

Paper-ID: VGI\_195415



## Das “Zentroid“ als wahrscheinlichste Punktlage in fehlerzeigenden Figuren der trigonometrischen Punktbestimmung

Walter Smetana <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **42** (6), S. 167–171

1954

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Smetana_VGI_195415,  
  Title = {Das ‘‘Zentroid‘‘ als wahrscheinlichste Punktlage in fehlerzeigenden  
    Figuren der trigonometrischen Punktbestimmung},  
  Author = {Smetana, Walter},  
  Journal = {{{\0}sterreichische Zeitschrift f{{\u}r Vermessungswesen}},  
  Pages = {167--171},  
  Number = {6},  
  Year = {1954},  
  Volume = {42}  
}
```



- 33) „Etwas über das Vermessungswesen“, Zeitschrift: „Das Obst“, 1935.
- 34) „Aufnahmsarbeiten in der terrestrischen Stereophotogrammetrie“, Verlag C. Gerolds Sohn in Wien, 1935.
- 35) „Ein Raumbildentfernungsmesser ohne Linsen“, Das Raumbild, Verlag Schönstein, Diessen und Ammersee, 1936.
- 36) Dock u. Killian: „Einrichtung und Verfahren zur Bestimmung der Abweichung der angenäherten Parallelstellung und zur Auffindung der Nadirpunkte von Luftbildern“, D.R.P. Nr. 712969 v. 25. Februar 1938.
- 37) „Über das neue Verfahren zur Bestimmung der Abweichung der angenäherten Parallelstellung und zur Auffindung der Nadirpunkte von Luftaufnahmen“, Bildmessung und Luftbildwesen, 1939.
- 38) Dock u. Killian: „Verfahren und Einrichtung zur Überbrückung festpunktloser Räume“, D.R.P. Nr. 746502 v. 5. Februar 1940.
- 39) Zahlreiche Buchbesprechungen.

## Das „Zentroid“ als wahrscheinlichste Punktlage in fehlerzeigenden Figuren der trigonometrischen Punktbestimmung

Von W. S m e t a n a, Wien

Im folgenden will ich auf vektorieller Grundlage, in Ansehung des allgemeinen Zentroidbegriffes<sup>1)</sup>, ein graphisch-mechanisches Verfahren zur Ermittlung der wahrscheinlichsten Punktlage in fehlerzeigenden Figuren zur Darstellung bringen.

Ausgehend von dem Gedanken, daß man auch jedem Punkt eines Systems von Schnittpunkten bezüglich Strahlen in fehlerzeigenden Figuren auch eine besondere Zahl zuordnen kann, die man passend als die Stärke des Punktes bezeichnet, versteht man bekanntlich unter dem Zentroid eines Punktsystems jenen Punkt, dessen Stärke mit der Stärke des Systems und dessen Produkt aus seiner Stärke und seinem Ortsvektor übereinstimmt mit der Summe der Produkte bezüglich Stärken und Ortsvektoren der einzelnen Punkte des Systems.

Dieses Zentroid, dessen Lage nun von der Lage des Ursprunges unabhängig bleibt, das sich auch nicht ändert, wenn man die Stärken aller Punkte des Systems und seines Zentroides mit ein und demselben Faktor multipliziert, ist der Schwerpunkt und zugleich Minimumspunkt des Schnittpunktsystems, bei Einführung der nachfolgend gebildeten besonderen Zahlen als Stärken der Schnittpunkte des Punktsystems.

Wählt man zweckmäßig das Zentroid als Ursprung und bezeichnet man allgemein die Stärken der einzelnen Punkte des Systems mit  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ , die Ortsvektoren mit  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , so erhält man das geschlossene Vektoreck mit der Beziehung:

$$\mu_1 r_1 + \mu_2 r_2 + \dots + \mu_n r_n = 0 \text{ oder in abgekürzter Schreibweise } \sum \mu r = 0.$$

<sup>1)</sup> Heinrich Dörrie „Vektoren“, Verlag Oldenburg, München und Berlin, 1941.



Das Zentroid mit der Stärke  $\mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{23} = \mu_s$  stellt demnach die wahrscheinlichste Punktlage dar und wird auf graphischem Wege wie folgt bestimmt:

Gemäß der wichtigen Eigenschaft, daß das Zentroid eines Punktsystems zugleich das Zentroid der Zentroide seiner Teile ist, wird zunächst das Zentroid  $Z$  etwa des Punktpaares  $P_{13} P_{23}$  in Abb. 2 ermittelt. Dieser Punkt  $Z$  muß auf der Verbindungsgeraden  $P_{13} P_{23}$  liegen und teilt diese Strecke entsprechend der Definitionsgleichung  $\mu_{13} \overrightarrow{ZP}_{13} + \mu_{23} \overrightarrow{ZP}_{23} = 0 \dots (1)$  im umgekehrten Verhältnis der Stärken seiner Endpunkte, also:

$$\overrightarrow{ZP}_{13} : \overrightarrow{ZP}_{23} = \mu_{23} : \mu_{13}$$

Der Punkt  $S$ , der Schwerpunkt des vorliegenden Punkttripels, liegt mithin auf der Verbindungsgeraden  $P_{12} Z$  und teilt die Strecke  $P_{12} Z$  entsprechend der Definitionsgleichung

$$\mu_{12} \overrightarrow{SP}_{12} + (\mu_{13} + \mu_{23}) \cdot \overrightarrow{SZ} = 0 \dots (2)$$

im Verhältnis:  $\overrightarrow{SP}_{12} : \overrightarrow{SZ} = (\mu_{13} + \mu_{23}) : \mu_{12}$ .

Durch diese beiden Beziehungen wird die Vektorgleichung für das Zentroid des Punkttripels  $P_{12}, P_{13}, P_{23}$  erfüllt, die lautet:

$$\mu_{12} r_{12} + \mu_{13} r_{13} + \mu_{23} r_{23} = 0, \dots (3)$$

denn:

$$\left. \begin{aligned} r_{12} &= \overrightarrow{SP}_{12} & \mu_{12} \cdot r_{12} &= \mu_{12} \overrightarrow{SP}_{12} \\ r_{13} &= \overrightarrow{SZ} + \overrightarrow{ZP}_{13} & \mu_{13} \cdot r_{13} &= \mu_{13} \overrightarrow{SZ} + \mu_{13} \overrightarrow{ZP}_{13} \\ r_{23} &= \overrightarrow{SZ} + \overrightarrow{ZP}_{23} & \mu_{23} \cdot r_{23} &= \mu_{23} \overrightarrow{SZ} + \mu_{23} \overrightarrow{ZP}_{23} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Rechtsseitige Ausdrücke von Gleichung (4) in Gleichung (3) eingesetzt, bestätigt unter Bedachtnahme auf Gleichung (2) die Richtigkeit der Gleichung (3).

Zur überaus einfachen Konstruktion des Zentroides bedarf es also bloß eines Lineals und Zirkels, wenn man vorerst die Stärken der Punkte etwa mit einem gewöhnlichen logarithmischen Rechenschieber berechnet hat.

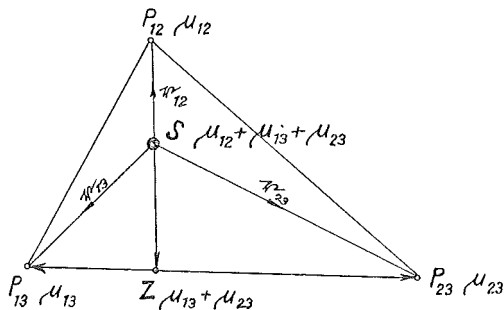


Abb. 2

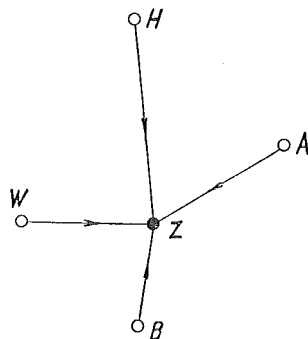


Abb. 3

Was nun im Vorangegangenen für ein fehlerzeigendes Dreieck allgemein entwickelt wurde, gilt sinngemäß auch für ein beliebig großes Schnittpunktsystem.

Ein kleines Beispiel aus der Praxis, das im „Handbuch der Vermessungskunde“ von Jordan, zweiter Band, erster Halbband, 4. Auflage 1893, S. 318 und 319 rechnerisch behandelt wurde, möge nun die graphisch-mechanische Bestimmung der wahrscheinlichsten Punktlage in einer fehlerzeigenden Figur mit vier äußeren Richtungen unter Anwendung des allgemeinen Zentroidbegriffes veranschaulichen:

Gegeben sind nach Abb. 3 die Standpunkte  $B, W, H, A$  mit den Koordinaten:

$$\begin{aligned} y_B &= -15\ 356,150\ m & x_B &= +92\ 012,085\ m \\ y_W &= -16\ 145,080\ m & x_W &= +92\ 808,697\ m \\ y_H &= -15\ 266,847\ m & x_H &= +95\ 002,299\ m \\ y_A &= -13\ 879,790\ m & x_A &= +93\ 575,890\ m . \end{aligned}$$

Die äußeren orientierten Richtungen lauten:

$$\begin{aligned} R_O^{(B)} &= 13^\circ 00' 22'' \\ R_O^{(W)} &= 94^\circ 49' 56'' \\ R_O^{(H)} &= 178^\circ 05' 01'' \\ R_O^{(A)} &= 237^\circ 06' 26'' . \end{aligned}$$

Aus den Näherungskoordinaten

$$y' = -15\ 191,000 \quad x' = +92\ 728,200$$

des aus zwei Strahlen berechneten Neupunktes  $Z$  wurden sowohl die genäherten Richtungswinkel  $R'$  als auch die Seitenlängen  $s$  ermittelt:

$$\begin{aligned} R'^{(B)} &= 12^\circ 59' 11'' & s_B &= 735\ m \\ R'^{(W)} &= 94^\circ 49' 22'' & s_W &= 958\ m \\ R'^{(H)} &= 178^\circ 05' 23'' & s_H &= 2275\ m \\ R'^{(A)} &= 237^\circ 07' 03'' & s_A &= 1561\ m . \end{aligned}$$

Obig angeführte Angaben bildeten nun die Grundlage zur Konstruktion der im Maßverhältnis 1:1 dargestellten fehlerzeigenden Figur in Abb. 4.

Die Schnittpunkte bezüglichlicher Strahlen sind darin:

$$Z_{BW}, Z_{BH}, Z_{BA}, Z_{WH}, Z_{WA} \text{ u. } Z_{HA}.$$

Die Schnittwinkel und Stärken sind beziehungsweise:

$$\begin{aligned} \gamma_{BW} &\approx 81^\circ 50' & \mu_{BW} &= (s_H \cdot s_A \cdot \sin \gamma_{BW})^2 \approx 123,5 \\ \gamma_{BH} &\approx 165^\circ 05' & \mu_{BH} &= (s_W \cdot s_A \cdot \sin \gamma_{BH})^2 \approx 1,5 \\ \gamma_{BA} &\approx 135^\circ 54' & \mu_{BA} &= (s_W \cdot s_H \cdot \sin \gamma_{BA})^2 \approx 23,0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{WH} &\approx 83^{\circ} 15' & \mu_{WH} &= (s_B \cdot s_A \cdot \sin \gamma_{WH})^2 \approx 12,9 \\ \gamma_{WA} &\approx 142^{\circ} 16' & \mu_{WA} &= (s_B \cdot s_H \cdot \sin \gamma_{WA})^2 \approx 10,2 \\ \gamma_{HA} &\approx 59^{\circ} 01' & \mu_{HA} &= (s_B \cdot s_W \cdot \sin \gamma_{HA})^2 \approx 3,6. \end{aligned}$$

Die Entfernungen  $s_B$ ,  $s_W$ ,  $s_H$  u.  $s_A$  wurden zweckmäßig in Kilometer eingeführt und obige Ausdrücke für die Stärken der Punkte mit dem gewöhnlichen logarithmischen Rechenschieber ermittelt.

Der Minimumpunkt als Zentroid  $Z$  des Punktsystems wurde nun als das Zentroid der Zentroide der drei Punktpaare:  $(Z_{BW} Z_{BH})$ ,  $(Z_{BA} Z_{WA})$ ,  $(Z_{HA} Z_{WH})$ , wie aus Abb. 4 hervorgeht, dargestellt.

Als Koordinaten des Neupunktes  $Z$  liest man nun ab:  $y = -15\,190,778\text{ m}$ ,  $x = +92\,728,020\text{ m}$ ; diese stimmen mit den aus dem strengen rechnerischen Ausgleich abgeleiteten Koordinaten in  $y$  gänzlich überein, in  $x$  zeigt sich eine Differenz von zirka  $1\text{ mm}$ , die wohl zeichnerisch begründet ist.

Abschließend und zusammenfassend kann man nun sagen, daß die praktische Anwendung des wichtigen Zentroidbegriffes auf die Bestimmung der wahrscheinlichsten Punktlage der in einem großen Maßverhältnis dargestellten fehlerzeigenden Figuren in vielen Fällen die einem strengen Punktausgleich zukommende Genauigkeit des Neupunktes bloß unter Verwendung eines gewöhnlichen log. Rechenschiebers sowie eines Lineals und Zirkels liefern wird.

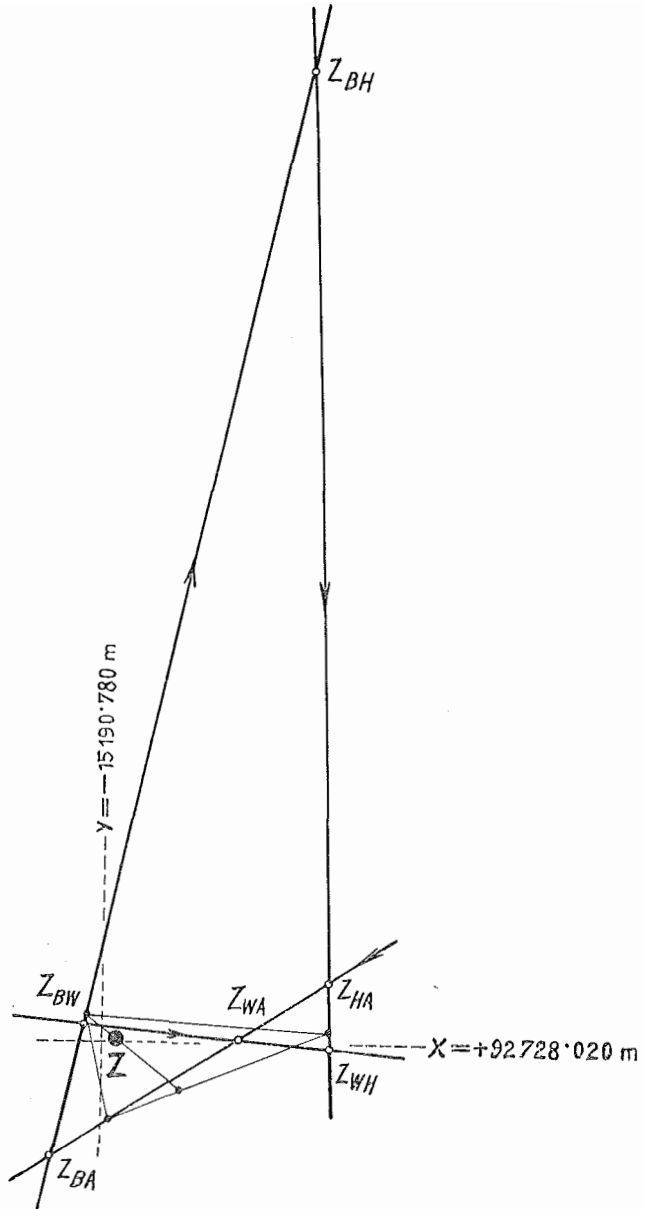


Abb. 4