Paper-ID: VGI_195511

Ein besonderer Zusammenhang von Vorwärts- und Rückwärtseinschnitt im kombinierten Einschneiden

Ludwig Starkl

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **43** (3), S. 86–89

1955

BibTEX:

```
@ARTICLE{Starkl_VGI_195511,
Title = {Ein besonderer Zusammenhang von Vorw{\"a}rts- und R{\"u}ckw{\"a}
   rtseinschnitt im kombinierten Einschneiden},
Author = {Starkl, Ludwig},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {86--89},
Number = {3},
Year = {1955},
Volume = {43}
}
```

Die Lotung von der Eisdecke aus vermeidet diese Nachteile, so daß sie für einen verläßlichen Vergleich mit späteren Lotungen *absolut* geeignet ist.

Der Lotapparat wurde auf einen Schlitten montiert. Die Eislöcher von ungefähr 10 cm Durchmesser wurden von einem vorausarbeitenden Mann mit einem einfachen Handbohrgerät erzeugt, was je Bohrloch ungefähr 5 Minuten Arbeitszeit erforderte.

Die Arbeit der Absteckmeßpartie, die vorarbeiten mußte, und welche die Lotpunkte durch numerierte Holzpflöcke kennzeichnete, war nicht ungefährlich, da es im Zellersee in den seichteren Gebieten mehr als 100 sogenannte „Brunnlöcher" gibt (LV. 11). Diese waren oft nur oberflächlich zugefroren und durch Schneeüberwehung fast unkenntlich gemacht. Zweimal brachen Meßgehilfen völlig ein, konnten sich aber glücklicherweise retten (LV. 10).

Diese Brunnlöcher entstehen nicht durch aufsteigendes wärmeres Wasser, wie der Name vermuten läßt, sondern durch Sumpfgas, welches auf dem Seegrund entsteht, aufsteigt und die Eisbildung verhindert. Übrigens konnte mitunter an solchen Stellen beim Lochschlagen das aufsteigende Gas entzündet werden. Diese Gasbildung ist ein Zeichen stärkerer Verunreinigung des Sees (LV. 10).

Insgesamt wurden an 17 Arbeitstagen 802 Drahtlotungen durchgeführt, die zusammen 26,0 km Tiefe aufwiesen.

(Fortsetzung folgt.)

Ein besonderer Zusammenhang von Vorwärts- und Rückwärtseinschnitt im kombinierten Einschneiden

Von Dipl.-Ing. Ludwig Starkl

Unter dem gleichen Titel ist im Heft Nr. 1, XLI. Jg., Februar 1953, ein Aufsatz von Dipl.-Ing. Dr. Kovarik erschienen, in welchem die Frage nach dem Zusammenhang der einerseits getrennt nach Außenrichtungen, bzw. Innenrichtungen ausgeglichenen Punkte P_V, bzw. P_R und des andererseits kombiniert ausgeglichenen Punktes P_K erörtert wurde. In der Arbeit wurde nachgewiesen, daß je zwei korrespondierende Gleichungen der zu P_V, bzw. P_R führenden Normalgleichungssysteme parallel sein müßten, wenn P_K in der Verbindung P_R und P_V liegen soll.

Es läßt sich zeigen, daß diese Bedingung zwar hinreichend, aber nicht notwendig ist und nur den Sonderfall einer allgemeineren Bedingung darstellt.

Ausgehend von den zu den Punkten P_V, P_R, P_K führenden Normalgleichungssystemen (1), (2), (3)

$$\begin{aligned} &1 \quad [aa]\, dx_V + [ab]\, dy_V + [aw] = 0 \\ &2 \quad [ab]\, dx_V + (bb]\, dy_V + [bw] = 0 \end{aligned} \qquad \ldots (1)$$

$$\begin{aligned} &3 \quad [AA]\, dx_R + [AB]\, dy_R + [AW] = 0 \\ &4 \quad [AB]\, dx_R + [BB]\, dy_R + [BW] = 0 \end{aligned} \qquad \ldots (2)$$

$$\begin{aligned} &5 \quad ([aa] + [AA])\, dx_K + ([ab] + [AB])\, dy_K + ([aw] + [AW]) = 0 \\ &6 \quad ([ab] + [AB])\, dx_K + ([bb] + [BB])\, dy_K + ([bw] + [BW]) = 0, \end{aligned} \quad \ldots \quad (3)$$

in welchen wir die einzelnen Gleichungen fortlaufend mit den Indices 1, ..6 versehen, erhält man aus (1) die Unbekannten

$$dx_V\ (1,\ 2) = x_1 \qquad dy_V\ (1,\ 2) = y_1,$$

aus (2) die Unbekannten

$$dx_R\ (3,\ 4) = x_2 \qquad dy_R\ (3,\ 4) = y_2$$

Kombiniert man je eine Gleichung aus (1) und (2) miteinander, die zusammen algebraisch ein Normalgleichungssystem bilden, also die Gleichungen 1 und 4, bzw. 2 und 3, so ergeben sich die Werte

$$\begin{aligned} dx_{V,R}\ (1,\ 4) &= x_3 \qquad & dy_{V,R}\ (1,\ 4) &= y_3 \\ dx_{V,R}\ (2,\ 3) &= x_4 \qquad & dy_{V,R}\ (2,\ 3) &= y_4 \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{[ab]\,[bw] - [bb]\,[aw]}{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{X}} \qquad & y_1 &= \frac{[ab]\,[aw] - [aa]\,[bw]}{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{X}} \\ x_2 &= \frac{[AB]\,[BW] - [BB]\,[AW]}{[AA]\,[BB] - [AB]\,[AB]} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{Y}} \qquad & y_2 &= \frac{[AB]\,[AW] - [AA]\,[BW]}{[AA]\,[BB] - [AB]\,[AB]} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{Y}} \\ x_3 &= \frac{[ab]\,[BW] - [BB]\,[aw]}{[aa]\,[BB] - [ab]\,[AB]} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{Z}} \qquad & y_3 &= \frac{[AB]\,[aw] - [aa]\,[BW]}{[aa]\,[BB] - [ab]\,[AB]} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{Z}} \\ x_4 &= \frac{[AB]\,[bw] - [bb]\,[AW]}{[AA]\,[bb] - [AB]\,[ab]} = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{W}} \qquad & y_4 &= \frac{[ab]\,[AW] - [AA]\,[bw]}{[AA]\,[bb] - [AB]\,[ab]} = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{W}} \end{aligned} \qquad (4)$$

Die Ermittlung der Unbekannten

$$dx_K\ (5,\ 6) = x_K \qquad dy_K\ (5,\ 6) = y_K$$

aus den Gleichungen (3) liefert

$$x_K = \frac{([ab] + [AB]) \cdot ([bw] + [BW]) - ([bb] + [BB]) \cdot ([aw] + [AW])}{([aa] + [AA]) \cdot ([bb] + [BB]) - ([ab] + [AB]) \cdot ([ab] + [AB])}$$

$$y_K = \frac{([ab] + [AB])\ ([aw] + [AW]) - ([aa] + [AA]) \cdot ([bw] + [BW])}{([aa] + [AA])\ ([bb] + [BB]) - ([ab] + [AB]) \cdot ([ab] + [AB])}$$

Daraus erhält man ausmultipliziert und geordnet

$$x_K = \frac{\begin{array}{l}([ab]\,[bw] - [bb]\,[aw]) + ([AB]\,[BW] - [BB]\,[AW]) + \\ \qquad + ([ab]\,[BW] - [BB]\,[aw]) + ([AB]\,[bw] - [bb]\,[AW])\end{array}}{\begin{array}{l}([aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]) + ([AA]\,[BB] - [AB]\,[AB]) + \\ \qquad + ([aa]\,[BB] - [ab]\,[AB]) + ([AA]\,[bb] - [AB]\,[ab])\end{array}}$$

$$y_K = \frac{([ab]\,[aw] - [aa]\,[bw]) + ([AB]\,[AW] - [AA]\,[BW]) + \\ + ([AB]\,[aw] - [aa]\,[BW]) + ([ab]\,[AW] - [AA]\,[bw])}{([aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]) + ([AA]\,[BB] - [AB]\,[AB]) + \\ + ([aa]\,[BB] - [ab]\,[AB]) + ([AA]\,[bb] - [AB]\,[ab])}$$

Mit den Symbolen aus (4) erhält man die Form

$$x_K = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{C} + \mathfrak{E} + \mathfrak{G}}{\mathfrak{X} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z} + \mathfrak{W}} \qquad \ldots (5)$$

$$y_K = \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{D} + \mathfrak{F} + \mathfrak{H}}{\mathfrak{X} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z} + \mathfrak{W}}$$

Schreibt man nach (4)

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{X} \,.\, x_1 \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{Y} \,.\, x_2 \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{Z} \,.\, x_3 \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{W} \,.\, x_4$$
$$\mathfrak{B} = \mathfrak{X} \,.\, y_1 \qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{Y} \,.\, y_2 \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{Z} \,.\, y_3 \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{W} \,.\, y_4$$

und setzt in den Gleichungen (5) ein, wird

$$x_K = \frac{\mathfrak{X} \,.\, x_1 + \mathfrak{Y} \,.\, x_2 + \mathfrak{Z} \,.\, x_3 + \mathfrak{W} \,.\, x_4}{\mathfrak{X} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z} + \mathfrak{W}} = \frac{[p \,.\, x]}{[p]} \qquad \ldots (6)$$

$$y_K = \frac{\mathfrak{X} \,.\, y_1 + \mathfrak{Y} \,.\, y_2 + \mathfrak{Z} \,.\, y_3 + \mathfrak{W} \,.\, y_4}{\mathfrak{X} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z} + \mathfrak{W}} = \frac{[p \,.\, y]}{[p]}$$

Das heißt: x_k und y_k sind die ponderierten Mittel der Schnitte der vier möglichen, algebraisch aufgefaßten Normalgleichungssysteme aus den Gleichungen (1) und (2). Die Gewichte werden durch die zugehörigen Koeffizientendeterminanten dargestellt.

Beim Näherungsausgleich des kombinierten Einschneidens ist es üblich, den Punkt P_K (x_k, y_k) in der Verbindungsgeraden der getrennt nach Außen- und Innenrichtungen ausgeglichenen Punkte P_V (x_v, y_v) und P_R (x_R, y_R) anzunehmen. Es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen dieses Vorgehen statthaft ist.

Die Bedingungen dafür, daß die drei Punkte P_K, P_V, P_R in einer Geraden liegen, ist ergeben mit

$$\frac{y_K - y_1}{x_K - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \ldots (7)$$

oder in Determinantenform durch

$$\begin{vmatrix} x_K & y_K & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Setzt man x_k und y_k aus (6) in die Bedingung (7) ein, ergibt sich

$$\frac{\mathfrak{Y} \,.\, (y_2 - y_1) + \mathfrak{Z}\,(y_3 - y_1) + \mathfrak{W}\,(y_4 - y_1)}{\mathfrak{Y} \,.\, (x_2 - x_1) + \mathfrak{Z}\,(x_3 - x_1) + \mathfrak{W}\,(x_4 - x_1)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Bezeichnet man die Koordinatendifferenzen der Punkte 2, 3, 4 gegen den Punkt 1 mit Δx_{12}, Δx_{13}, Δx_{14}, bzw. Δy_{12}, Δy_{13}, Δy_{14}, schreibt sich obige Beziehung in der Form

$$\frac{\mathfrak{y} \cdot \Delta y_{12} + \mathfrak{z} \cdot \Delta y_{13} + \mathfrak{w}\, \Delta y_{14}}{\mathfrak{y} \cdot \Delta x_{12} + \mathfrak{z} \cdot \Delta x_{13} + \mathfrak{w}\, \Delta x_{14}} = \frac{\Delta y_{12}}{\Delta x_{12}}$$

Weiter entwickelt erhält man

$$\mathfrak{z} \cdot (\Delta y_{13} \cdot \Delta x_{12} - \Delta x_{13} \cdot \Delta y_{12}) + \mathfrak{w}\, (\Delta y_{14} \cdot \Delta x_{12} - \Delta x_{14} \cdot \Delta y_{12}) = 0 \qquad (8)$$

Die Klammerausdrücke in (8) stellen die doppelten Flächen der Dreiecke $\triangle\ P_1\, P_2\, P_3$, bzw. $\triangle\ P_1\, P_2\, P_4$ dar. Nennt man die Perpendikel der Punkte P_3 und P_4 auf die Verbindungsgerade $P_1 - P_2$

$$p_3 \text{ bzw. } p_4$$

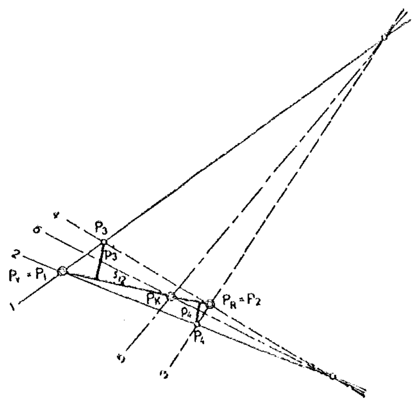
so kann man (8) in der Form

$$\mathfrak{z} \cdot 2\, \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{w} \cdot 2\, \mathfrak{f}_2 = s_{12}\, (\mathfrak{z} \cdot p_3 + \mathfrak{w} \cdot p_4) = 0$$

$$\frac{p_3}{p_4} = - \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{z}} \qquad \ldots (9)$$

schreiben.

Der Punkt P_K liegt demnach dann auf der Verbindungsgeraden der Punkte P_V und P_R, wenn sich die Perpendikel der durch algebraische Kombination von je einer äußeren und inneren Normalgleichung zu je einem Normalgleichungssystem erhaltenen Punkte P_3 und P_4 auf die Verbindungsgerade der Punkte P_V und P_R zueinander umgekehrt verhalten, wie die zugehörigen Koeffizientendeterminanten der Kombinationssysteme. Nimmt man in (9) an, daß



$$p_3 = - p_4 \ ,$$

so wird

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{z}$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\frac{[aa]}{[AA]} = \frac{[bb]}{[BB]} \qquad \ldots (10)$$

Diese Gleichung ist jedenfalls erfüllt, wenn die beiden Verhältnisse

$$\frac{[ab]}{[AB]} = \frac{[aa]}{[AA]} \text{ und } \frac{[ab]}{[AB]} = \frac{[bb]}{[BB]}$$

bestehen, welche den eingangs erwähnten Sonderfall der Parallelität je zweier korrespondierender Normalgleichungen darstellen.