Paper-ID: VGI_195514

Das arithmetrische Mittel als allgemeinstes Ausgleichungsprinzip

Ludwig Starkl

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **43** (4), S. 112–116

1955

BibTEX:

```
@ARTICLE{Starkl_VGI_195514,
Title = {Das arithmetrische Mittel als allgemeinstes Ausgleichungsprinzip},
Author = {Starkl, Ludwig},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {112--116},
Number = {4},
Year = {1955},
Volume = {43}
}
```

sie als Gemeinschaftsarbeit der Technischen Hochschule Wien, Institut für Allgemeine Geodäsie, Vorstand o. Prof. Dr. F. Hauer, des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, Wien, der Bundesanstalt für Wasserbiologie und Abwasserforschung, Wien-Kaisermühlen, und des Bundesstrombauamtes Wien durchgeführt.

Literaturverzeichnis

(1) Bertschmann S.: „Seetiefenmessungen mit einem Echolot-Apparat und ihre Ergebnisse", Veröffentlichung der Deutschen Geodät. Kommission, Reihe B, Heft 10, München 1953.

(2) Bertschmann S.: „Seetiefenmessungen mit einem Echolot, Versuchsmessungen Thunersee, August 1954", Schweizerische Zeitschrift f. Vermessung, 53. Jg., Heft 3, Seite 59—63, Winterthur 1955.

(3) Fugger Eberhard: „Salzburgs Seen", Mitt. d. Ges. f. Salzburger Landeskunde, Salzburg 1890 (Seite 135—153).

(4) Heid: „Tiefenmessungen im Bodensee", Zeitschrift f. Vermessungswesen, Jg. 1889, Seite 289—294.

(5) Keller Karl: „Über Seetiefenmessungen, speziell die Tiefenmessungen an den Schweizer Seen", Zeitschr. f. Vermessungswesen, Jg. 1885, Seite 65—72.

(6) Levasseur Karl: „Stromgrundaufnahmen auf tachygraphometrischem Wege", Zeitschr. „Die Wasserwirtschaft", Jg. 1931, Heft 11, 17/08, 21, Wien 1931.

(7) Lichte: „Überblick über die gegenwärtigen Verfahren der Seevermessung und Vorschläge zur Durchführung der neuen Bodenseemessung", Veröffentl. des Geod. Inst. d. Techn. Hochschule Karlsruhe (Abgeschlossen November 1954). Dortselbst weitere Literaturangaben.

(8) Merkel H.: „Tiefenmessungen im Bodensee", Zeitschr. f. Vermessungswesen, 80. Jg. 1955, Heft 3, Seite 77—81.

(9) Müllner Johann: „Die Seen des Salzkammergutes und die österreichische Traun." (Erläuterungen zur ersten Lieferung des österreichischen Seeatlasses.) Geographische Abhandlungen, Band VI, Heft 1, Wien 1896.

(10) Salzburger Nachrichten: „Der Zeller-See brannte", Salzburg 16. März 1955.

(11) Schjerning Wilhelm: „Der Zeller-See im Pinzgau", Zeitschr. der Ges. f. Erdkunde zu Berlin, Band XXVIII, Jg. 1893, Seite 367—392.

(12) Hauer Friedrich: „Buchbesprechung von LV. 1". Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, 43. Jg., 1955, Heft 2, Seite 57.

Das arithmetische Mittel als allgemeinstes Ausgleichungsprinzip

Von Dipl.-Ing. Ludwig Starkl

Alle Ausgleichungsaufgaben lassen sich bekanntlich auf eine einzige Grundaufgabe zurückführen. Diese ist gegeben, wenn folgende r-Gleichungen mit n-Unbekannten vorliegen:

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, x_k + c_{i,\, n+1} = 0 \qquad (1)$$

$$(i = 1, \ldots r)$$

Die Anzahl r der Gleichungen (1) ist immer größer als die Anzahl n der darin vorkommenden Unbekannten x_k, somit $r > n$.

Wegen der $(r\text{-}n)$ überschüssigen Gleichungen in (1) kann im allgemeinen kein Wertesystem x_k $(k = 1, \ldots n)$ gefunden werden, welches alle Gleichungen (1) befriedigt. Man gelangt so zu den r-Fehlergleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, x_k + c_{i,\,n+1} = v_i \qquad (2)$$
$$(i = 1, \ldots r)$$

Aus ihnen wird nach dem Gauß'schen Minimumsprinzip $[vv] =$ Minimum das Normalgleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\, x_k + a_{l,\,n+1} = 0 \qquad (3)$$
$$(l = 1, \ldots n)$$

erhalten, dessen Lösung die ausgeglichenen Werte der n-Unbekannten x_k ergibt.

Es läßt sich zeigen, daß diese ausgeglichenen Werte x_k durch ein allgemeines ponderiertes *arithmetisches Mittel* dargestellt werden, welches als Sonderfall auch das einfache arithmetische Mittel enthält.

Aus den r-Gleichungen (1) lassen sich durch Kombinationen ohne Wiederholung zur n-ten Klasse ingesamt $\binom{r}{n}$ verschiedene Lösungssysteme der Unbekannten x_k $(k = 1, \ldots n)$ ermitteln. Eine beliebige, aus n beliebigen Gleichungen (1) nach der Cramer'schen Regel ermittelte Unbekannte wird erhalten mit

$$-\, x_j'\,(p) = \frac{|\, c_{pq} \,|}{|\, c_{pk} \,|} \qquad (4)$$

In einer Zählerdeterminante $|c_{pq}|$ durchlaufen dabei die Zeilenindices p eine der Gleichungsauswahl entsprechende Kombination ohne Wiederholung aus den Zahlen $1, \ldots r$ zur n-ten Klasse. Die Spaltenindices q durchlaufen die Zahlen $1, \ldots n$ in arithmetischer Reihenfolge, wobei jedoch der Index $q = j$ durch den Index $n + 1$ zu ersetzen ist. Die Nennerdeterminante $|c_{pk}|$ stellt die der Gleichungsauswahl entsprechende Koeffizientendeterminante dar.

Den nach (4) ermittelten $\binom{r}{n}$ Werten $x_j'\,(p)$ ist ein einziger ausgeglichener Wert x_j zugeordnet, der nach der Cramer'schen Regel aus (3) erhalten wird. Es ist

$$-\, x_j = \frac{|\, a_{lq} \,|}{|\, a_{lk} \,|} \qquad (5)$$

Die Spaltenindices q der Zählerdeterminante $|a_{lq}|$ sind hiebei dem gleichen Bildungsgesetz wie bei (4) unterworfen. Die Nennerdeterminante $|a_{lk}|$ stellt die üblicherweise mit D bezeichnete Koeffizientendeterminante des Normalgleichungssystemes dar.

Es soll nun der ausgeglichene Wert x_j einer Unbekannten in Funktion der $\binom{r}{n}$ Werte x_j' (p) dargestellt werden. Dazu wollen wir vorerst die Determinanten in (5) umformen. Die Koeffizientendeterminante $|a_{lk}|$ eines Normalgleichungssystemes kann bekanntlich als eine Summe von Determinantenquadraten geschrieben werden. Das läßt sich auch für den allgemeinsten Fall auf einfache und elegante Art nachweisen. („Sur un théorème de la méthode des moindres carrés", par Prof. A. Ansermet, Schweizerische Zeitschrift für Vermessung und Kulturtechnik, Nr. 8, 1950). Das Normalgleichungssystem (3) steht mit dem System der Fehlergleichungen in Beziehung gemäß

$$\sum_{i=1}^{r} c_{ik}\, v_i = 0 \qquad (k = 1, \ldots n) \tag{6}$$

Versteht man unter (c_{ik}) die Koeffizientenmatrix des Fehlergleichungssystemes (2), so ist die üblicherweise mit $(c_{ik})'$ bezeichnete Koeffizientenmatrix des Gleichungssystemes (6) die zu (c_{ik}) transponierte Matrix. Das heißt, in $(c_{ik})'$ sind gegenüber (c_{ik}) die Zeilen und Spalten vertauscht.

Die Gleichungssysteme (2) und (6) ergeben zusammengefaßt ein System von $(r + n)$ Gleichungen mit ebenfalls $(r + n)$ Unbekannten v und x.

Aus diesem Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, x_k - v_i + c_{i,\,n+1} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{r} c_{ik}\, v_i \qquad\qquad &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

könnten die Unbekannten v und x direkt im Zusammenhang ermittelt werden.

Die Koeffizientendeterminante des Normalgleichungssystemes (3) erhält nun mit (7) eine symmetrische Form. Es ist

$$|a_{lk}| = \begin{vmatrix} (c_{ik}) & -(E) \\ (0) & (c_{ik})' \end{vmatrix} \tag{8}$$

worin (E) eine Einheitsmatrix der Ordnung r und (0) eine Nullmatrix der Ordnung n darstellen.

Mit Ausschreibung der Matrizensymbole hat die Determinante (8) z. B. für $n = 2$, $r = 3$ die Gestalt

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & -1 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & -1 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ 0 & 0 & c_{12} & c_{22} & c_{32} \end{vmatrix} \tag{8a}$$

Auf (8) wollen wir nun den Laplace'schen Entwicklungssatz anwenden. (Siehe z. B. „Determinanten und Matrizen" von Dr. Fritz Neiß, Springer-Verlag, 1948, S. 33.) Wir betrachten $|a_{lk}|$ als Funktion der Elemente der ersten n-Spalten, das heißt, wir entwickeln die Determinante (8) nach den Determinanten $|c_{pk}|$ der Ordnung n, welche den Nennerdeterminanten in (4) entsprechen. Nach Laplace ist dann

$$|a_{lk}| = \sum |c_{pk}| \cdot |\overline{c_{pk}}| \tag{9}$$

Die $\binom{r}{n}$ Determinanten $|\overline{c_{pk}}|$ der Ordnung r sind die zu $|c_{pk}|$ komplementären Unterdeterminanten oder Minoren, die aus der Darstellung (8) erhalten werden, wenn man die Zeilen mit den Indices p und die ersten n-Spalten streicht. Die Minoren $|\overline{c_{pk}}|$ können immer in die Form

$$|\overline{c_{pk}}| = \begin{vmatrix} (M) \\ (c_{ik})' \end{vmatrix} \tag{10}$$

gebracht werden, wobei die Matrix (M) die Elemente -1 in den Spalten $i \neq p$ enthält. Bei Entwicklung der Determinanten (1●) nach den Elementen von (M) erhält man daher eine Determinante von der Ordnung n, welche aus den Spalten $i = p$ der transponierten Matrix $(c_{ik})'$ gebildet ist. Demnach ist

$$|\overline{c_{pk}}| = |c_{pk}| \tag{11}$$

und mit (9)

$$|a_{lk}| = \sum |c_{pk}|^2 \tag{12}$$

In gleicher Weise betrachten wir nun die Zählerdeterminante $|a_{lq}|$ in (5). Man erkennt leicht, daß diese auf Grund von (7) in einer zu Formel (8) analogen Schreibweise angesetzt werden kann. Man erhält

$$|a_{lq}| = \begin{vmatrix} (c_{iq}) & -(E) \\ (0) & (c_{ik})' \end{vmatrix} \tag{13}$$

Die gleiche Laplace'sche Entwicklung dieser Determinante wie unter (9) liefert jetzt

$$|a_{lq}| = \sum |c_{pq}| \cdot |\overline{c_{pq}}| \tag{14}$$

Da die Determinanten in (●) und (13) in (●), (E), $(c_k)'$ übereinstimmen, ist der Minor $|\overline{c_{pq}}|$ ebenfalls identisch mit dem Minor $|\overline{c_{pk}}|$.

Mit (11) ist daher
$$|\overline{c_{pq}}| = |c_{pk}| \tag{15}$$

Damit erhält man für $|a_{lq}|$ endgültig

$$|a_{lq}| = \sum |c_{pq}| \cdot |c_{pk}| \tag{16}$$

Setzt man die Werte (12) und (16) in die Formel (5) ein, ergibt sich

$$-x_j = \frac{\sum |c_{pq}| \cdot |c_{pk}|}{\sum |c_{pk}|^2} \tag{17}$$

Nun ist nach (4)

$$— x_j' (p) \cdot |c_{pk}|_2 = |c_{\mu q}| \cdot |c_{pk}| \tag{18}$$

Damit kann jetzt der ausgeglichene Wert x_j einer Unbekannten dargestellt werden mit

$$x_j = \frac{\sum |c_{pk}|^2 \cdot x_j' (p)}{\sum |c_{pk}|^2} = \frac{[m \cdot x]}{[m]} \tag{19}$$

Aus dieser Entwicklung geht hervor, daß sich das allgemeine Ausgleichungsprinzip $[vv]$ = Minimum immer in Übereinstimmung mit einem mit den Massen m belegten arithmetischen Mittel (19) befindet. Die Massen m sind durch die zu den einzelnen $\binom{r}{n}$ Werten $x_j' (p)$ gehörenden quadrierten Koeffizientendeterminanten gegeben.

Dieser Satz, der hier in einer, soweit mir bekannt geworden ist, neuen Art abgeleitet wurde, ist bekannt als der „Satz von Jacobi". (C. G. J. Jacobi: „De formatione et proprietatibus determinantum", Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 22/1841, S. 285 u. ff.). A. Tàrczy-Hornoch hat im Heft 1/2, XXXVIII. Jahrg., Juli 1950 dieser Zeitschrift in einer Arbeit „Über die Zurückführung der Methode der kleinsten Quadrate auf das Prinzip des arithmetischen Mittels" eine kritische Darstellung der einschlägigen Veröffentlichungen mit einer ausführlichen Literaturangabe gegeben, auf welche hier verwiesen werden soll. Er stellt zusammenfassend fest, daß die Zurückführung der Methode der kleinsten Quadrate auf das arithmetische Mittel bis jetzt am einwandfreiesten nur durch die sogenannte erweiterte Helmert'sche Methode erfolgen kann, während der Satz von Jacobi nicht als Beweis für die Zurückführung der Methode der kleinsten Quadrate auf das arithmetische Mittel angesehen werden könnte.

Allgemein betrachtet ist die Definierung eines arithmetischen Mittels als Ausgleichungsprinzip nicht unbedingt auf den Fall der direkten, voneinander unabhängigen Beobachtungen zuzuschneiden. Die Helmert'sche Methode besteht ja bekanntlich darin, den allgemeinen Fall durch eine lineare Substitution auf den Spezialfall des nur für direkte Beobachtungen definierten allgemeinen arithmetischen Mittels entsprechend der Jordanschen Fassung (Jordan-Eggert: „Handbuch der Vermessungskunde", I. Bd., V. Aufl., 1904, S. 43) zurückzuführen, was jedoch keinerlei praktische Folgerungen ergibt. Anders gesehen, ist die Ausgleichsrechnung ein kombinatorischer Prozeß, in welchen auch die arithmetische Mittelbildung einbezogen ist. Es ergibt sich die Frage, ob die Bestrebungen, die Methode der kleinsten Quadrate auf den Spezialfall des arithmetischen Mittels bei voneinander unabhängigen, direkten Beobachtungen zurückzuführen, logisch zu rechtfertigen sind, denn die Gleichungen (19) enthalten diesen Spezialfall für $n = 1$.