Paper-ID: VGI_195602

Eine allgemeine analytische Lösung des Folgebildanschlusses

Karl Rinner [1]

[1] *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **44** (1), S. 4–9

1956

BibTEX:

```
@ARTICLE{Rinner_VGI_195602,
Title = {Eine allgemeine analytische L{\"o}sung des Folgebildanschlusses},
Author = {Rinner, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {4--9},
Number = {1},
Year = {1956},
Volume = {44}
}
```

Eine allgemeine analytische Lösung des Folgebildanschlusses

Von K. Rinner, Graz

Nr. 1 (Vorbemerkung). Alle bisher praktisch verwendeten analytischen Lösungsverfahren der gegenseitigen Orientierung von Luftaufnahmen gehen von Linearformen der allgemeinen, transzendenten Orientierungsgleichungen aus und haben Näherungswerte für die Orientierungselemente zur Voraussetzung. In den meisten Fällen werden derartige Näherungen auch vorliegen, doch sind auch Fälle denkbar, in welchen dies nicht der Fall ist, oder die Näherungen weit von der Lösung entfernt sind und daher eine allgemeine Lösung der Orientierungsgleichung von Vorteil ist. Auch muß beachtet werden, daß durch die Entwicklung der elektronischen Rechenmaschinen der Rechenpraxis neue Möglichkeiten erschlossen wurden und nunmehr alle analytischen Verfahren in der Photogrammetrie praktische Bedeutung erlangt haben. Denn diese gehen von Bildkoordinaten aus, welche den in den optisch-mechanischen Verfahren benutzten Maschinenkoordinaten hinsichtlich der Güte offensichtlich überlegen sind und lassen daher genauere Ergebnisse erwarten. Allgemeine, voraussetzungslose analytische Lösungen der Orientierungsaufgabe haben daher derzeit nicht nur theoretisches Interesse, sie sind auch von unmittelbarem Wert für die Praxis.

Im Folgenden wird eine allgemeine analytische Lösung des Folgebildanschlusses angegeben, für welche lediglich die Kenntnis der inneren Orientierung und der Bildkoordinaten einer Anzahl homologer Punkte notwendig ist. Dabei wird von den in [1] und [2] enthaltenen Grundgedanken ausgegangen und aus diesen mit Hilfe der Vektorrechnung ein praktisch brauchbares System abgeleitet.

Nr. 2 (Bestimmung von Hilfsunbekannten *ik*). Mit jeder Luftaufnahme kann ein orthogonales Dreibein verknüpft gedacht werden, welches durch den Aufnahmeort 0 (Projektionszentrum) und die innere Orientierung der Kammer (Bildkoordinatenachsen und Richtung der Bildweite) bestimmt ist. Die Achsen ($\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$) dieses Dreibeines lassen sich mit Hilfe der Orientierungswinkel ($\varkappa\varphi\omega$) aus dem Rechen-(Landes-)System ($\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{e}_3$) ableiten [3].

$$\mathfrak{i} = \begin{cases} \mathfrak{e}_1\ (-\sin\varkappa\sin\omega\sin\varphi + \cos\varkappa\cos\varphi) \\ \mathfrak{e}_2\ \sin\varkappa\cos\omega \\ \mathfrak{e}_3\ (\sin\varkappa\sin\omega\cos\varphi - \cos\varkappa\sin\varphi) \end{cases}$$

$$\mathfrak{j} = \begin{cases} \mathfrak{e}_1\ (\cos\varkappa\sin\omega\sin - \sin\varkappa\cos\varphi) \\ \mathfrak{e}_2\ \cos\varkappa\cos\omega \\ \mathfrak{e}_3\ (\cos\varkappa\sin\omega\cos + \sin\varkappa\sin\varphi) \end{cases} \qquad \ldots (1)$$

$$\mathfrak{k} = \begin{cases} \mathfrak{e}_1\ (-\cos\omega\sin\varphi) \\ \mathfrak{e}_2\ \sin\omega \\ \mathfrak{e}_3\ (-\cos\omega\cos\varphi) \end{cases}$$

und es bestehen außerdem die für orthogonale Einheitsvektoren gültigen Beziehungen:

$$\begin{gathered} \mathfrak{i}^2 = \mathfrak{j}^2 = \mathfrak{k}^2 = 1 \\ \mathfrak{i} \,.\, \mathfrak{j} = \mathfrak{j} \,.\, \mathfrak{k} = \mathfrak{k} \,.\, \mathfrak{i} = 0 \\ \mathfrak{i} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{k},\ \mathfrak{j} \times \mathfrak{k} = \mathfrak{i},\ \mathfrak{k} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \end{gathered} \quad . \ . \ . \ (2)$$

Das die Aufnahme vermittelnde Strahlenbündel ist durch die Gleichung

$$\mathfrak{p} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + f\mathfrak{k} \quad . \ . \ . \ (3)$$

bestimmt, worin die Bildkoordinaten $(x\ y)$ Parameter für die Strahlen des Bündels sind.

Beim Folgebildanschluß ist ein bewegliches Strahlenbündel $0''$ $(\varkappa''\ \varphi''\ \omega'')$ derart an ein homologes, in fester Lage befindliches Bündel $0'$ $(\varkappa'\ \varphi'\ \omega')$ anzuschließen, daß sich je 2 homologe Strahlen schneiden. Bezeichnen $\mathfrak{b}$ den Einheitsvektor der Basis $\overline{0'\,0''}$ und $\mathfrak{p}'\ \mathfrak{p}''$ die Vektoren entsprechender Bündelstrahlen, so ist das Verschwinden der Determinante

$$(\mathfrak{p}'\ \mathfrak{p}''\ \mathfrak{b}) = (x'\mathfrak{i}' + y'\mathfrak{j}' + f\mathfrak{k}',\ x''\mathfrak{i}'' + y''\mathfrak{j}'' + f\mathfrak{k}'',\ \mathfrak{b}) = 0 \quad . \ . \ . \ (4)$$

der mathematische Ausdruck für die Schnittbedingung. Darin bezeichnen $(x'\ y',\ x''\ y'')$ die (meßbaren) Bildkoordinaten homologer Bildpunkte, $(\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}')$ das bekannte Dreibein des festen Bündels $(\mathfrak{i}'', \mathfrak{j}'', \mathfrak{k}'')$ die zu bestimmenden Vektoren des Dreibeines der beweglichen, anzuschließenden Aufnahme und $\mathfrak{b}$ den unbekannten Einheitsvektor der Basis.
Durch Ausmultiplizieren folgt aus (4) eine Gleichung, in welcher die (bekannten) Produkte von Bildkoordinaten und Bildweite f als Koeffizienten und Determinantenprodukte der unbekannten Vektoren $\mathfrak{i}''\ \mathfrak{j}''\ \mathfrak{k}''$ und $\mathfrak{b}$ mit den bekannten Vektoren $\mathfrak{i}'\ \mathfrak{j}'\ \mathfrak{k}'$ als Unbekannte auftreten.

$$\begin{aligned} & x'x''\ (\mathfrak{i}'\ \mathfrak{j}''\ \mathfrak{b}) + x'y''\ (\mathfrak{i}'\ \mathfrak{j}''\ \mathfrak{b}) + x'f\ (\mathfrak{i}'\ \mathfrak{k}''\ \mathfrak{b}) + \\ + & y'x''\ (\mathfrak{j}'\ \mathfrak{i}''\ \mathfrak{b}) + y'y''\ (\mathfrak{j}',\mathfrak{j}''\mathfrak{b}) + y'f\ (\mathfrak{j}'\ \mathfrak{k}''\ \mathfrak{b}) + \\ + & fx''\ (\mathfrak{k}'\ \mathfrak{i}''\ \mathfrak{b}) + fy''\ (\mathfrak{k}'\ \mathfrak{j}''\ \mathfrak{b}) + ff\ (\mathfrak{k}'\ \mathfrak{k}''\ \mathfrak{b}) = 0 \end{aligned} \quad . \ . \ . \ (5)$$

Werden diese Produkte als Hilfsunbekannte ik angesehen, so stellt (5) eine lineare, homogene Gleichung für die neun ik $(i = k = 1, 2, 3)$ dar.

$$\begin{array}{lll} (\mathfrak{i}'\ \mathfrak{i}''\ \mathfrak{b}) = 11 & (\mathfrak{i}'\ \mathfrak{j}''\ \mathfrak{b}) = 12 & (\mathfrak{i}'\ \mathfrak{k}''\ \mathfrak{b}) = 13 \\ (\mathfrak{j}'\ \mathfrak{i}''\ \mathfrak{b}) = 21 & (\mathfrak{j}'\ \mathfrak{j}''\ \mathfrak{b}) = 22 & (\mathfrak{j}'\ \mathfrak{k}''\ \mathfrak{b}) = 23 \\ (\mathfrak{k}'\ \mathfrak{i}''\ \mathfrak{b}) = 31 & (\mathfrak{k}'\ \mathfrak{j}''\ \mathfrak{b}) = 32 & (\mathfrak{k}'\ \mathfrak{k}''\ \mathfrak{b}) = 33 \end{array} \quad . \ . \ . \ (6)$$

Da jedes homologe Punktepaar Anlaß zu einer Gleichung (5) gibt, bestimmen $n = 9$ Punktepaare ein homogenes lineares Gleichungssystem für die neun ik, aus welchen diese bis auf einen Faktor μ (im allgemeinen) bestimmt werden können. Die ik müssen außerdem vier Verträglichkeitsbedingungen erfüllen, da sie Funktionen von nur fünf Hauptunbekannten $(\varkappa''\ \varphi''\ \omega'',\ \mathfrak{b})$ sind. Ganz allgemein geben $n \geqq 9$ homologe Punktepaare Anlaß zu einem überbestimmten System von $(n + 4)$ Gleichungen (5) und Verträglichkeitsbedingungen für die 10 Unbekannten ik und μ, aus welchem diese Werte ermittelt werden können. Die Auflösung von (5) alleine gibt Näherungswerte für (μ, ik), aus den Verträglichkeitsbedingungen werden μ und Verbesserungen für ik ermittelt.

Die Auflösung des homogenen Systemes kann durch Betrachten von Hilfsunbekannten $ik' = ik : lm$ ($lm \neq 0$) vermieden werden. Aus (5) folgt in diesem Falle ein lineares inhomogenes System für acht ik', aus welchem sich Zahlenwerte für diese bestimmen lassen. Eine der 4 Verträglichkeitsbedingungen dient zur Ermittlung von lm, die restlichen können für die Ausgleichung Verwendung finden. Für n homologe Punktepaare bestehen dann ($n + 4$) Gleichungen für die 9 Unbekannten ik und lm.

Nr. 3. Liegen Zahlenwerte für die ik vor, so lassen sich $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{i}''\ \mathfrak{j}''\ \mathfrak{k}''$ ermitteln.

a) *Bestimmung von* $\mathfrak{b}$.

Mit den Hilfsgrößen

$$\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{i}'' \times \mathfrak{b},\quad \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{j}'' \times \mathfrak{b},\quad \mathfrak{n}_3 = \mathfrak{k}'' \times \mathfrak{b} \qquad \ldots (7)$$

geht (6) über in das System,

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{i}' \,.\, \mathfrak{n}_1 = 11 & \mathfrak{i}' \,.\, \mathfrak{n}_2 = 12 & \mathfrak{i}' \,.\, \mathfrak{n}_3 = 13 \\ \mathfrak{j}' \,.\, \mathfrak{n}_1 = 21 & \mathfrak{j}' \,.\, \mathfrak{n}_2 = 22 & \mathfrak{j}' \,.\, \mathfrak{n}_3 = 23 \\ \mathfrak{k}' \,.\, \mathfrak{n}_1 = 31 & \mathfrak{k}' \,.\, \mathfrak{n}_3 = 32 & \mathfrak{k}' \,.\, \mathfrak{n}_3 = 33 \end{array}$$

welches besagt, daß die ik Koordinaten von $\mathfrak{n}_k$ im (bekannten) orthogonalen System $\mathfrak{i}'\ \mathfrak{j}'\ \mathfrak{k}'$ sind und daher die Vektoren $\mathfrak{n}_k$ in expliziter Form durch diese Größen angegeben werden können.

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_1 &= 11\, \mathfrak{i}' + 21\, \mathfrak{j}' + 31\, \mathfrak{k}' \\ \mathfrak{n}_2 &= 12\, \mathfrak{i}' + 22\, \mathfrak{j}' + 32\, \mathfrak{k}' \\ \mathfrak{n}_3 &= 13\, \mathfrak{i}' + 23\, \mathfrak{j}' + 33\, \mathfrak{k}' \end{aligned} \qquad \ldots (8)$$

Der Basisvektor $\mathfrak{b}$ ist nach (7) normal zu jedem der Vektoren $\mathfrak{n}$ und daher parallel zu den äußeren Produkten dieser Vektoren. Dies zeigt auch die Rechnung, denn es ist

$$\mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2 = (\mathfrak{i}'' \times \mathfrak{b}) \,.\, (\mathfrak{j}'' \times \mathfrak{b}) = -\,\mathfrak{b}\,(\mathfrak{i}''\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{j}'') = \mathfrak{b}\,(\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{k}'') = \mathfrak{b} \cos (\mathfrak{b}\,\mathfrak{k}'') \qquad (9a)$$

und ganz entsprechend gilt auch:

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_2 \times \mathfrak{n}_3 &= \mathfrak{b} \cos (\mathfrak{b}\,\mathfrak{j}'') \\ \mathfrak{n}_3 \times \mathfrak{n}_1 &= \mathfrak{b} \cos (\mathfrak{b}\,\mathfrak{j}'') \end{aligned} \qquad \ldots (9b)$$

Bezeichnen $\overline{ik} = (i + 1, k + 1)\,(i + 2, k + 2) - (i + 2, k + 1)\,(i + 1, k + 2)$ die Elemente der zu $|ik|$ adjungierten Determinante $|\overline{ik}|$ (welche bei Kenntnis der ik ebenfalls zahlenmäßig vorliegen), so bestehen für den Basisvektor 3 Gleichungen, aus welchen dieser in dreifacher Weise ermittelt werden kann.

$$\begin{aligned} \lambda_1\, \mathfrak{b} &= \overline{11}\, \mathfrak{i}' + \overline{21}\, \mathfrak{j}' + \overline{31}\, \mathfrak{k}' \\ \lambda_2\, \mathfrak{b} &= \overline{12}\, \mathfrak{i}' + \overline{22}\, \mathfrak{j}' + \overline{32}\, \mathfrak{k}' \\ \lambda_3\, \mathfrak{b} &= \overline{13}\, \mathfrak{i}' + \overline{23}\, \mathfrak{j}' + \overline{33}\, \mathfrak{k}' \end{aligned} \qquad \ldots (10a)$$

$$\lambda_1 = \cos(\mathfrak{b}\,\mathfrak{j}'') = \sqrt{\overline{11}^2 + \overline{21}^2 + \overline{31}^2}$$
$$\lambda_2 = \cos(\mathfrak{b}\,\mathfrak{j}'') = \sqrt{\overline{12}' + \overline{22}^2 + \overline{32}^2} \qquad \ldots \quad (10\text{b})$$
$$\lambda_3 = \cos(\mathfrak{b}\,\mathfrak{k}'') = \sqrt{\overline{13}^2 + \overline{23}^2 + \overline{33}^2}$$

b) Bestimmung von $\mathfrak{i}'', \mathfrak{j}'', \mathfrak{k}''$.

Nach dem Entwicklungssatz besteht die Identität

$$\mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{b} \equiv (\mathfrak{i}'' \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{b} = (\mathfrak{i}'' \,.\, \mathfrak{b})\,\mathfrak{b} - \mathfrak{b}^2\,\mathfrak{i}''$$

und aus dieser folgt wegen $\mathfrak{b}^2 = 1$ und $(\mathfrak{i}'' \,.\, \mathfrak{b}) = \cos(\mathfrak{b}\,\mathfrak{i}'')$ für den Vektor $\mathfrak{i}''$ des gesuchten Dreibeines.

$$\mathfrak{i}'' = \mathfrak{b} \times \mathfrak{n}_1 + \cos(\mathfrak{b}\,\mathfrak{i}'')\,\mathfrak{b} \qquad \ldots \quad (11\text{a})$$

Da $\mathfrak{n}_1$ nach (8) durch die ik und $\mathfrak{b}$ sowie $\cos(\mathfrak{b}\,\mathfrak{i}'')$ nach (10) durch die $\overline{ik}$ bestimmt sind, ist $\mathfrak{i}''$ damit gegeben. Aus der Identität $(\mathfrak{i}'' \,.\, \mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{i}'' \times \mathfrak{b})^2 = 1$ ergibt sich wegen (8) auch noch ein weiterer Ausdruck für $\cos(\mathfrak{b}\,\mathfrak{i}'')$, durch welchen diese Funktion durch die ik ausgedrückt wird.

$$\cos(\mathfrak{b}\,\mathfrak{i}'') = 1 - \mathfrak{n}_1^2 = 1 - 11^2 - 21^2 - 31^2 \qquad \ldots \quad (11\text{b})$$

In entsprechender Weise lassen sich auch die restlichen Vektoren $\mathfrak{j}''$, $\mathfrak{k}''$ des gesuchten Dreibeines ermitteln.

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{j}'' &= \mathfrak{b} \times \mathfrak{n}_2 + \cos(\mathfrak{b}\,\mathfrak{j}'')\,\mathfrak{b} \\ \mathfrak{k}'' &= \mathfrak{b} \times \mathfrak{n}_3 + \cos(\mathfrak{b}\,\mathfrak{k}'')\,\mathfrak{b} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \quad (12\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned} \cos^2(\mathfrak{b}\,\mathfrak{j}'') &= 1 - 12^2 - 22^2 - 23^2 \\ \cos^2(\mathfrak{b}\,\mathfrak{k}'') &= 1 - 13^2 - 23^2 - 33^2 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \quad (12\text{b})$$

Zwischen den orthogonalen Einheitsvektoren $\mathfrak{i}'', \mathfrak{j}'', \mathfrak{k}''$ müssen außerdem die Gleichungen (2) bestehen, welche als Rechenkontrollen Verwendung finden können und die Bestimmung der Vorzeichen der Richtungscosinusse von $\mathfrak{b}$ erlauben.

Nr. 4 (Die Verträglichkeitsbedingungen). In den vorangegangenen Ableitungen sind eine Reihe von Bedingungen enthalten, aus welchen die Verträglichkeitsbedingungen für die ik abgeleitet werden können.

Nach (7) sind die Vektoren $\mathfrak{n}_k$ komplanar und es muß die hieraus gebildete Determinante gleich Null sein. Aus $(\mathfrak{n}_1\,\mathfrak{n}_2\,\mathfrak{n}_3) = 0$ folgt aber wegen (8) eine Bedingung für die ik.

$$|ik| \equiv \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots \quad (13)$$

Nach (8) ist die Quadratsumme der Vektoren $\mathfrak{n}_k$ gleich der Quadratsumme der ik.

$$[\mathfrak{n}^2] = [ik^2]$$

Diese Summe ist aber wegen (7) und $(\mathfrak{i}'' \times \mathfrak{b})^2 - 1 = \cos^2(\mathfrak{b}\,\mathfrak{i}'')$ usw. auch

$$[\mathfrak{n}^2] = (1 - \cos^2(\mathfrak{b}\mathfrak{i}'')) + (1 - \cos^2(\mathfrak{b}\mathfrak{j}'')) + (1 - \cos^2(\mathfrak{b}\mathfrak{k}'')) = 2$$

und es folgt als Bedingung für die ik die Beziehung:

$$\begin{aligned}[ik^2] = {} & 11^2 + 12^2 + 13^2 + \\ & + 21^2 + 22^2 + 23^2 + \\ & + 31^2 + 32^2 + 33^2 = 2\end{aligned} \qquad \ldots (14)$$

Des weiteren muß nach (10 b) die Quadratsumme der Glieder der adjungierten Determinante gleich eins sein

$$\begin{aligned}[\overline{ik}^2] = {} & \overline{11}^2 + \overline{12}^2 + \overline{13}^2 + \\ & + \overline{21}^2 + \overline{22}^2 + \overline{23}^2 + \\ & + \overline{31}^2 + \overline{32}^2 + \overline{33}^2 = 1\end{aligned} \qquad \ldots (15)$$

und bestehen wegen (10 b), (11 b) und (12 b) die Relationen:

$$\begin{aligned} 11_2 + 21^2 + 31^2 + \overline{11}^2 + \overline{21}^2 + \overline{31}^2 &= 1 \\ 12^2 + 22^2 + 32^2 + \overline{12}^2 + \overline{22}^2 + \overline{32}^2 &= 1 \\ 13^2 + 23^2 + 33^2 + \overline{13}^2 + \overline{23}^2 + \overline{33}^2 &= 1 \end{aligned} \qquad \ldots (16)$$

Die Summation der Gleichungen (16) ergibt die Gleichung

$$[ik^2 + \overline{ik}^2] = 3,$$

welche auch aus (14) und (15) folgt. Außerdem lassen sich noch weitere Beziehungen zwischen der ik angeben. Z. B. folgt aus (10) sowohl das Verschwinden der Determinante adjungierten

$$|\,ik\,| \equiv \begin{vmatrix} \overline{11} & \overline{12} & \overline{13} \\ \overline{21} & \overline{22} & \overline{23} \\ \overline{31} & \overline{32} & \overline{33} \end{vmatrix} = 0, \qquad \ldots (17a)$$

als auch die Proportion

$$\overline{11} : \overline{21} : \overline{31} = \overline{12} : \overline{22} : \overline{32} = \overline{13} : \overline{23} : \overline{33} \qquad \ldots (17\,b)$$

usw.

Von diesen Gleichungen sind jedoch nur 4 voneinander unabhängig. Die Gleichungen (17 a, b) folgen unmittelbar aus (13) und sind von dieser Gleichung abhängig; ebenso sind (14) (15) und (16) voneinander abhängig. Als Verträglichkeitsbedingungen können daher die Gleichungen (13), (14) und 2 der Gleichungen (16) gewählt werden, während die restlichen als Kontrollen für die Zahlenrechnung dienen.

Gleichung (14) gestattet in einfacher Weise die Bestimmung des Faktors μ oder von $lm = 0$. Bezeichnen $ik'' = \mu\, ik$ die aus dem homogenen System (5) und $ik' = ik : lm$ die aus einem inhomogenen System (5) folgenden Zahlenwerte, so bestehen nach (14) die Beziehungen:

$$[ik'^2] + 1 = 2\, lm^2, \quad [ik''^2] = 2\,\mu^2 \qquad \ldots (18)$$

Für die Verbesserung der aus (5) folgenden Zahlenwerte ik sind Linearformen der Bedingungsgleichungen erforderlich. Aus (13) folgt

$$[\overline{ik}\; d(ik)] + w_1 = 0, \qquad \ldots (13\,a)$$

aus (14) ergibt sich

$$[ik\ d(ik)] + w_2 = 0,$$

während die Gleichungen (16) Linearformen

$$[ik\ d(ik)]_i + [\overline{ik}\ d(\overline{ik})]_i + w_k = 0$$

bestimmen. Werden darin die Differentiale der Glieder der adjungierten Determinante durch Differentiale $d(ik)$ der ik ausgedrückt, so folgt z. B. für die erste der Gleichungen (16)

$$11\,d(11) + 21\,d(21) + 31\,d(31) + \begin{vmatrix} d(12) & 13 & \overline{11} \\ d(22) & 23 & \overline{21} \\ d(32) & 33 & \overline{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d(13) & \overline{11} & 12 \\ d(23) & \overline{21} & 22 \\ d(33) & \overline{31} & 32 \end{vmatrix} + w_3 = 0$$

und analoge Ausdrücke ergeben sich aus den restlichen Gleichungen.

Bei strenger Formulierung der vorliegenden Ausgleichungsaufgabe müssen die gemessenen Bildkoordinaten aus den Überbestimmungen nach dem Ausgleichungsprinzip verbessert werden. Hiezu muß (5) auch hinsichtlich der Bildkoordinaten linealisiert werden und es folgt dann ein System von Fehlergleichungen mit je 4 Meßgrößen ($x'\ y'$, $x''\ y''$) und 9 (bzw. 10) Unbekannten, zu welchen noch 4 Bedingungsgleichungen kommen (S. [2]).

Nr. 5 (Schlußbetrachtung). In den vorhergehenden Ausführungen wird gezeigt, wie die Orientierungsaufgabe des Folgebildanschlusses in aller Strenge aus dem Inhalt der Luftbilder und deren innerer Orientierung analytisch gelöst werden kann. Notwendig hiefür ist die Messung von Bildkoordinaten in 8 homologen Punkten, doch stehen der Einbeziehung weiterer der ∞^2 verfügbaren Bildpunkte keine Schwierigkeiten entgegen. Der Lösungsgedanke besteht in der Ermittlung von Hilfsunbekannten ik, aus welchen mit Hilfe einfacher Beziehungen der Basisvektor und das das Folgebild begleitende Dreibein angegeben werden können. Die Auflösung eines linearen Systemes mit 8 Hilfsunbekannten ik' gibt Näherungen für die ik, welche dann mit Hilfe von 4 Bedingungsgleichungen ergänzt und verbessert werden. Wesentlich ist, daß die Näherungswerte aus den Bildkoordinaten gewonnen werden und nicht vorgegeben sein brauchen.

Die vektorielle Betrachtung der Aufgabe ergibt einen übersichtlichen, einfachen Lösungsweg, dessen Vorteile im Vergleich mit den auf anderen Wegen sich ergebenden unübersichtlichen, transzendenten Formelsystemen besonders augenfällig wird. Auch das algebraische Problem der Verträglichkeitsbedingungen der transzendenten Gleichungen (5) kann dadurch in einfacher, anschaulicher Weise einer befriedigenden Lösung zugeführt werden.

Literatur:

[1] J. Koppmair, Generelle Lösung der Grundaufgabe der Photogrammetrie, Allg. Verm.-Nachrichten 1951.

[2] K. Rinner, Studie über eine voraussetzungslose Lösung der photogrammetrischen Hauptaufgabe, Photogrammetria, 1942, V, Heft 2.

[3] K. Rinner, Analytische Behandlung photogrammetrischer Aufgaben, Bildmessung u. Luftbildwesen. 1956, Heft 1, 2.