen z über dem Referenzellipsoid bekannt, kann also jede Grundlinie bloß auf das Geoid reduziert werden, so ist der Fehler $-\delta s_{ik}'$ meist weniger auf die Beobachtungsfehler als auf die mangelnde Reduktion auf das Referenzellipsoid zurückzuführen. Dann aber empfiehlt *H e l m e r t*, den reinen Messungsfehler zu unterdrücken, mithin mit jeder Basisgleichung (13) eine Unbekannte zu eliminieren, wobei aber jede Grundlinie in den Absolutgliedern der Normalgleichungen eine unbestimmte Größe $\delta s'$ zurückläßt, die in der Form

$$\delta s' = -\frac{s}{a} z \quad (14)$$

dargestellt werden kann, wenn man unter z die Geoidhöhe im Basismittelpunkt versteht. Will man übrigens wieder die Gesamtheit aller Projektionen gewinnen, läßt also beliebige Ellipsoidübergänge zu, so kommt hier noch deutlicher als bei der translativen Methode zum Ausdruck, daß die Grundlinien besser nur auf das Geoid reduziert werden. Denn jedes Ellipsoid erfordert für jede Grundlinie, gleichgültig, ob der Messungsfehler vernachlässigt oder berücksichtigt wird, eine zusätzliche individuelle Korrektur (14), die am bequemsten anzusetzen ist, wenn die Grundlinien prinzipiell nur auf das Geoid reduziert werden. Liegen schließlich alle Koordinatenverbesserungen in Funktion der Verbesserungen $d\varphi_o, d\lambda_o$ des Fundamentalpunktes, der Elemente des Ellipsoidüberganges da und $d\alpha$, sowie aller $\delta s'$ vor, so kann man auf das naturtreue Netz übergehen, indem man für die Geoidhöhen z die Gleichung (11) einsetzt. Einzige Voraussetzung ist, daß das ursprüngliche Referenzellipsoid das Geoid im Fundamentalpunkt berührt.

Die Koordinatenmethode ist eine strenge Ausgleichung in einem Guß, die unter dem Nachteil leidet, daß eine vielgliedrige Fehlerquadratsumme in der Gegend ihres Minimums sehr unempfindlich wird. Demgegenüber hat die bedingte Hauptausgleichung den Vorteil, daß in ihr die Maßstabfrage gleichsam ein zweitesmal bei der Prüfung langer geodätischer Linien aufgegriffen wird. In diesem Zusammenhang ist es sehr bemerkenswert, daß Ö l a n d e r ¹¹⁾ nach sorgfältigster Kritik zu dem Schlusse kommt, daß hinsichtlich der Seitenlängen die bedingte, gruppenweise Ausgleichung den Vorzug verdient. Derselbe Vorzug zeichnet übrigens auch die genäherte Netzausgleichung von U r m a j e w ¹²⁾ aus. Wie die B o w i e sche Methode ist dies ein gemischtes Verfahren, bei dem die Kettenausgleichung bedingt, die Hauptausgleichung hingegen vermittelnd erfolgt. Bei dieser Abart der Koordinatenmethode wird also die Gleichung für ds' nicht für die Basisvergrößerungsseiten, sondern für alle geodätischen Linien des Polygonnetzes aufgestellt. Auch wenn jeder Knoten eine Basis enthält und dementsprechend jede der in Azimut beobachteten Seiten $P_i P_i'$ als Basisanschlußseite dient, wird jetzt die Zahl der Basisfehlergleichungen im allgemeinen größer sein als bei der Ausgleichung der unmittelbaren Beobachtungen. Außerdem ist jede Seite s_{ik}' selbst Ergebnis einer Ausgleichung unter Einbeziehung einer Basisbedingungsgleichung. So werden in gewisser Hinsicht die Vorzüge der Korrelaten- und der Koordinatenausgleichung vereinigt und das Verfahren von U r m a j e w stellt eine glückliche Kombination der Gedanken von B o w i e und K r a s s o w s k i j dar.

Damit sind die Hauptformen der modernen Ausgleichung kontinentaler Netze erschöpft. Für die sichere Erfassung des veränderlichen Maßstabes der Projektion haben sich folgende Richtlinien ergeben:

1. Der gegenseitige Abstand der Grundlinien soll 200 bis 300 *km* nicht übersteigen, um das durch die Basisgleichung vermittelte lineare Maßstabgefälle zu rechtfertigen.

2. Die auf das beizubehaltende Referenzellipsoid reduzierten Grundlinien müssen als Zwangsbedingungen in die Netzausgleichung eingeführt werden, solange die Reduktion der Richtungen auf das Referenzellipsoid nicht einwandfrei ist.

3. In letzterem Falle könnte die berechtigte Forderung nach einer Grundlinienausgleichung noch am ehesten erfüllt werden, wenn die bloß auf das Geoid reduzierten Grundlinien vor der eigentlichen Netzausgleichung einer gesonderten Ausgleichung unterzogen werden.

¹¹⁾ V. R. Ö l a n d e r: Zwei Ausgleichungen des großen südfinnischen Dreiecks-kranzes, Veröff. d. Finnischen Geodätischen Institutes, Nr. 21, Helsinki 1935.

¹²⁾ N. A. U r m a j e w: Verfahren zur Ausgleichung von Triangulationen I. O., Arbeiten des Zentralen wissenschaftlichen Forschungsinstitutes, Folge 19, Moskau 1937. In deutscher Übersetzung mit Einleitung herausgegeben von M. K n e i ß l, Mitteil. d. Chfs Kriegs-Kart. u. Verm.-Wes., 2. Jg., Heft 12, Berlin 1943.

4. Die formale Strenge des Ausgleichsverfahrens allein genügt nicht für die einwandfreie Erzielung der gewünschten Projektion. Hier spielt auch die Netzform eine nicht zu unterschätzende Rolle.

5. Für die Projektion haben die Grundlinien dieselbe wichtige Funktion wie die L a p l a c e schen Bedingungen.

Übrigens erweist sich auch hinsichtlich des Maßstabproblem es das naturtreue Netz als das günstigste. Denn die Projektion auf das mittlere Erdellipsoid liefert nicht nur das ähnlichste Abbild der Punktkonfiguration des Geoides, wenn man die ganze Erde betrachtet; unter diesem Gesichtspunkt können auch die Geoidundulationen nicht im gleichen Ausmaß systematisch anwachsen wie die Geoidhöhen bezüglich irgendeines Referenzellipsoides. Für das naturtreue Netz ist auch eine Grundlinienausgleichung vollkommen korrekt, wenn die beobachteten Richtungen auf das Geoid, die Grundlinien jedoch auf das Ellipsoid reduziert sind. Abschließend braucht wohl kaum betont zu werden, daß diese prinzipiellen Betrachtungen praktisch nur bei kontinentalen Netzen fühlbar werden.

Die funktionellen Zusammenhänge von γ -Parallaxengröße und Beobachtungsort in einem Stereomodell; ein neues numerisches Orientierungsverfahren

Von H. S c h m i d, Wien

(Schluß)

VII. Erweiterung des Anwendungsbereiches durch Berücksichtigung der Glieder 2. Ordnung in den Parallaxengleichungen

Sämtliche bisher veröffentlichten Orientierungsverfahren gehen von der Voraussetzung aus, daß man die Vororientierung so genau durchführen kann, daß bei der Schlußorientierung die Glieder 2. und höherer Ordnung keinen Einfluß mehr auf die Endergebnisse haben. Außerdem wurde in den bisher veröffentlichten Verfahren auf die Achsstellungen der Auswertegeräte und ihren Einfluß bei der Bestimmung der Orientierungselemente keine Rücksicht genommen. H. Bernhard [9] hat jene Gleichungen abgeleitet, die es am Ende des Orientierungsverfahrens gestatten, die Verbesserungen wegen der Achsstellungen an die Elemente anzubringen; diese Verbesserungen sind größer, als bisher angenommen wurde, und werden bei Bündelbewegungen von etwa 20° schon fühlbar. Die Vernachlässigung der Glieder 2. und höherer Ordnung setzt voraus, daß man die Vororientierung schon so genau ausführt, daß die noch verbleibenden Restparallaxen den Betrag von etwa $\pm 0.3-0.5 \text{ mm}$ nicht übersteigen. In normalen Fällen wird eine derartige Vororientierung von geübten Operateuren in etwa 10 Minuten zu-