

Paper-ID: VGI_195505



Zur Theorie der trigonometrischen Höhenmessung

Karl Ledersteger ¹

¹ *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **43** (2, 3), S. 33–39, 65–73

1955

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Ledersteger_VGI_195505,  
Title = {Zur Theorie der trigonometrischen H{"o}henmessung},  
Author = {Ledersteger, Karl},  
Journal = {"Österreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen"},  
Pages = {33--39, 65--73},  
Number = {2, 3},  
Year = {1955},  
Volume = {43}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom

ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

Hofrat Prof. Dr. h. c. mult. E. D o l e ž a l,
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. L e g o und o. ö. Professor Dipl.-Ing. Dr. H. R o h r e r

Nr. 2

Baden bei Wien, Ende April 1955

XLIII. Jg.

Zur Theorie der trigonometrischen Höhenmessung

Von K. L e d e r s t e g e r, Wien

(Veröffentlichung der Österr. Kommission für die Internationale Erdmessung)

Zusammenfassung: Durch eine geringe Modifikation der bekannten Formeln für das trigonometrische Nivellement wird erreicht, daß der Höhenunterschied aus Hin- und Rückmessung strenge mit dem arithmetischen Mittel der Absolutbeträge der Hauptglieder zusammenfällt. Während sich die H e l m e r t s c h e Kreisbogenbedingung für das Ellipsoid leicht direkt verifizieren läßt, stößt dieser Nachweis für das Geoid auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Die beiden Fälle, in denen die trigonometrische Höhenmessung prinzipiell unmittelbar Meereshöhendifferenzen liefern kann, werden eingehend diskutiert und das einengende H e l m e r t s c h e Kriterium für die Kreisbogenbedingung als praktisch unbrauchbar erwiesen. Nur in Verbindung mit einem astronomischen Nivellement lassen sich strenge Meereshöhen gewinnen, genähert nur bei Beschränkung auf kurze Distanzen. Die praktische Berechnung der Höhen aus gegenseitigen Zenitdistanzen darf auf die Hauptglieder beschränkt werden, während die Differenz der Endwerte aus Hin- und Rückmessung die mittlere Geoidkrümmung unter der einschränkenden Voraussetzung gleicher Refraktionswinkel liefert.

Summary: By a trifling modification of the known formulae for triangulated heights it is obtained, that the height-difference of reciprocal observations coincides with the mean of the absolute chief terms. While H e l m e r t ' s circular curvature condition easily can be verified for the ellipsoid, this is impossible for geoid. The two cases, in which the trigonometrical levelling gives heights above sea-level, are detailed and H e l m e r t ' s criterion for the mentioned condition is proved to be of no practical use. Only in connection with astronomical levelling heights above sea-level can be gained, approximately by the use of short distances. The practical calculation of heights using reciprocal observations may be restricted on the chief terms, while the difference of the total values measuring in both directions gives the mean curvature of geoid presumed the same angles of refraction.

1.

Die trigonometrische Höhenmessung wird in der Praxis bekanntlich in Zuge der Triangulierung 3. bis 5. O., und zwar im Anschluß an das

Präzisions- und technische Nivellement zur Verdichtung des Höhennetzes verwendet. Betrachtet man jedoch diese Art der Höhenbestimmung aus gegenseitigen Zenitdistanzen von einem streng physikalischen Standpunkt aus, so ergeben sich zwei wichtige Fragen, nämlich die nach der wahren Natur der trigonometrisch abgeleiteten Höhenunterschiede und das Problem der Lotabweichungsbestimmung oder der Verwertung des trigonometrischen Nivellements für die Geoidbestimmung. Wir wollen uns auf die erste Frage beschränken.

Zunächst seien die schon von H e l m e r t angegebenen grundlegenden Beziehungen in aller Kürze abgeleitet. Um die beobachteten Zenitdistanzen μ' ebenso wie die Grundlinien und die Winkelmessungen der Triangulierung auf eine eindeutige Rechenfläche zu beziehen, hat ihre Reduktion von der tatsächlichen Lotrichtung auf die Normale zum Referenzellipsoid, d. h. vom astronomischen (Z') auf das ellipsoidische Zenit Z zu erfolgen. Liegt in P_1 die relative Lotabweichung ϑ_1 im Azimut A vor: $\xi_1 = \vartheta_1 \cos A$; $\eta_1 = \vartheta_1 \sin A$ und ist α_{12} das Azimut der Visur und $\varepsilon_1 = \vartheta_1 \cos(\alpha_{12} - A)$ die in diese Richtung fallende Lotabweichungskomponente, so folgt aus Fig. 1 unmittelbar

$$\mu_{12} - \mu'_{12} = \xi_1 \cos \alpha_{12} + \eta_1 \sin \alpha_{12} = \varepsilon_1. \quad (1)$$

Die Lotabweichung geht mit vollem Betrage in die beobachtete Zenitdistanz ein, wenn die Visur im Azimut A liegt.

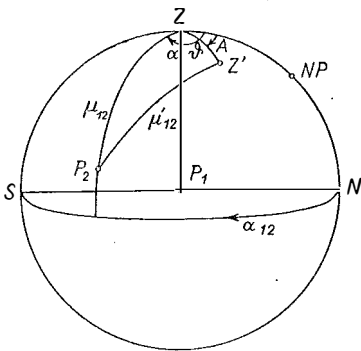


Fig. 1

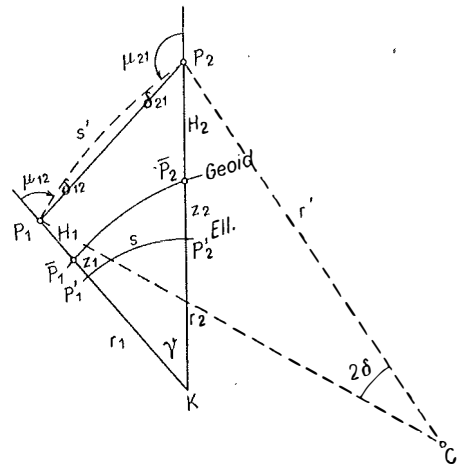


Fig. 2

Es mögen die bereits wegen Lotabweichung korrigierten, also ellipsoidischen und überdies refraktionsfreien gegenseitigen Zenitdistanzen μ_{12} und μ_{21} vorliegen. Da die Ellipsoidnormalen KP_1 und KP_2 (Fig. 2) der beiden benachbarten Punkte im allgemeinen windschief sind, denken wir sie uns auf eine zwischen ihnen liegende und zu beiden parallele Ebene projiziert, wodurch sowohl die Meereshöhen H und die Geoidhöhen z bezüglich des Referenzellipsoides wie auch der Zwischenwinkel γ treu abgebildet werden. Nicht ganz streng, jedoch mit vollständig ausreichender Genauigkeit gilt

dies auch für die geodätische Linie s auf dem Ellipsoid und für die beiden Zenitdistanzen μ . Die Refraktionskorrektion wird gewöhnlich in der Form $\frac{k\gamma}{2}$ angesetzt, worin k den Refraktionskoeffizienten bedeutet. Mit besserer Annäherung ist aber

$$s = s' \cos \beta',$$

unter β' den beobachteten Höhenwinkel verstanden, so daß sich zusammen mit

$$\gamma = \frac{s}{r'} ; 2 \delta = \frac{s'}{r'} ; r = k r'$$

für den Refraktionswinkel δ ($= \delta_{12} = \delta_{21}$) ergibt

$$\delta = \frac{\gamma k}{2 \cos \beta'} \quad (2)$$

In Erweiterung von (1) folgt somit

$$\left. \begin{aligned} \mu_{12} &= \mu'_{12} + \frac{k\gamma}{2 \cos \beta'} + \xi_1 \cos \alpha_{12} + \eta_1 \sin \alpha_{12} \\ \mu_{21} &= \mu'_{21} + \frac{k\gamma}{2 \cos \beta'} + \xi_2 \cos \alpha_{21} + \eta_2 \sin \alpha_{21} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Der Tangensatz der ebenen Trigonometrie liefert für das Dreieck KP_1P_2

$$\frac{KP_2 - KP_1}{KP_2 + KP_1} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\mu_{21} - \mu_{12})}{\operatorname{tg} \left[180^\circ - \frac{1}{2} (\mu_{12} + \mu_{21}) \right]}$$

und wir finden wegen $\mu_{21} = \gamma + (180^\circ - \mu_{12})$

sofort den Höhenunterschied

$$\begin{aligned} \Delta H &= (H_2 - H_1) + (z_2 - z_1) + (r_2 - r_1) = \\ &= \left[2r + H_1 + H_2 + z_1 + z_2 \right] \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\mu_{21} - \mu_{12}). \end{aligned} \quad (4)$$

In dieser Formel wird die kleine Differenz $(r_2 - r_1)$ unterdrückt, worin die Helmerische „Kreisbogenbedingung“ zum Ausdruck kommt. Sie besagt, daß der Ellipsenbogen durch einen Kreisbogen ersetzt werden darf, der mit ersterem die beiden Punkte P_1 und P_2 und die beiden Tangenten in diesen Punkten gemeinsam hat. Damit aber ist der Kreisbogen überbestimmt und es muß daher die Differenz $(r_2 - r_1)$ abgeschätzt werden, was auf direktem Wege leicht möglich ist. Ohne Zweifel wird diese Differenz am größten sein, wenn wir es mit einem Meridianschnitt zu tun haben, und wir wollen daher die Untersuchung auf diesen Fall beschränken. Bekanntlich ist die Steigung der Kurvennormalen im Ellipsenpunkt P_1 (Fig. 3)

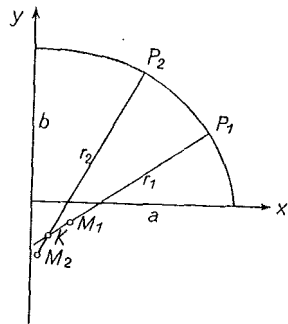


Fig. 3

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} \text{ und daher ihre Gleichung } y = x \operatorname{tg} \varphi_1 - \frac{e^2}{1 - e^2} y_1.$$

Ist $K(\xi, \eta)$ der Schnittpunkt der beiden Normalen von P_1 und P_2 , so findet man leicht

$$\xi = + \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{g}; \quad \eta = + \frac{e^2}{(1 - e^2)g} (y_2 \operatorname{tg} \varphi_1 - y_1 \operatorname{tg} \varphi_2),$$

wobei $(\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1) = g$ gesetzt ist. Nunmehr folgt wegen

$$x = N \cos \varphi; \quad y = N (1 - e^2) \sin \varphi$$

aus

$$(KP_1)^2 = r_1^2 = (x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2$$

sofort

$$\begin{aligned} r_1^2 g^2 &= \left[gN_1 \cos \varphi_1 - e^2 (N_2 \sin \varphi_2 - N_1 \sin \varphi_1) \right]^2 + \\ &+ \left[gN_1 (1 - e^2) \sin \varphi_1 - e^2 (N_2 \sin \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_1 - N_1 \sin \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2) \right]^2 = \\ &= (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1) (gN_1 \cos \varphi_1 - e^2 f)^2, \end{aligned}$$

wenn man noch

$$(N_2 \sin \varphi_2 - N_1 \sin \varphi_1) = f$$

setzt. Damit wird endlich

$$\text{und analog} \quad \left. \begin{aligned} r_1 &= N_1 - \frac{e^2 f}{g \cos \varphi_1} \\ r_2 &= N_2 - \frac{e^2 f}{g \cos \varphi_2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Da natürlich nur kleine Entfernungen in Frage kommen, darf man bei der Entwicklung der Differenz $(r_2 - r_1)$ die Glieder der Ordnung e^4 bereits unterdrücken und findet demnach

$$\begin{aligned} N &= \frac{a}{W} = a \left(1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi + \dots \right) \\ e^2 f &= ae^2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \end{aligned}$$

Ferner ist

$$g = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}$$

und daher

$$\left(\frac{1}{g \cos \varphi_2} - \frac{1}{g \cos \varphi_1} \right) = \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{\sin \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right)}.$$

Es folgt schließlich

$$\begin{aligned} (r_2 - r_1) &= \frac{ae^2}{2} (\sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_1) - ae^2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \frac{\sin \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right)} = \\ &= ae^2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \left[\frac{1}{2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Der Maximalbetrag dieser Differenz, die für $\varphi_2 > \varphi_1$ stets negativ ist, wird in der Mittelbreite 45° erreicht und beträgt dort für einen Bogen von $30'$ Amplitude oder von rund 55 km erst $3,5 \text{ mm}$. Man darf also diese Differenz für alle in der Praxis vorkommenden, selten 10 km übersteigenden Seitenlängen unbedenklich vernachlässigen.

Damit reduziert sich in (4) tatsächlich $\Delta \mathfrak{H}$ auf die ellipsoidische Höhendifferenz. Setzt man noch mit ausreichender Genauigkeit $\text{tg} \frac{\gamma}{2} \sim \gamma/2 = \frac{s}{2r}$, so erhält man als endgültige Formel für gegenseitige Zenitdistanzen

$$\Delta \mathfrak{H}_{12} = (H_2 - H_1) + (z_2 - z_1) = s \left(1 + \frac{\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2}{2r} \right) \text{tg} \frac{1}{2} (\mu_{21} - \mu_{12}). \quad (7)$$

Das Produkt s_m der beiden ersten Faktoren stellt die Entfernung zwischen P_1 und P_2 dar, gemessen in einer in mittlerer Höhe gelegenen Niveaulfläche. Die gegenseitige Zenitdistanzmessung vermag also bis auf eine Konstante die Höhen der Beobachtungspunkte über dem Referenzellipsoid zu liefern. Ihre hohe theoretische Bedeutung tritt namentlich dann klar hervor, wenn man es nicht mit irgendwelchen relativen Lotabweichungen zu tun hat, sondern mit den auf das eindeutig gelagerte mittlere Erdellipsoid bezogenen Lotabweichungen, die allerdings wegen der Lotkrümmung noch nicht mit den streng absoluten, für die Geoidpunkte geltenden Lotabweichungen zusammenfallen. An Stelle irgendwelcher Geoidhöhen z treten in diesem Falle die Geoidundulationen ζ . Sind diese bekannt, so kann aus (7) die Differenz der Meereshöhen berechnet werden; sind umgekehrt die Meereshöhen mittels geometrischen Nivellements bestimmt worden, so liefert das trigonometrische Nivellement die Undulationen des Geoides.

In der Praxis verwendet man lieber die Formel für die einseitige Zenitdistanz, die aus (7) leicht hervorgeht, wenn man μ_{21} mittels γ eliminiert:

$$\Delta \mathfrak{H}_{12} = s_m \cdot \text{cotg} \left(\mu_{12} - \frac{\gamma}{2} \right). \quad (8)$$

Denkt man sich die beobachtete Zenitdistanz μ' nur wegen Lotabweichung korrigiert

$$\bar{\mu}_{12} = \mu_{12}' + \xi_1 \cos \alpha_{12} + \eta_1 \sin \alpha_{12},$$

setzt

$$\nu = \frac{\gamma}{2} \left(1 - \frac{k}{\cos \beta'} \right)$$

und führt an Stelle der Zenitdistanz $\bar{\mu}$ den entsprechenden Höhenwinkel $\bar{\beta} = (90^\circ - \bar{\mu})$ ein, so nimmt (8) die Gestalt an

$$\Delta \mathfrak{H}_{12} = s_m \cdot \text{tg} (\bar{\beta}_{12} + \nu),$$

woraus mit der Tangensreihe leicht folgt

$$\Delta \mathfrak{H}_{12} = s \left(1 + \frac{\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2}{2r} \right) \left[\text{tg} \bar{\beta}_{12} + \nu (1 + \text{tg}^2 \bar{\beta}_{12}) + \nu^2 \text{tg} \bar{\beta}_{12} (1 + \text{tg}^2 \bar{\beta}_{12}) \right]. \quad (8a)$$

Genau dasselbe Resultat liefert die Rückvisur

$$\Delta \mathfrak{H}_{21} = s_m \operatorname{tg} (\bar{\beta}_{21} + \nu) = - \Delta \mathfrak{H}_{12},$$

d. h. der Betrag

$$\Delta \mathfrak{H}_{21} = s_m [\operatorname{tg} \bar{\beta}_{21} + \nu (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\beta}_{21}) + \nu^2 \operatorname{tg} \bar{\beta}_{21} (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\beta}_{21})]$$

ist einschließlich des Gliedes ν^2 entgegengesetzt gleich (8 a), was man leicht erkennt, wenn man für den Tiefenwinkel $\bar{\beta}_{21}$ seinen Wert $-(\bar{\beta}_{12} + 2\nu)$ einführt. Das quadratische Glied erreicht für eine Seite von 10 km und einen Höhenwinkel $\beta = 6^\circ$ nur den Wert 0,5 mm und darf daher ohneweiters unterdrückt werden. Schreibt man somit

$$\Delta \mathfrak{H}_{12} = \left(1 + \frac{\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2}{2r}\right) \left[s \operatorname{tg} \bar{\beta}_{12} + \frac{s^2}{2r} \left(1 - \frac{k}{\cos \beta_{12}}\right) \frac{1}{\cos^2 \bar{\beta}_{12}} \right], \quad (8 \text{ b})$$

so unterscheidet sich diese Höhenformel von den übrigen leichten Varianten innerhalb der angestrebten Genauigkeit in erster Linie dadurch, daß im Nenner des Refraktionsgliedes nach Reicheneder¹⁾ $\cos^3 \beta$ statt wie sonst $\cos^2 \beta$ auftritt. Kann dies bei steileren Visuren immerhin das Zentimeter überschreiten, so ist die genauere Formel, die kürzlich W. Hofmann²⁾ entwickelt hat, praktisch bedeutungslos.

Wir wissen bereits, daß obige Formel nicht nur für die Kugel gilt, sondern auch auf das Ellipsoid angewendet werden kann. Doch muß die Abhängigkeit des mittleren Krümmungsradius des Bogens s von Breite und Azimut berücksichtigt werden. Denn aus dem mittleren Gliede, der sogenannten „Krümmungskorrektur“

$$\frac{s^2}{2r} (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\beta})$$

folgt für eine Änderung dr des Radius als zugehörige Änderung des Höhenunterschiedes

$$d(\Delta \mathfrak{H}) \doteq - \frac{s^2}{2r^2} dr. \quad (9)$$

Demnach bewirkt für eine Seite $s = 10 \text{ km}$ ein Fehler von 800 m im Radius bereits einen Höhenfehler von 1 mm.

Besonders bemerkenswert ist, daß im Falle gegenseitiger Höhenunterschiede die Differenz der beiden Hauptglieder mit sehr großer Annäherung den doppelten Höhenunterschied unabhängig von der Krümmungs- und Refraktionskorrektur liefert, wenn man wie bisher von einem Unterschied des Refraktionskoeffizienten in P_1 und P_2 absieht. Man findet nämlich dafür

$$\begin{aligned} & s_m [\operatorname{tg} \bar{\beta}_{12} - \operatorname{tg} \bar{\beta}_{21}] = s_m [\operatorname{tg} \bar{\beta}_{12} + \operatorname{tg} (\bar{\beta}_{12} + 2\nu)] = \\ & = 2 s_m [\operatorname{tg} \bar{\beta}_{12} + \nu (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\beta}_{12}) + 2\nu^2 \operatorname{tg} \bar{\beta}_{12} (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\beta}_{12})] \doteq 2 \Delta \mathfrak{H}, \quad (10) \end{aligned}$$

¹⁾ K. Reicheneder: Eine Formel zur trigonometrischen Höhenmessung, Allgemeine Verm.Nachrichten, Berlin 1937.

²⁾ W. Hofmann: Studien zur trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge, Habilitationsschrift München, 1954 (noch unveröffentlicht).

d. h. das arithmetische Mittel der Absolutbeträge der zwei Hauptglieder gibt den Höhenunterschied lediglich um $v^2 \operatorname{tg} \bar{\beta}_{12} (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\beta}_{12})$ zu groß, während der Näherungswert (8 b) um den gleichen Betrag zu klein ist. Schreibt man also statt (8 b) für die Hin- und Rückvisur

$$\begin{aligned} \Delta \mathfrak{H}_{12} &= s_m \left[\operatorname{tg} \bar{\beta}_{12} + v \left\{ 1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\bar{\beta}_{12} - \bar{\beta}_{21}}{2} \right) \right\} \right] \\ \Delta \mathfrak{H}_{21} &= s_m \left[\operatorname{tg} \bar{\beta}_{21} + v \left\{ 1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\bar{\beta}_{12} - \bar{\beta}_{21}}{2} \right) \right\} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

so erzielt man den Vorteil, daß der Höhenunterschied aus Hin- und Rückmessung mit dem arithmetischen Mittel der Absolutbeträge der Hauptglieder zusammenfällt. Auf das Hauptglied

$$\left(1 + \frac{\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2}{2r} \right) s \operatorname{tg} \bar{\beta}$$

wirkt ein Fehler in r mit

$$d(\Delta \mathfrak{H}) = - \frac{\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2}{2r^2} \cdot \Delta \mathfrak{H} \cdot dr \quad (12)$$

ein; in einer Mittelhöhe von 1000 m und bei einem Höhenunterschied von 500 m wird ein Fehler von 1 mm im Höhenunterschied erst von einer Änderung des Krümmungsradius um 80 km verursacht. Der Unterschied zwischen (12) und (9) erklärt sich daraus, daß das Hauptglied in erster Linie von $s \operatorname{tg} \beta \doteq \Delta \mathfrak{H}$ und nur geringfügig von r , das Krümmungsglied aber umgekehrt vorwiegend von r und nur geringfügig von β abhängt. Aus der Summe der beiden Gleichungen (11) ergibt sich schließlich für die Differenz D der absolut genommenen Hauptglieder

$$|D| = \frac{s^2}{r} (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\beta}) \left(1 - \frac{k}{\cos \bar{\beta}} \right). \quad (13)$$

(Fortsetzung folgt)

Eine Rechentafel für die 2 m -Basislatte

Von Josef E b e r w e i n

Für die 2 m -Basislatte gilt theoretisch die Formel

$$s = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad \dots (1)$$

Diese Formel ist an zwei Voraussetzungen gebunden: Der Markenabstand muß genau 2 m betragen und die Verbindungslinie der beiden Marken muß die Drehachse der Latte schneiden. Da diese beiden Voraussetzungen im allgemeinen nicht zutreffen, gilt die erweiterte Formel

$$s = k \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + c \quad \dots (2)$$

ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN
Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

Hofrat Prof. Dr. h. c. mult. E. D o l e ž a l,
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. L e g o und o. ö. Professor Dipl.-Ing. Dr. H. R o h r e r

Nr. 3

Baden bei Wien, Ende Juni 1955

XLIII. Jg.

Zur Theorie der trigonometrischen Höhenmessung

Von K. L e d e r s t e g e r, Wien

(Veröffentlichung der Österr. Kommission für die Internationale Erdmessung)

(Schluß)

2.

Bei der eingangs erwähnten praktischen Anwendung der trigonometrischen Höhenmessung sind aber im Zuge der Triangulierung die Lotabweichungen gar nicht bekannt, so daß die Berechnung der trigonometrischen Höhenunterschiede auf den beobachteten Höhenwinkeln β' beruht, die an Stelle von β in die Formeln (8 b) oder (11) eingeführt werden. Dieser Vorgang erfordert aber noch eine nähere theoretische Untersuchung, inwieweit dadurch die Meereshöhen approximiert werden. Grundsätzlich kann die trigonometrische Höhenmessung nur in zwei Fällen unmittelbar Meereshöhenunterschiede liefern.

Im ersten Falle bleibt das Referenzellipsoid der Landesvermessung auch die Bezugsfläche für die trigonometrischen Höhen und es müssen daher die beobachteten Zenitdistanzen wegen Lotabweichung korrigiert werden. Verschwindet dann die Differenz ($z_2 - z_1$) der Geoidhöhen, so geht natürlich $\Delta \xi$ in ΔH über. Doch wird die Bedingung ($z_2 - z_1$) = 0, deren Überprüfung überdies die Existenz eines astronomischen Nivellements zur Voraussetzung hat, im allgemeinen nur zufälligerweise einmal für zwei Meßpunkte erfüllt sein. Ein zwar einengendes, jedoch hinreichendes Kriterium hierfür hat bereits H e l m e r t (H. G. II, Seite 608) angegeben. Es fordert, daß für die gegebene relative Lage von Referenzellipsoid und Geoid die Lotabweichungskomponenten ϵ in den beiden Endpunkten der Visur entgegengesetzt gleich sind und außerdem die Lotabweichung in dem gegebenen Vertikalschnitt sich proportional der Entfernung ändert. Man er-

kennt leicht, daß dieses Kriterium keinerlei praktische Bedeutung besitzt. Denn der Nachweis der Proportionalität von Lotabweichung und Entfernung gelingt wieder nur mittels eines astronomischen Nivellements; liegt aber ein solches zwischen P_1 und P_2 vor, so kann allgemein $(z_2 - z_1)$ ermittelt und aus dem ellipsoidischen der Meereshöhenunterschied berechnet werden.

Im zweiten Falle werden die trigonometrischen Höhen direkt auf das Geoid bezogen und dementsprechend die beobachteten Höhenwinkel verwendet. Da aber die derart modifizierten Gleichungen (8 b) oder (11) abermals streng genommen nur für die Kugel gelten, heißt dies, daß wir die Kreisbogenbedingung nunmehr für das Geoid postulieren müssen. Man erhält bei diesem Vorgang nur dann exakt Meereshöhendifferenzen, wenn es einen Kreisbogen gibt, der das Geoid, falls es keine Lotkrümmung gibt, in den Lotfußpunkten \bar{P}_1 und \bar{P}_2 berührt. Es ist aber keineswegs schwer, die Bedingung des überbestimmten Kreisbogens für den tatsächlich vorliegenden Fall gekrümmter Lotlinien zu variieren (Fig. 4). Sehen wir ähnlich wie bei der Helmer'schen Betrachtung von der Windschiefe der Lot-

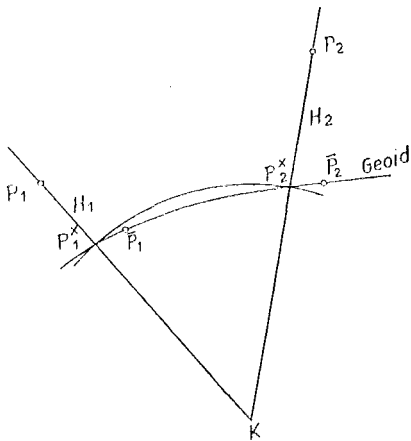


Fig. 4

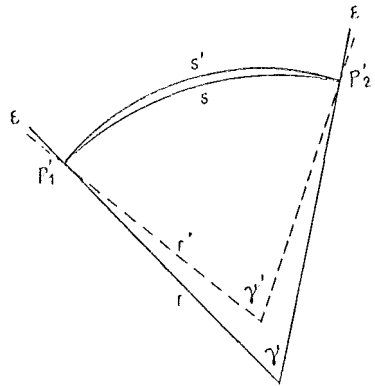


Fig. 5

richtungen ab, so werden die nach unten verlängerten Lotrichtungen der beiden Stationen P_1 und P_2 das Geoid in zwei Punkten P_1^{\times} und P_2^{\times} durchstoßen, die natürlich nicht mit den Lotfußpunkten \bar{P}_1 und \bar{P}_2 zusammenfallen, und sich schließlich im Punkte K schneiden. Dann erhält man aus den gegenseitigen Zenitdistanzen bis auf Glieder höherer Ordnung strenge Differenzen orthometrischer Höhen, wenn nur die Bedingung $KP_1^{\times} = KP_2^{\times}$ erfüllt ist; dieser Kreisbogen wird das Geoid in den Punkten P^{\times} natürlich schneiden und nicht berühren!

Das obige Helmer'sche Kriterium kann auch dahin interpretiert werden, daß das Geoid gegenüber dem Ellipsoid eine zusätzliche konstante Krümmung aufweist. Wegen $z_2 = z_1$ lassen wir in Fig. 5 das Geoid mit dem Referenzellipsoid in den Punkten P_1' und P_2' zusammenfallen. Der mittlere Krümmungsradius r' des Geoides sei kleiner als der mittlere Krümmungs-

radius r des Ellipsoides. Es sei $s = s' = 10 \text{ km}$ und $r = 6380 \text{ km}$, $r' = 6280 \text{ km}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{s}{r} = 5' 23,299'' \\ \gamma' &= \frac{s}{r'} = 5' 28,447''\end{aligned}\tag{14}$$

und die Lotabweichungskomponente wird in den beiden Endpunkten des Bogens entgegengesetzt gleich $2,574''$. Setzt man ferner $k = 0,13$, so ergibt sich, ausgehend von der Annahme des streng ellipsoidischen Höhenwinkels $\beta_{12} = 6^\circ$, $\nu = 140,518''$ und:

$$\begin{aligned}\beta_{12} &= 6^\circ 00' 00,000'' & ; & & \beta_{21} &= -6^\circ 05' 23,299'' \\ \bar{\beta}_{12} &= 6 00 21,132 & & & \bar{\beta}_{21} &= -6 05 02,167 \\ \beta_{12}' &= 6 00 18,558 & & & \beta_{21}' &= -6 05 04,741\end{aligned}\tag{15}$$

Nimmt man noch $H_1 = 500 \text{ m}$ an, so liefern die Formeln (11) aus Hin- und Rückmessung

$$\begin{aligned}\Delta H_{12} &= + 1052,2480 + 6,8900 = + 1059,1380 \text{ m} \\ \Delta H_{21} &= - 1066,0280 + 6,8900 = - 1059,1380 \text{ m},\end{aligned}\tag{16}$$

während aus den Hauptgliedern allein ebenso folgt

$$2 \Delta H = + 1052,2480 + 1066,0280 \text{ m}, \quad \Delta H = + 1059,1380 \text{ m}.$$

Da aber dank der Helmer'schen Voraussetzungen auch der Geoidbogen als Kreisbogen aufgefaßt werden darf, können die Formeln (11) unter Einführung des Radius r' und der tatsächlich beobachtbaren, abermals noch mit Refraktion behafteten Höhenwinkel β' gleicherweise angewendet werden und man findet mit $\nu' = 164,223'' - 21,132'' = + 143,091''$

$$\begin{aligned}H_{12} &= + 1052,1245 + 7,0162 = + 1059,1407 \text{ m} \\ H_{21} &= - 1066,1569 + 7,0162 = - 1059,1407 \text{ m},\end{aligned}\tag{17}$$

in voller Übereinstimmung mit dem Mittel aus den Hauptgliedern. Daß sich der geoidische Höhenunterschied um $2,7 \text{ mm}$ größer als der ellipsoidische Höhenunterschied ergibt, ist einfach darauf zurückzuführen, daß der kleinere Krümmungsradius r' für s_m einen um $2,56 \text{ cm}$ größeren Wert liefert.

In der Praxis muß jedoch die Berechnung der Höhenunterschiede auf Grund der Formeln (11) mit den beobachteten (geoidischen) Höhenwinkeln und mit den ellipsoidischen Krümmungsradien erfolgen und man erhält im vorliegenden Beispiel

$$\begin{aligned}\Delta H_{12} &= + 1052,1218 + 6,8900 = + 1059,0118 \text{ m} \\ \Delta H_{21} &= - 1066,1542 + 6,8900 = - 1059,2642 \text{ m}.\end{aligned}\tag{18}$$

Wie wegen (9) und (12) nicht anders zu erwarten ist, ergeben sich fast die geoidischen Hauptglieder und die streng ellipsoidischen Korrektionsglieder. Die Endwerte aus Hin- und Rückmessung sind jetzt verschieden, doch stimmt ihr arithmetisches Mittel mit dem Mittel der absolut genommenen Hauptglieder $1059,1380$ natürlich abermals voll überein. Jedenfalls erkennt

man, daß man bei der praktischen Höhenberechnung aus gegenseitigen Zenitdistanzen sowohl die Refraktions- wie die Krümmungskorrektur unterdrücken darf, falls man nur die Höhenunterschiede sucht. Dabei verdient der Umstand besondere Beachtung, daß sich in den Hauptgliedern der negative Höhenunterschied absolut genommen stets größer als der positive Höhenunterschied ergibt. Es folgt dies aus der Tatsache, daß der Tiefenwinkel $\beta_2 = -(\beta_1 + \gamma)$ einen größeren Absolutbetrag hat.

Will man jedoch auch die zusätzliche Geoidkrümmung ableiten, so hat man zu bedenken, daß hier in den Korrektionsgliedern die Krümmungs- und Refraktionskorrektur vereinigt sind. Letztere ist stets negativ; denn infolge der Refraktion werden die Höhenwinkel zu groß und die Tiefenwinkel zu klein beobachtet. Um also die Krümmungskorrektur für sich allein zu gewinnen, müssen wir uns die Refraktionskorrektur, in unserem Beispiel

$$-\frac{21,132''}{\rho''} (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) s_m = -1,0362 m$$

mit den Hauptgliedern vereinigt denken. Dann reduziert sich (13) auf die Krümmungskorrektur, d. h. man findet diese aus der Differenz der Absolutbeträge der wegen Refraktion verbesserten Hauptglieder, und zwar aus (16) und (17)

$$D = |\Delta \xi_{21}| - \Delta \xi_{12} = \begin{array}{l} + 1067,0642 - 1051,2118 = + 15,8524 m \text{ (ellipsoid.)} \\ + 1067,1931 - 1051,0883 = + 16,1048 m \text{ (geoidisch)} \end{array}$$

Der Änderung $\Delta r = -100 km$ entspricht also die Änderung $\Delta D = +0,2524 m$. Diese Änderung folgt aber aus den beiden Endwerten (18) unmittelbar:

$$\Delta D = |\Delta H|_- - \Delta H_+ = +1059,2642 - 1059,0118 = +0,2524 m. \quad (19)$$

Damit ergibt sich gemäß

$$\beta = \frac{\beta_{12} - \beta_{21}}{2} \quad ; \quad D = \frac{s^2}{r} (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \quad ; \quad \Delta D = -\frac{s^2}{r^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \Delta r \quad (20)$$

die zusätzliche Krümmung des Geoides $\Delta r = -101,6 km$, d. h. mit einem Fehler von 1,6%. Die Formel (19) gibt auch das richtige Vorzeichen. Wenn, wie hier, die Krümmung des Geoides stärker ist als die Krümmung des Ellipsoides, so ist der negative Endwert (18) dem absoluten Betrage nach größer als der positive Endwert, während sich dieses Verhältnis bei einem größeren Krümmungsradius des Geoides umkehrt. Hingegen steckt in der Differenz (19) der Einfluß einer Verschiedenheit des Refraktionskoeffizienten in den beiden Meßpunkten ($k_1 \neq k_2$) — und eine solche liegt sicherlich schon dank der verschiedenen Höhenlage der beiden Punkte vor! —, so daß im allgemeinen die Berechnung von Δr auf diesem Wege recht unsicher wird. Den ersten neueren, freilich mehr summarischen Versuch, aus der trigonometrischen Höhenmessung die zusätzliche Geoidkrümmung gegen-

über dem Referenzellipsoid abzuleiten, hat R. Finsterwalder³⁾ unternommen.

In unserem Beispiel fielen dank der gemachten Voraussetzungen (Fig. 5) der ellipsoide und der geoidische Höhenunterschied zusammen. Wir haben ja nicht nur die Kreisbogenbedingung für das Geoid als erfüllt angesehen, sondern überdies $z_1 = z_2 = 0$ gesetzt. Letzteres wäre natürlich nicht notwendig gewesen. Ein zwar einengendes, jedoch hinreichendes Kriterium für die Kreisbogenbedingung liegt wiederum in der Helmer'schen Forderung eines linearen Verlaufes der Lotabweichungen bezüglich des Referenzellipsoides vor: hingegen ist es hier nicht mehr wie im obigen ersten Falle nötig, daß auch die Lotabweichungskomponenten in P_1 und P_2 entgegengesetzt gleich sind; man kann ja von den Lotabweichungen einen konstanten Mittelwert abtrennen, der lediglich eine konstante Geoidneigung bedingt, welche bei Verwendung der beobachteten Zenitdistanzen überhaupt nicht in Erscheinung tritt. Nun hat die Prüfung der Proportionalität der Lotabweichungen zu den Entfernungen wie schon erwähnt ein astronomisches Nivellement zur Voraussetzung, wodurch das Kriterium praktisch bedeutungslos wird. Denn eine derartige Proportionalität bloß in diskreten Punkten eines Geoidschnittes genügt keineswegs, wie leicht einzusehen ist.

Liegen (Fig. 6) mehrere Meßpunkte in einer Vertikalebene, so setzt sich die strichlierte Bezugslinie der aus den gegenseitig beobachteten Zenitdistanzen abgeleiteten Höhenunterschiede je zweier benachbarter Punkte korbbogenartig aus Kreisbögen von verschiedenen Radien zusammen. Die Lotrichtungen von P_1 und P_2 bestimmen den Kreismittelpunkt M_{12} , der Durchstoßpunkt P_1^x auf dem Geoid den Radius r_{12} . Ebenso bestimmen die Lotrichtungen von P_2 und P_3 den Kreismittelpunkt M_{23} , während der Radius r_{23} durch den Abstand dieses Punktes von P_2' gegeben ist. Fällt

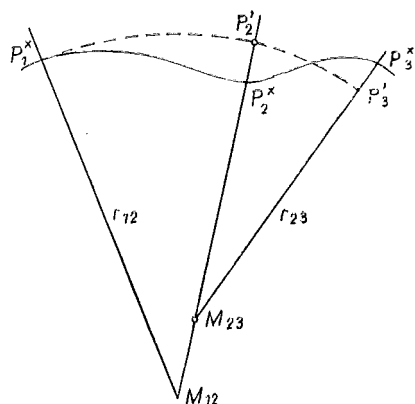


Fig. 6

M_{23} zufällig mit M_{12} zusammen, so verhalten sich die Lotabweichungsdifferenzen proportional zu den Entfernungen. Unabhängig davon wird aber nach dem in der Figur angenommenen, möglichen Geoidverlauf die Höhe von P_2 zu klein und die Höhe von P_3 zu groß erhalten. Bezeichnet man die Abweichung des physischen Lotes von der Richtung der Kreisradien in allen Zwischenpunkten als „relative Lotstörung“, so erhält man nur dann ein-

³⁾ R. Finsterwalder: Die Bestimmung von Lotabweichungen aus der trigonometrischen Höhenmessung, ZfV, Stuttgart 1937.

— und H. Gänger: Die trigonometrische Höhenmessung im Gebirge, Bericht über eine genaue Höhentriangulation in den Chiemgauer Alpen, Nachr. aus dem Reichsvermessungsdienst, 17. Jg., Berlin 1941.

wandfrei Meereshöhen, wenn es keine derartigen Lotstörungen gibt; ansonst treten relative Undulationen des Geoides auf, die durch die trigonometrische Höhenmessung nicht erfaßt werden können und die bei Abstraktion von der Lotkrümmung ihre Extrema dort haben, wo die relativen Lotstörungen verschwinden. Letztere, eigentlich selbstverständliche Verhältnisse hat W. H o f m a n n²⁾ sehr ausführlich dargelegt.

W. H o f m a n n hat auch an einigen Beispielen aus dem astronomischen Nivellement des St. Gotthard⁴⁾ den empirischen Nachweis relativer Undulationen und ihrer möglichen Größe zu erbringen versucht. Allerdings ist seine Beweisführung nicht korrekt; denn will man zeigen, daß trotz der übrigens bereits als belanglos erkannten Proportionalität zwischen Lotabweichungen und Distanzen in diskreten Punkten die Kreisbogenbedingung nicht erfüllt zu sein braucht, so darf man sie auch nicht z. B. in den Punkten P_1 und P_3 der letzten Figur als erfüllt voraussetzen. Zur Illustration sei sein erstes Beispiel ohne diese widersprechende Voraussetzung durchgerechnet.

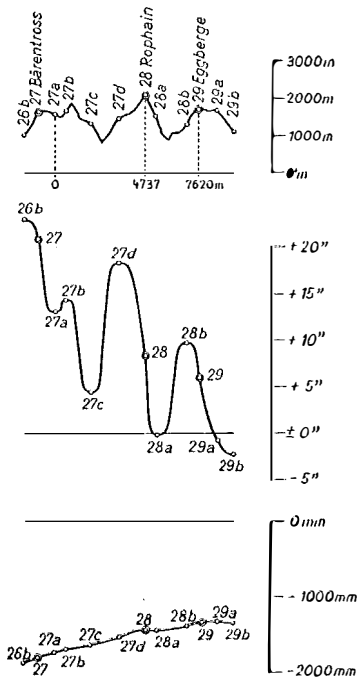


Fig. 7

Fig. 7 gibt einen Ausschnitt aus der Beilage zu der unter (4) zitierten Arbeit; die drei Diagramme stellen der Reihe nach das Geländeprofil, die Lotabweichungen und die Geoidhöhen dar.

Wir greifen die drei Punkte 27 a, 28 und 29 heraus, die sich im Lotabweichungsdiagramm durch eine Gerade verbinden lassen, woraus die Proportionalität der Lotabweichungsdifferenzen zu den Entfernungen hervorgeht. In den Zwischenpunkten zeigen aber die Lotabweichungen einen sehr bewegten Verlauf mit großen Amplituden, der im wesentlichen aus der sichtbaren Massenkonfiguration gedeutet werden kann. Aus diesem Lotabweichungsbild ist es schon von vornherein recht unwahrscheinlich, daß der analog Fig. 6 durch M_{13} und r_{13} bestimmte Kreisbogen den Geoidpunkt P'_3 enthält. Zunächst kann die mittlere meridionale Lotabweichungskomponente der beiden Punkte (siehe die unten stehende Tabelle!):

$\frac{1}{2} (13,1'' + 6,4'') = 9,75''$ durch eine südwärts gerichtete Parallelverschiebung⁵⁾ des Referenzellipsoides beseitigt werden, wodurch sich die Nei-

4) Th. N i e t h a m m e r: Das astronomische Nivellement im Meridian des St. Gotthard, Teil II, Astr.-geod. Arbeiten in der Schweiz, Band 20, Bern 1939.

5) Man sollte endlich die irrije Vorstellung einer relativen Verdrehung von Geoid und Referenzellipsoid fallen lassen! Eine gegenseitige Lage der beiden Flächen, bei der

gung zwischen Geoid und Ellipsoid um $9,75''$ vermindert und die Geoidhöhe z_3 übergeht in

$$z_3' = z_3 - \frac{9,75''}{\rho''} s_{3, cm} = + 37,3 - 36,0 = + 1,3 \text{ cm.} \quad (21)$$

Gleicherweise wird die der neuen Lage entsprechende Lotabweichung und Geoidhöhe auch für P_2' bestimmt. Da die mittlere gegenseitige Neigung der beiden Flächen beseitigt ist, liegt jetzt der Fall der Fig. 5 vor. Der meridionale Krümmungsradius des Besselschen Ellipsoides für die Mittelbreite $46^{\circ}56'15''$ liefert den Radius des zugehörigen Kreisbogens $r = 6\,368\,837 \text{ m}$. Seine Amplitude ist $\gamma = \frac{s}{r} = 246,8''$, während der hypothetische geoidische Kreisbogen die um $6,7''$ größere Amplitude $\gamma' = 253,5''$ hat. Damit ergibt sich für den geoidischen Krümmungsradius r' :

$$253,5 \cdot r' = 246,8 \cdot r \text{ oder } r' = 6\,200\,509 \text{ m,} \quad (22)$$

d. h. die zusätzliche Geoidkrümmung ist durch $\Delta r = -168,3 \text{ km}$ bestimmt. Mit diesen Daten läßt sich die ellipsoidische Geoidhöhe $z_2' = + 7,6 \text{ cm}$ auf den geoidischen Kreisbogen reduzieren; es ist die Pfeilhöhe von 29 mm abzuziehen. Die Ausgangsdaten und die Resultate sind in der folgenden kleinen Tabelle zusammengestellt:

	φ	H	s	ξ''	z_{em}	ξ_r''	z_{em}'	z_{em}''
P_1 (27 a)	$46^{\circ} 58,3'$	1600 m	$0 \text{ m} + 13,1''$	$0,0$	$+ 3,35''$	$0,0$	$0,0$	
P_2 (28)	46	$55,8$	2080 m	$4737 \text{ m} + 8,4$	$+ 30,0$	$- 1,35$	$+ 7,6$	$+ 4,7$
P_3 (29)	46	$54,2$	1690 m	$7620 \text{ m} + 6,4$	$+ 37,3$	$- 3,35$	$+ 1,3$	$+ 1,3$

Zusammenfassend dürfen wir feststellen: Die trigonometrische Höhenmessung liefert bei Einführung der beobachteten Höhenwinkel in die Formeln (11) wie im Beispiel (18) nur dann Meereshöhendifferenzen, wenn für das Geoid die Helmerzsche Kreisbogenbedingung erfüllt ist, auf die in etwas anderem Zusammenhang auch J. de Graaff-Hunter⁶⁾ hingewiesen hat. Diese Bedingung wird aber im allgemeinen nicht erfüllt sein. Besonders bemerkenswert ist noch, daß die Kreisbogenbedingung hinsichtlich des Geoidverlaufes zwischen den benachbarten Meßpunkten nichts vorschreibt. Umgekehrt aber reicht das stark einengende Kriterium der Proportionalität zwischen Lotabweichung und Entfernung trotzdem nicht aus, wenn es nur für diskrete Zwischenpunkte verifiziert werden kann. Mithin bleibt nichts anderes über, als durch starke Verdichtung des Höhennetzes

die Parallelität zwischen der Rotationsachse der Erde und der Figurenachse des Ellipsoides verloren geht, ist geodätisch völlig unbrauchbar. In diesem Sinne ist auch der noch immer zu hörende Ausdruck: „bestorientiertes Ellipsoid“ als irreführend zu verwerfen.

⁶⁾ J. de Graaff-Hunter: Earth Curvature and Refraction, Empire Survey Review, Vol. XI, Nr. 81, London 1951.

die Distanzen zwischen den benachbarten Meßpunkten herabzudrücken; je kleiner diese Distanzen sind, umso wahrscheinlicher wird ein linearer Verlauf der Lotabweichungen entlang der Visuren und umso eher werden die gewünschten Meereshöhendifferenzen approximiert werden können. In diesem Sinne kann das geometrische Nivellement als Grenzfall des trigonometrischen Nivellements mit horizontalen Visuren angesehen werden, wie W. Hofmann sehr richtig bemerkt.

Die Kreisbogenbedingung tritt übrigens auch bei der Näherungsformel des astronomischen Nivellements⁷⁾ von de Graaff-Hunter und Ölander auf. Nur so kann der Übergang von den Bogendifferentialen ds zu den endlichen Seiten eines Dreiecksnetzes vorgenommen werden. Die Schlußfehler der Dreiecke werden dabei mehr durch die Fehler der Kreisbogenbedingung als durch die Fehler der Lotabweichungen bedingt sein. Unter diesem Gesichtspunkt erscheint es auch gerechtfertigt, wie bisher die Gewichte der berechneten Höhenunterschiede verkehrt proportional den Quadraten der Seitenlängen anzusetzen. Der geoidische Kreisbogen definiert physikalisch gesehen die mittlere Krümmung des Geoides. Die Abweichungen des wahren Geoidschnittes vom Kreisbogen durch ein Zusatzglied 3. O. erfassen zu wollen, muß hingegen als reine ad hoc Konstruktion physikalisch wertlos erscheinen.

Mit dem Problem der unmittelbaren Gewinnung von Meereshöhen aus dem trigonometrischen Nivellement hat sich sehr eingehend R. Finsterwald⁸⁾ beschäftigt, dessen Untersuchungen auch hinsichtlich des eingangs erwähnten Problems der trigonometrischen Lotabweichungsbestimmung bahnbrechend gewirkt haben, welches Problem hier unter Hinweis auf die noch im Gange befindlichen schönen Arbeiten der Schweizerischen Geodätischen Kommission⁹⁾ zurückgestellt werden darf. Finsterwald hat besonders die Höhenmessung im Gebirge studiert, weil dort das geometrische Nivellement auf große Schwierigkeiten stößt, während sich die trigonometrische Höhenmessung insofern günstiger als im Flachland erweist, als sich die Refraktionseinflüsse im Gebirge weniger störend bemerkbar machen, namentlich dann, wenn sich die Höhenmessung mehr flächenhaft auf die „Gipfflur“ beschränkt. Denn dann werden die Visuren nur wenig geneigt sein und die Strahlen wegen der größeren Bodenabstände vorwiegend in den weniger gestörten Luftschichten verlaufen. Allerdings kann dann nicht der obigen Forderung nach möglichst kurzen Seitenlängen Rechnung getragen werden. Beachtet man, daß die lokalen Schwankungen in den Geoidwellen in erster Linie durch die sichtbaren Massenunregelmäßigkeiten

⁷⁾ Vgl. z. B. K. Ledersteger: Die Näherungsmethoden des astronomischen Nivellements . . . , Öst. ZfV., 39. Jg., Wien 1951.

⁸⁾ Siehe Fußnote 3) und R. Finsterwald: Über Art und Genauigkeit von trigonometrisch bestimmten Höhen, ZfV., 76. Jg., Stuttgart 1951.

⁹⁾ F. Kobold: Die Bestimmung der Lotabweichungskomponenten im Meridian des St. Gotthard aus Höhenwinkelmessungen, Proces-verbal de la 95^{me} Séance de la Comm. Géod. Suisse, Neuchâtel 1951.

bedingt sind, so kann man sich in ungefährer Höhe der den Berggipfeln entsprechenden Kuppen des Geoides eine allseits gleichmäßig gekrümmte „ausgleichende Geoidfläche“ gelegt denken, die als Bezugsfläche für die aus den unreduzierten Zenitdistanzen abgeleiteten Höhenunterschiede dient. Diese unterscheiden sich von den gesuchten Meereshöhendifferenzen noch um die Differenzen der relativen Undulationen, d. h. um Beträge, die nach der soeben durchgeführten Abschätzung immerhin noch 5—10 cm betragen können. Außerdem werden bei der Annahme einer für das ganze Meßgebiet einheitlichen Bezugsfläche jetzt auch in den Meßpunkten relative Lotstörungen vorliegen, die per definitionem durch den Richtungsunterschied der tatsächlichen Lotrichtungen und der Normalen zur ausgleichenden Geoidfläche gegeben sind. Wohl wird sich der Einfluß dieser Lotstörungen auf die Höhen durch die Anlage eines möglichst symmetrischen flächenhaften Netzes weitgehend herabdrücken lassen und es werden sich nur die mittleren Fehler der Höhen scheinbar zu groß ergeben. Doch wirken sich auch bei der „flächenhaften Höhentriangulation“ die Refraktionsfehler und die nicht erfaßten relativen Undulationen voll aus und man wird die Genauigkeit der Resultate als Meereshöhen kaum über ± 3 cm steigern können. Schließlich müssen zudem die Höhen des geometrischen Nivellements von den Tälern in die Gipfelflur übertragen werden und man wird bei einer derartigen „räumlichen Höhentriangulation“ die gewünschte Genauigkeit sicherlich nur bei Verwendung möglichst kurzer Seiten erreichen können.

Zur Berechnung der Meridiankonvergenz

Von Dr. techn. Josef Litschauer, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

(Schluß)

3. Berechnung der Meridiankonvergenz aus Gauß-Krügerschen Koordinaten

Ähnlich wie vorher setzen wir die Hauptglieder von (2) in die Form

$$y \left[\frac{l}{N} + \frac{1 + l^2 + \eta^2}{N^2} x - \frac{l(1 + l^2 - \eta^2)}{3N^3} y^2 \right] = y \frac{p + x - \bar{x}}{q}$$

und erhalten durch Koeffizientenvergleichung

$$q = \frac{N^2}{1 + l^2 + \eta^2} \quad p = q \frac{l}{N} = \frac{Nl}{1 + l^2 + \eta^2}$$

$$\bar{x} = q \frac{l(1 + l^2 - \eta^2)}{3N^3} y^2 = \frac{l(1 + l^2 - \eta^2)}{3N(1 + l^2 + \eta^2)} y^2 \quad .$$