Über die Kubatur von Körpern aus parallelen ebenen Schnittflächen

Karl Killian [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **42** (6), S. 176–185

1954

Elimination:

+ 26,0	+ 18,0	− 4,0	− 20,0	− 1,0	.	.	− 19,0	0
− 0,6923	+ 9,538	+ 10,769	+ 18,846	+ 0,692	− 1,0	.	− 38,846	0
+ 0,1538	− 1,1290	+ 29,226	+ 5,647	− 0,935	+ 1,129	− 1,0	− 34,065	+ 1
+ 0,7692	− 1,9758	− 0,1931	+ 0,289	− 1,956	+ 1,758	+ 0,193	− 0,285	− 4
+ 0,0385	− 0,0726	+ 0,0320		− 0,1186	+ 0,1087	− 0,0320		
.	+ 0,1048	− 0,0386		+ 0,1087	− 0,1484	+ 0,0386		
.	.	+ 0,0342		− 0,0320	+ 0,0386	− 0,0342		
+ 0,7308	+ 4,0725	+ 1,1655		.	.	.		
+ 1,0000	+ 0,9999	+ 1,0000		− 0,0419	− 0,0011	− 0,0276		

Durchgreifende Probe: $[al] \cdot [-Q_{xi}] + [bl] \cdot [-Q_{yi}] + [cl] \cdot [-Q_{zi}] = -x - y - z$
$-0{,}0045 = -0{,}0051$

Ergebnisse: $x = +1{,}956$ $\quad Q_{11} = +0{,}1186$ $\quad Q_{21} = Q_{12}$ $\quad Q_{31} = Q_{13}$
$y = -1{,}758$ $\quad Q_{12} = -0{,}1087$ $\quad Q_{22} = +0{,}1484$ $\quad Q_{32} = Q_{23}$
$z = -0{,}193$ $\quad Q_{13} = +0{,}0320$ $\quad Q_{23} = -0{,}0386$ $\quad Q_{33} = +0{,}0342$
$[vv] = +0{,}289$

Literatur:

Gruber: Ein vereinfachtes Rechenschema zur Auflösung der Normalgleichungen für Rechenmaschinen. Z. f. V. 1925.
Jordan-Eggert: „Handbuch der Vermessungskunde", 1. Band.
Großmann: „Grundzüge der Ausgleichsrechnung".

Über die Kubatur von Körpern aus parallelen ebenen Schnittflächen

Von Ing. Karl Killian

In der Praxis liegt häufig die Aufgabe vor, das Volumen eines Körpers (Geländeteil, Haldenbestände usw.) zu bestimmen, der durch Schichtenlinien festgelegt ist. Um dies zu erreichen, werden bekanntlich die von den Schichtenlinien begrenzten Flächen, sie mögen Schichtenflächen heißen, bestimmt. Sodann denkt man sich den Körper in Schichtenkörper zerlegt, die oben und unten von horizontalen Schnittflächen begrenzt werden. Für viele Belange genügt es, die Schichtenkörper so zu wählen, wie es in Fig. 1 angegeben ist, und ihre Volumina je durch das Volumen einer zylindrischen Scheibe zu ersetzen. Fig. 1 stellt einen Querschnitt eines Berges dar, der durch Schichtenlinien (diese sind voll ausgezogen) bestimmt ist. Das Volumen des von der untersten und obersten Schichtenfläche begrenzten Körpers kann nach der bekannten, aus der Figur direkt ablesbaren Näherungsformel bestimmt werden:

$$V_z = \left(\frac{1}{2}(u + o) + [i]\right) \cdot h \qquad \ldots (1)$$

Darin bedeutet: V_z = Volumen nach Zerlegung in zylindrische Scheiben, u und o die unterste, bzw. oberste Schichtenfläche, $[i]$ die Summe aller Zwischenschichtenflächen und h den Schichtenabstand.

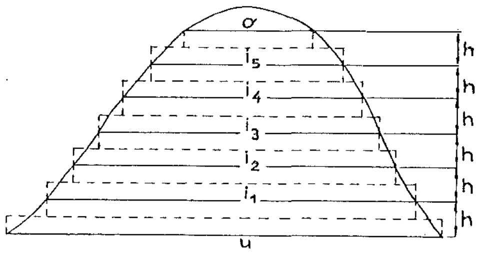

Fig. 1

Das Volumen des oberhalb der höchsten Schichtenlinie gelegenen geometrisch nicht weiter definierten Körpers kann auf verschiedene Weise abgeschätzt werden. Eine im allgemeinen brauchbare Näherung erreicht man, indem man diesen Körper durch ein elliptisches Paraboloid zweiter Ordnung ersetzt, dessen Grundfläche und Höhe mit der des genannten Körpers identisch sind. Sodann ist das gesuchte Volumen: Grundfläche $\times$ halber Höhe.

Aus Fig. 1 ersieht man, daß nach der Gl. (1) das Volumen des untersten Schichtenkörpers Höhe = $(\frac{h}{2})$ zu groß, während die Volumina aller übrigen Schichtenkörper (Höhe = h, bzw. $\frac{h}{2}$) im allgemeinen zu klein berechnet werden. In Fachkreisen werden fast ausschließlich die Gl. (1) oder noch ungenauere Verfahren angewandt (z. B. Zerlegung in lauter gleich starke Schichtenkörper, bzw. andere geometrisch unbegründete Regeln), wenn auch oft höchste Genauigkeit der Kubatur gefordert wird. Zunächst werden daher einige bekannte, aber kaum beachtete Beziehungen dargestellt.

Auf folgende Weise gelangt man zu genaueren Ergebnissen: Zu den Höhenzahlen als Abszissen trägt man die zugeordneten Werte der Schichtenflächen als Ordination auf. Verbindet man ihre Endpunkte durch eine glatte Kurve, so wird von dieser Kurve und von Anfangs- und Endordinate (y_o, bzw. y_n) sowie von der Abszissenachse eine Fläche begrenzt, deren Maßzahl mit großer Näherung das Volumen des Körpers ist.

Diese Fläche kann planimetriert oder nach der Simpsonschen Regel (1743) berechnet werden. Ist n eine gerade Zahl, so folgt:

$$F_s = \frac{h}{3}\Big(y_o + y_n + 4\,(y_1 + y_3 + y_5 + \,..\, + y_{n-1}) + + 2\,(y_2 + y_4 + y_6 + \,..\, + y_{n-2})\Big) \quad \ldots (2)$$

wobei F_s die gesuchte Fläche, berechnet nach der Simpsonschen Regel, bedeutet. Beachtet man wieder, daß die Ordinatenwerte im vorliegenden

Fall die Schichtenflächen des Körpers sind, so folgt nach der bereits gebrauchten Bezeichnung:

$$V_s = \frac{h}{3}\left(u + o + 4\,(i_1 + i_3 + \ldots + i_{n-1}) + 2\,(i_2 + i_4 + \ldots + i_{n-2})\right) \qquad (3)$$

Diese Gl. stellt die Simpsonsche Regel für Körper dar. Sie würde richtiger erweiterte Keplersche Regel heißen; denn Johannes Kepler hat in seiner Doliometrie (1615) gezeigt, daß das Volumen eines von zwei parallelen Ebenen begrenzten Körpers nach folgender Gl. im allgemeinen mit großer Genauigkeit berechnet wird:

$$V_k = \frac{H}{6}\,(U + 4\,M + O) \qquad \ldots (4)$$

Darin bedeutet: V_k = Volumen nach Keplerscher Regel, U und O die untere, bzw. obere parallele ebene Begrenzungsfläche, deren senkrechter Abstand H ist, und M den ebenen Parallelschnitt in $\frac{H}{2}$. Denkt man sich nun den aus Schichtenflächen dargestellten Körper in Schichtenkörper zerlegt, die je die Höhe $2\,h$ aufweisen, so folgt nach wiederholter Anwendung der Gl. (4):

$$V_k = \frac{2\,h}{6}\left((u + 4\,i_1 + i_2) + (i_2 + 4\,i_3 + i_4) + \ldots + (i_{n-2} + 4\,i_{n-1} + o)\right) \qquad (4a)$$

Man sieht, daß diese Gl. durch Vereinfachung in Gl. (3) übergeht.

Daraus erkennt man auch, daß die in manchen Büchern (Schulte und Löhr, Markscheidekunde S. 201 und Lexikon der Vermessungskunde, Verlag Wichmann 1943) angeführte stufenweise Berechnung nach Gl. (4 a) umständlicher ist als die Berechnung nach Gl. (3).

Um jene Körper aufzufinden, deren Rauminhalte nach Gl. (3) exakt berechnet werden, ist es am einfachsten, von der gewohnten Gl. (2) auszugehen. Man braucht nur am Schluß beachten, daß die Ordinatenwerte Schichtenflächen bedeuten.

In einem rechtwinkeligen Koordinatensystem seien 3 Punkte P_1 $(x_1\,y_1)$, P_2 $(x_2\,y_2)$, P_3 $(x_3\,y_3)$ gegeben. Durch diese kann man nur eine Parabel zweiten Grades legen, deren Achse parallel zur y-Richtung ist; denn die allgemeine Gl. dieser Parabel:

$$y = \alpha + \beta\,x + \gamma\,x^2 \qquad \ldots (5)$$

beinhaltet drei eindeutig bestimmbare Parameter: α, β, γ. Die Aufgabe, durch die drei Punkte Parabeln dritten Grades:

$$y = \alpha + \beta\,x + \gamma\,x^2 + \delta\,x^3 \qquad \ldots (6)$$

zu legen, hat ∞^1 Lösungen; denn es liegen sodann ebenfalls nur drei Gln. zur Bestimmung von vier Parametern α, β, γ, δ vor.

Legt man den Abszissenwerten der drei Punkte die einzige Bedingung: $x_2 = \frac{1}{2}\,(x_1 + x_3)$ auf, so kann das Wesentliche der Simpsonschen Regel in folgender geometrischer Form ausgedrückt werden:

Die genannte Parabel zweiten Grades und ebenso alle genannten ∞^1 Parabeln dritten Grades umschließen mit der Anfangs- und Endordinate (y_1, bzw. y_3) und der Abszissenachse Flächen, deren Inhalte exakt einander gleich sind und die nach der Simpsonschen Regel exakt berechnet werden.

Zum Beweis dieser Aussage legen wir den ersten Punkt in die Ordinatenachse und nennen die Koordinaten der drei gegebenen Punkte: $x_0\ y_0$, $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$. Parabeln dritten Grades, die durch Gl. (6) gegeben sind, begrenzen die exakt berechenbare Fläche:

$$F = \int_0^{x_2} y\,dx = \alpha x_2 + \frac{\beta}{2} x_2^2 + \frac{\gamma}{3} x_2^3 + \frac{\delta}{4} x_2^4 \qquad \ldots (7)$$

Nach der Simpsonschen Regel ist:

$$F_s = \frac{x_2}{6}\,(y_0 + 4\,y_1 + y_2)$$

Aus Gl. (6) folgt: $y_0 = \alpha$

$$4\,y_1 = 4\,\alpha + 4\,\beta\,\frac{x_2}{2} + 4\,\gamma\,\frac{x_2^2}{4} + 4\,\delta\,\frac{x_2^3}{8}$$

$$y_2 = \alpha + \beta\,x_2 + \gamma\,x_2^2 + \delta\,x_2^3$$

Somit ist: $$F_s = \alpha\,x_2 + \frac{\beta}{2} x_2^2 + \frac{\gamma}{3} x_2^3 + \frac{\delta}{4} x_2^4 \qquad \ldots (8)$$

Aus den Gln. (7) und (8) folgt: $F_s = F$, was zu beweisen war.

Für Parabeln vierten Grades:

$$y = \alpha + \beta\,x + \gamma\,x^2 + \delta\,x^3 + \varepsilon\,x^4$$

besteht diese Beziehung nicht mehr; denn in Gl. (7) ergäbe sich ein weiteres Glied: $\frac{\varepsilon}{5} x_2^5$, während in Gl. (8) ein anderes $\frac{5}{24}\,\varepsilon\,x_2^5$ (es ist allerdings nur um ca. 4% kleiner) folgen würde.

Aus den Gln. (7) und (8) ergibt sich, daß auch dann die Beziehung: $F_s = F$ besteht, wenn von den Konstanten α, β, γ, δ beliebig viele gleich Null sind. An dem Gesagten ändert sich ferner nichts, wenn $y_0 =$ Null oder/und $y_2 =$ Null sind.

Kommt man wieder darauf zurück, daß die Ordinatenwerte Schichtenflächen bedeuten, so können obige Ergebnisse folgendermaßen zusammengefaßt werden: Hat ein Körper in jeder Höhe z eine Querschnittsfläche $q\ (z)$, deren Inhalt eine ganze rationale Funktion höchstens dritten Grades von z ist, so gibt die Simpsonsche Regel (= Keplersche Regel) exakte Werte. Zur exakten Kubatur genügen sodann drei parallele ebene Querschnitte in bekannten gleichen Abständen. Eine oder beide der äußeren Schnittflächen können zu Kanten oder Punkten zusammenschrumpfen.

Deformiert man also irgendeinen Körper von obiger Eigenschaft so zwar, daß die Größen seiner Querschnittflächen konstant bleiben, im übrigen jedoch beliebig, so bleibt das Volumen (Cavalierisches Prinzip) unverändert und das Ergebnis der Volumenbestimmung ändert sich ebenfalls nicht.

Daraus folgt die große Mannigfaltigkeit der Körper, für welche die Simpsonsche Regel exakte Werte liefert. Einige solche Körper werden in der Folge angeführt.

Alle Körper, deren Oberflächen Flächen zweiter Ordnung sind, sowie solche durch zwei parallele Ebenen davon ausgeschnittenen Zonen besitzen obige Eigenschaften. Zur Beweisführung gehen wir von der allgemeinen Gl. der Flächen zweiter Ordnung aus.

$$A\,x^2 + By^2 + Cz^2 + D\,x\,y + E\,y\,z + F\,x\,z + G\,x + H\,y + J\,z + K = 0 \qquad (9)$$

Eine horizontale Ebene in der Höhe z ergibt eine Schnittkurve

$$A\,x^2 + B\,y^2 + D\,x\,y + (G + F\,z)\,x + (H + E\,z)\,y + (K + J\,z + C\,z^2) = 0$$

Wir drehen das Koordinatensystem so, daß es parallel wird zu den Hauptachsen der Schnittkurve. Da in allen Gln. der Kurven zweiter Ordnung, deren Achsen parallel sind zu den Koordinatenachsen, das Glied $x\,.\,y$ fehlt und da bekanntlich infolge der Drehung des Koordinatensystems die Koeffizienten von x^2, y^2, x und y Veränderungen erfahren, die nur von A, B, D abhängen, während das Glied: $(K + J\,z + C\,z^2)$ unverändert bleibt, folgt:

$$A'x^2 + B'y^2 + (G' + F'z)\,x + (H' + E'z)\,y + (K + J\,z + C\,z^2) = 0$$

oder

$$A'\left(x^2 + \frac{G' + F'z}{A'}\,x\right) + B'\left(y^2 + \frac{H' + E'z}{B'}\,y\right) + (K + J\,z + C\,z^2) = 0$$

oder

$$A'\left(x + \frac{G' + F'z}{2\,A'}\right)^2 + B'\left(y + \frac{H' + E'z}{2\,B'}\right)^2 + (K + J\,z + C\,z^2) = 0 \qquad (10)$$

Wenn man zunächst nur begrenzte Volumina betrachtet, so hat man vorauszusetzen, daß die Schnittkurve eine Ellipse (Spezialfall = Kreis) ist; denn sie ist die einzige Kurve zweiter Ordnung, die im Endlichen geschlossen ist. Die Gl. einer Ellipse mit den Achsen parallel zu x, y und den Mittelpunktskoordinaten p, q lautet:

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots \quad (11)$$

Bringt man Gl. (10) auf diese Form und beachtet man, daß eine Ellipse mit den Halbachsen a, b den Flächeninhalt $a\,.\,b\,.\,\pi$ aufweist, so erkennt man, daß die Schnittfläche $q\,(z)$ eine ganze rationale Funktion von nur zweiter Ordnung ist. Somit ist der Beweis für begrenzte Volumina erbracht. Auch die nicht im Endlichen geschlossenen Schnittflächen ergeben ebenfalls richtige Resultate; denn diese werden einzeln ∞ und somit nach Gl. (4) auch die Volumina. Ähnliche Überlegungen könnte man auch für andere algebraische und für gewisse transzendente Flächen anstellen.

Zur Verifikation des obigen Beweises sind die Kubaturen einiger spezieller Körper der genannten Art (die Schnitte werden parallel zu zwei Hauptachsen gelegt) angeführt, die man auch in manchen Lehrbüchern der Mathematik findet.

Die Gl. eines dreiachsigen Ellipsoides, dessen Hauptachsen in den Koordinatenachsen liegen, lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Eine horizontale Ebene in der Höhe z ergibt die Schnittkurve:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

woraus folgt: $$q(z) = a \cdot b \cdot \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \cdot \pi$$

$q(z)$ ist also eine ganze rationale Funktion < 3. Grades. Somit gibt Gl. (4) ein exaktes Resultat. Legt man die untere und obere Ebene je tangential an das Ellipsoid, so folgt:

$$V = \frac{2c}{6}(0 + 4\,a\,b\,\pi + 0) = \frac{4}{3} a\,b\,c\,\pi$$

Fallen die Hauptachsen mit den Koordinatenachsen zusammen, so lauten die Gln. für das

einschalige Hyperboloid: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

zweischalige Hyperboloid: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

elliptische Paraboloid: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

hyperbolische Paraboloid: $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

für den reellen Kegel: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Man sieht unmittelbar, daß diese Gln., abgesehen von der Gl. des hyperbolischen Paraboloides, ganz analog der Gl. des Ellipsoides behandelt werden können. Ebene Schnitte des hyperbolischen Paraboloides ergeben Parabeln oder Hyperbeln (zerfallende Hyperbeln für $z =$ Null). Es ergeben sich also die erwähnten ∞ großen Zonen. Dies ist auch bei den hyperbolischen und parabolischen Zylindern der Fall. Nebenbei sei bemerkt, daß die xy-Ebene vom hyperbolischen Paraboloid einen Körper abschneidet, der Querschnitte parallel zur zy-Ebene aufweist, die proportional x^3 sind. Das Volumen dieses Körpers ist somit nach der Simpsonschen Regel ebenfalls exakt berechenbar.

Außer diesen Körpern findet man in der mathematischen Literatur viele andere (faßähnliche Körper, verschiedene Gewölbe usw.), deren Volumina nach der Simpsonschen Regel ebenfalls exakt berechnet sind. Daß unübersehbar viele analytisch definierte Körper diese Eigenschaft haben, ist für die Mathematik sehr, für das Vermessungswesen weniger beachtenswert.

Es dürfte jedoch nicht bekannt sein, daß diese Eigenschaft auch beliebig breiten Zonen aller Regelflächen zukommt, gleichgültig ob es sich um analytische oder rein graphische Regelflächen handelt. Im Vermessungswesen sind jedoch gerade die Regelflächen bedeutungsvoll. Abgesehen von den Böschungsflächen, die bei Ingenieurbauten gebildet werden und homogenes Schuttmaterial auf natürliche Weise erzeugt, spielen Regelflächen allgemeinster Art für die Herstellung von Geländeschichtenplänen, die zu Kubaturen dienen sollen, eine beachtenswerte Rolle. Der Beweis, daß die Simpsonsche Regel für beliebig breite Zonen aller Regelflächen exakte Werte liefert, wird wegen seiner Einfachheit, vermutlichen Neuheit sowie des geodätischen Interesses wegen gegeben.

Die Kubatur der Prismatoide nach der Simpsonschen Regel ist bekannt und wird vorerst geometrisch bewiesen. Prismatoide sind Körper, die von zwei parallelen, beliebig begrenzten Vielecken (Grundflächen genannt) und von Dreiecken (Seitenflächen genannt) begrenzt werden, welche mit einer der beiden Grundflächen einen Eckpunkt und mit der anderen eine Seite gemeinschaftlich haben. Es können auch zwei solche Dreiecke in eine Ebene zusammenfallen.

In der Mittelebene des in der Fig. 2 dargestellten Prismatoides wählen wir einen Punkt A, den wir uns mit allen Eckpunkten des Prismatoides verbunden denken. Drei dieser Verbindungsgeraden sind strichpunktiert gezeichnet. Dadurch ist das Prismatoid in Pyramiden zerlegt. Davon haben zwei die Grundfläche U, bzw. ● und die Höhe $\frac{H}{2}$ ($H =$ Höhe des Prismatoides). Ihre Volumina sind also durch das erste und letzte Glied der Gl. (4) gegeben. Die übrigen dreiseitigen Pyramiden besitzen je 3 Kanten des Prismatoides und 3 Kanten sind die genannten Verbindungsgeraden. Eine dieser dreiseitigen Pyramiden ist $A\ 1\ 2\ 3$. Ihr Volumen ist viermal dem Volumen der Pyramide $A\ 2\ 4\ 5$, bzw. $A\ 3\ 4\ 5$; denn die Grundflächen 1 2 5 und 2 3 5 sind einander gleich und dasselbe gilt für die Grundflächen 2 4 5 und 3 4 5. Das Volumen der genannten Pyramide $A\ 2\ 4\ 5$ oder $A\ 3\ 4\ 5$ ist: Fläche $(A\ 4\ 5) \cdot \frac{H}{6}$. Da die Summe aller dieser in der Mittelebene gelegenen Grundflächen gleich M ist, ergibt sich somit auch das mittlere Glied der Gl. (4).

Denkt man sich nun in beiden Grundflächen die Anzahl der Eckpunkte unendlich groß werdend, so gehen diese Vielecke sowie jenes des Mittelschnittes in geschlossene Kurven über und die Gesamtheit aller Seitenflächen bildet sodann eine Regelfläche. Die drei geschlossenen Kurven können als Leitlinien dieser Regelfläche aufgefaßt werden, d. h. die Regelfläche kann man sich durch eine Gerade erzeugt denken, die sich so bewegt, daß sie ständig die drei Kurven schneidet. Da dieser Überlegung keinerlei Voraussetzungen über die Eigenschaften der genannten Kurve zugrunde liegen, gelten sie für Regelflächen allgemeinster Art.

Sind somit die Schichtenkörper, deren Höhe $2\,h$ beträgt, von beliebigen Regelflächen umschlossen, so können ihre Volumina nach Gl. (4), bzw.

ihre Summe nach Gl. (3) exakt berechnet werden. Die drei jedem Schichtenkörper angehörigen Schichtenlinien bilden also Leitkurven seiner Regelfläche.

Die Genauigkeit einer Vermessung, die zur Kubatur dient, soll daher soweit getrieben werden, daß die Höhen $2\,h$ der Schichtenkörper hinreichend klein werden, um die Geländefläche durch die Regelflächen der Schichtenkörper ersetzen zu können. Das ist der Fall, wenn, von jedem Punkt einer Schichtenlinie ausgehend, mindestens eine Richtung existiert, in der lineare Interpolation bis zur vorhergehenden und folgenden Schichtenlinie erlaubt ist.

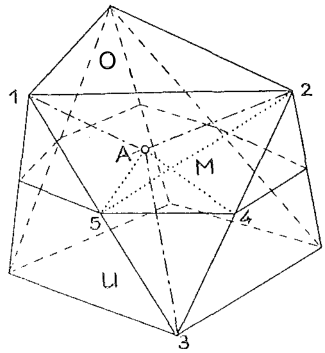

Fig. 2

Zur Verifikation der oben abgeleiteten Aussagen über allgemeinste Regelflächen kann man von algebraischen Leitkurven ausgehen. Haben diese die Ordnung n_1, n_2, n_3 und schneidet keine derselben eine andere, so weist die Regelfläche die Ordnung $2 \,.\, n_1 \,.\, n_2 \,.\, n_3$ auf (siehe z. B. J. Krames: „Konstruktive Behandlung der Regelflächen", Franz Deuticke 1931). Sind die Leitkurven drei windschiefe Gerade, so kommt man sonach zu den Regelflächen zweiter Ordnung (einschaliges Hyperboloid und hyperbolisches Paraboloid) zurück, deren Kubaturen oben behandelt wurden. Einfache Verifikationen ergeben ferner die Konoide. Das „Conocuneus von Wallis" ist eine Fläche vierter Ordnung:

$$a^2\, y^2 + x^2\, z^2 = b^2\, x^2 \qquad \ldots \quad (12)$$

Man erkennt, daß die Schnittkurven senkrecht zur x-Achse Ellipsen sind. Die weitere Berechnung ist daher analog der des Ellipsoides.

Die Fehler der Kubatur werden verursacht:

a) durch Abweichung der Geländefläche von den Regelflächen der Schichtenkörper (allgemein von den nach der Simpsonschen Regel exakt berechenbaren Flächen),

b) durch Lagefehler der Schichtenlinien,

c) durch Fehler der Flächenermittlung. (Diese sind in der Literatur weitgehend behandelt.)

Zu a): Das bekannte Restglied der Simpsonschen Regel stellt ein Intervall dar, innerhalb welchem der Fehler dieser Regel schwankt. Die Größe dieses Intervalles kann in unserem speziellen Fall im allgemeinen viel kleiner angesetzt werden. Man greift nämlich aus den Schichtenkörpern jene heraus, die offensichtlich große Abweichungen von Regelflächen aufweisen. Für diese Schichtenkörper werden im Schichtenplan Schichtenlinien interpoliert. Die Größen dieser so interpolierten Schichtenflächen werden ermittelt und graphisch aufgetragen. Fig. 3 stellt diese Flächen als vier strichliert gezeichnete Ordinatenwerte eines Schichtenkörpers dar. Die Kurve durch die Punkte 0, 1, 2 ist die durch Gl. (5) bestimmte quadratische Parabel. Die Differenz der schräg schraffierten Flächen von der horizontal schraffierten Fläche ergibt somit die Abschätzung des gesuchten Fehlers. Werden die Schichtenlinien mit Absicht „falsch interpoliert", d. h. es werden Schichtenlinien eingezeichnet, die um kaum zu erwartende Beträge von den richtigen Schichtenlinien abweichen, so kann man auf dieselbe Weise die Größe eines kaum zu erwartenden Fehlers finden.

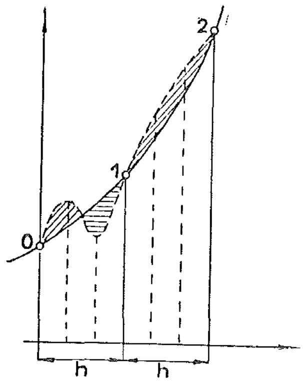

Fig. 3

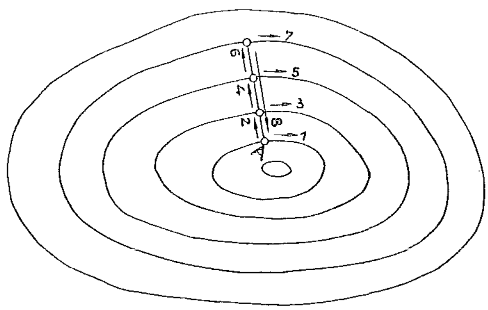

Fig. 4

Zu b): Die Lagefehler und damit auch der mittlere Lagefehler m_L der Punkte einer gezeichneten Schichtenlinie sind bekanntlich von der verwendeten Methode und vom Kartierungsfehler abhängig. (Siehe z. B. Raab: „Kritik der Fehlergrenzen für die Oberflächendarstellung in topographischen Karten", Allgem. Verm.-Nachr. 1935, Nr. 31.) Diese Lagefehler sind im allgemeinen zufällige Fehler. Denkt man sich eine gezeichnete Schichtenlinie, die in ihrem ganzen Verlauf nur auf einer Seite der richtigen Schichtenlinie liegt und von dieser um m_L abweicht, so ergibt sich ein Fehler: $m_L \,.\, s$, wobei s die Länge der Schichtenlinie bedeutet. Der mittlere Fehler einer Schichtenfläche ist $m_L \,.\, \sqrt{s}$ und der mittlere Fehler des Volumens, verursacht durch m_L, kann somit unter Beachtung der Gl. (3) leicht berechnet werden.

Zum Schlusse sei noch ein kleiner Kunstgriff erwähnt, der beim Planimetrieren der Schichtenflächen Anwendung finden kann und der ebenfalls neu sein dürfte. Fig. 4 stellt den Schichtenplan eines Berges dar. Will man nach Gl. (1) sein Volumen berechnen, so kann man $[i]$ mit dem Planimeter direkt bilden. Man beginnt in Punkt A und fährt mit dem Fahrstift des Planimeters so wie es die in der Figur bezifferten Pfeile anzeigen. Die Differenz zwischen Anfangs- und Endlesung ergibt $[i]$, bzw.

bei entsprechender Einstellung des Fahrarmes $[i] \cdot h$. Das Ergebnis ist auf diese Weise wesentlich rascher und genauer erreichbar, als dies bei einzelner Bestimmung der Flächen und deren Addition erfolgen kann. Analog kann man $u + o$ (Gl. 1), bzw. bei Anwendung der Gl. (3) können ihre einzelnen Glieder ermittelt werden.

Bemerkt sei, daß man sich das Zurückfahren (siehe Pfeil 8) ersparen kann, wenn man in einer gezeichneten „Nullkurve" von einer Schichtenlinie zur anderen weiterschreitet. (K. Killian: „Planimeterstudie", Allgem. Verm.-Nachr. 1939, Nr. 31).

Ferner läßt sich ein im allgemeinen nicht erforderliches, aber für gewisse Belange vielleicht doch zweckmäßiges Verfahren angeben: Wird durch eine einfache Einrichtung bewirkt, daß die Achse des Zeichenstiftes eines stereophotogrammetrischen Auswertegerätes ständig mit der Achse des Fahrstiftes des Planimeters zusammenfällt, so kann mit der Zeichnung des Schichtenplanes oder auch ohne dieser die Kubatur erfolgen. Schreitet man in keiner „Nullkurve" weiter, so ist das erwähnte Zurückfahren notwendig. Dient der Multiplex oder ein diesem ähnliches Gerät oder der Wild A 6 zur Auswertung, so ist das Zurückfahren ohne weiteres möglich. Bei anderen Universalauswertegeräten würde dies zweckmäßig mit dem vom Auswertegerät entkuppelten Planimeter erfolgen.

In dieser Arbeit wurde bis jetzt angenommen, daß der zu kubierende Körper durch Schichtenlinien festgelegt ist. Die angeführten Gln. bleiben ihrem Wesen nach bestehen, wenn der Körper durch andere parallele, gleichabständige Schnittflächen, z. B. durch Querprofile bestimmt ist.

Kleine Mitteilungen

o. Prof. i. R. Dr.-Ing. Heinrich Hohenner — 80 Jahre*)

Am 7. Dezember d. J. vollendete der emeritierte Ordinarius für Geodäsie an der Technischen Hochschule Darmstadt, Professor Dr.-Ing. H. Hohenner, das 80. Lebensjahr. Der Feier dieses auch heute noch seltenen Geburtstages können wir nicht besser gedenken als durch eine Rückschau auf das arbeits- und erfolgreiche Leben eines hochverdienten Forschers und Lehrers. Geboren am 7. Dezember 1874 in Wunsiedel (Oberfranken) als Sohn eines Zinngießermeisters, studierte Hohenner nach Absolvierung der Realschule und der Industrieschule Nürnberg an der Technischen Hochschule München Geodäsie und legte seine Diplomprüfung mit so hervorragendem Erfolg ab, daß er bereits zwei Jahre später (1896) zum Assistenten bestellt wurde. Für uns Österreicher ist es von besonderem Intesesse, daß er damals für die Bayerische Erdmessungskommission Vermessungsarbeiten in den Tiroler Bergen sowie die Triangulierung und Meßtischaufnahme von Kufstein durchführte. Schon mit 23 Jahren habilitierte sich der junge Gelehrte und folgte 1902 einem Ruf als Extraordinarius für Geodäsie an die Technische Hochschule Stuttgart. Noch im selben Jahre wurde er in

*) Die wichtigsten Daten aus dem Leben des Jubilars sind der kleinen Festschrift „Heinrich Hohenner, Eine Würdigung seiner Lebensarbeit aus Anlaß seines 80. Geburtstages" entnommen, die von G. Ewald und W. Ohlemutz verfaßt und vom Landesverein Hessen des DVW. herausgegeben wurde.