Zum nichteuklidischen Kosinussatz

Godfried Oliwa [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **44** (1), S. 23–24

1956

BibTeX:

```
@ARTICLE{Oliwa_VGI_195607,
Title = {Zum nichteuklidischen Kosinussatz},
Author = {Oliwa, Godfried},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {23--24},
Number = {1},
Year = {1956},
Volume = {44}
}
```

zeitraubend, die Verwendung desselben jedoch sehr zeitsparend. Die Anfertigung eines solchen Gerätes ist daher dann lohnend, wenn mehrere Pläne im gleichen Maßstab herzustellen sind.

Es bedarf kaum des Hinweises, daß sich viele andere Geräte bzw. Nomogramme anfertigen ließen, die das Gleiche leisten wie das Papierstreifengerät. Sie könnten analog sein den bekannten Geräten und Nomogrammen zur Schichtenlinien-Interpolation. Hinsichtlich der raschen und sicheren Handhabung dürften sie jedoch dem Papierstreifengerät nicht gleichkommen.

Im flachen Gelände ist der Universal-Lattenrichter nicht zweckmäßig verwendbar. Er ist aber im steilen und insbesondere in schwierig zugänglichem Gelände sehr gut verwendbar. Im Jahre 1947 baute ich erstmalig einen Universal-Lattenrichter und ein Papierstreifengerät, die ich seither mit großem Vorteil verwende.

Zum nichteuklidischen Kosinussatz

Von Godfried Oliwa, Wien

In dieser Skizze soll die Vektoralgebra auf die Trigonometrie angewendet werden. Es ist eine bekannte Tatsache, daß der sphärische Kosinussatz in der zweiten Regel der Vektoralgebra beschlossen liegt. Nun ist aber die sphärische Geometrie auch als die der elliptischen Ebene deutbar. Da demnach die elliptische Trigonometrie mit der Vektoralgebra zusammenhängt, so wird man versuchen in der zweiten Regel der Vektoralgebra auch den Kosinussatz der hyperbolischen, ebenen Trigonometrie zu sehen. Dies gelingt leicht, wenn der Vektorbegriff etwas modifiziert wird.

Sind x_0, x_1, x_2 reelle Zahlen, k entweder 1 oder die imaginäre Einheit i, dann heiße $\mathfrak{x}$ (kx_0, x_1, x_2) *Punktvektor*, $\overline{\mathfrak{x}}$ $(\bar{x}_0, k\bar{x}_1, k\bar{x}_2)$ hingegen *Geradenvektor*.

Das *skalare Produkt*[1]) zweier *Punktvektoren* $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ ist

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} = k^2\, x_0\, y_0 + x_1\, y_1 + x_2\, y_2 \qquad \ldots \quad (1)$$

das zweier *Geradenvektoren*

$$\overline{\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{y}} = \bar{x}_0\, \bar{y}_0 + k\, \bar{x}_1\, \bar{y}_1 + k\, \bar{x}_2\, \bar{y}_2 \qquad \ldots \quad (1')$$

Unter *Norm* versteht man:

$$n\,(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}^2 = k^2\, x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$$

bzw.

$$n\,(\overline{\mathfrak{x}}) = \overline{\mathfrak{x}}^2 = \bar{x}_0^2 + k^2\, \bar{x}_1^2 + k^2\, \bar{x}_2^2$$

Ein Vektor heißt normiert, wenn $\mathfrak{x}^2 = k^2$ oder $\overline{\mathfrak{x}}^2 = 1$ ist.[2])

Dem Vektor $\mathfrak{x}$ und $\overline{\mathfrak{x}}$ ist der normierte $\dfrac{\mathfrak{x}}{\sqrt{n\,(\mathfrak{x})}}$ bzw. $\dfrac{\overline{\mathfrak{x}}}{\sqrt{n\,(\overline{\mathfrak{x}})}}$ zugeordnet.

Sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in (1) und (1′) normiert, so sind

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} = k^2 \cos \frac{x\,y}{k} \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{x}}\,\bar{\mathfrak{y}} = \cos \bar{x}\,\bar{y} \qquad \ldots \quad (1'')$$

Das *Vektorprodukt* zweier Punktvektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ ist ein Geradenvektor:

$$[\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}] = \begin{pmatrix} k\,x_0, & x_1, & x_2 \\ k\,y_0 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \left\{(x_1\,y_2 - y_1\,x_2),\ k\,(x_2\,y_0 - x_0\,y_2),\ k\,(x_0\,y_1 - x_1\,y_0)\right\} \qquad \ldots \quad (2)$$

dafür gilt $[\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}] = -[\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}]$

Aus der LAGRANGEschen Identität ergibt sich für normierte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$: $[\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}]^2 = \mathfrak{x}^2\,\mathfrak{y}^2 - (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})^2$

$$n\,([\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}]) = k^4 - k^4 \cos^2 \frac{x\,y}{k} = k^4 \sin^2 \frac{x\,y}{k} \qquad \ldots \quad (3)$$

Die zweite Regel der Vektoralgebra lautet: Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ Punktvektoren, dann gilt:

$$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}] = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}) - (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}) \qquad \ldots \quad (4)$$

Man sieht dies leicht ein, wenn man $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ und $[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]$ wie (2) bildet und ausmultipliziert. Nach durchwegs elementaren Umformungen erhält man (4). Nun zum Kosinussatz: Spezialisiert man (4) für $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}$, wobei $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ normiert sind, so folgt:

$$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}] = -[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}] = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}) - \mathfrak{a}^2\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$$

da $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ und $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}]$ im allgemeinen nicht normiert sein werden, normiert man; daher ist mit (1″)

$$-\cos\varepsilon = -\frac{[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}]}{\sqrt{n\,([\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}])}\,\sqrt{n\,([\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}])}} = \frac{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) - \mathfrak{a}^2\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})}{\sqrt{n\,([\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}])}\,\sqrt{n\,([\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}])}}$$

oder

$$-\cos\varepsilon = \frac{k^2 \cos \frac{a\,c}{k}\; k^2 \cos \frac{a\,b}{k} - k^4 \cos \frac{b\,c}{k}}{k^2 \sin \frac{a\,b}{k} \,.\, k^2 \sin \frac{a\,c}{k}}$$

also

$$\cos \frac{b\,c}{k} = \cos \frac{a\,b}{k} \,.\, \cos \frac{a\,c}{k} + \sin \frac{a\,b}{k} \,.\, \sin \frac{a\,c}{k} \,.\, \cos\varepsilon \quad .$$

Daraus folgt für $k = 1$ der sphärische, elliptische und für $k = i$ der hyperbolische Kosinussatz.

Summary: This note gives an example of the connection between vectoralgebra and non-euclidian trigonometry.

---

[1]) Wir definieren nur die hier notwendigen Produktarten.

[2]) Für die Lobatschefskijsche Ebene ist (x_0, x_1, x_2) ein Punkt, sobald $x_0^2 > (x_1^2 + x_2^2)$ ist, wobei wegen $x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 1$, $x_0 \geqq 0$ sein muß. In der Riemannschen Ebene stellt (x_0, x_1, x_2) und $(-x_0, -x_1, -x_2)$ denselben Punkt dar.