

Paper-ID: VGI_195615



Die Fehlerfortpflanzung beim mehrfachen Einschneiden

H. Beyer ¹

¹ *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **44** (4), S. 97–105

1956

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Beyer_VGI_195615,  
Title = {Die Fehlerfortpflanzung beim mehrfachen Einschneiden},  
Author = {Beyer, H.},  
Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {97--105},  
Number = {4},  
Year = {1956},  
Volume = {44}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

o. ö. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. R o h r e r
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. L e g o und Doz. Dr. Karl L e d e r s t e g e r

Nr. 4

Baden bei Wien, Ende August 1956

XLIV. Jg.

Die Fehlerfortpflanzung beim mehrfachen Einschneiden

Von H. B e y e r, Wien

Bei vielen geodätischen Arbeiten ist es nötig, die Lage von Neupunkten durch mehrfaches Einschneiden zu bestimmen; oft erscheint es dabei wünschenswert, die Lagegenauigkeit eines auf diese Weise festgelegten Punktes zu untersuchen. Bisher standen hiefür die im Rahmen der Ausgleichsrechnung entwickelten Formeln zur Verfügung, in die jedoch nur die Fehler der Schnittrichtungen eingehen, während jene der Festpunkte unberücksichtigt bleiben. *F. Ackerl* hat für die fundamentale Aufgabe des einfachen Vorwärtsschnittes und des einfachen Rückwärtsschnittes in einer Reihe von Veröffentlichungen die Auswirkungen untersucht, wenn fehlerhafte Festpunkte vorliegen.

Bei überbestimmten Schnittaufgaben werden die Verhältnisse jedoch schnell verwickelt und unübersichtlich, da jeder weitere Außenpunkt P_i die mittleren Koordinatenfehler $(m_x)_i$ und $(m_y)_i$ und den mittleren Fehler der Schnittrichtung $(m_\varphi)_{0i}$ beiträgt; für die Praxis erscheint es jedoch ausreichend, Näherungsformeln zu entwickeln, die vor allem für Fehlerabschätzungen verwendbar sind. Unter der Annahme, daß die einzelnen Fehler der Bestimmungsgrößen unabhängig voneinander sind, was in aller Strenge allerdings nie der Fall ist, können die Koordinaten des mehrfach eingeschnittenen Punktes P_0 als Funktionen der Bestimmungsgrößen x_i , y_i und φ_{0i} ausgedrückt und anschließend nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz behandelt werden. Die Aufstellung der entsprechenden Gleichungen, nämlich

$$x_0 = f(x_i, y_i, \varphi_{0i}) \quad (1)$$

$$\text{und } y_0 = g(x_i, y_i, \varphi_{0i}) \text{ für } i = 1, 2, 3 \dots n \quad (2)$$

macht jedoch bei mehrfachen Schnitten erhebliche Schwierigkeiten und

führt zu Ausdrücken, die für die weitere mathematische Behandlung nicht geeignet erscheinen; hingegen ist es leicht möglich, die Koordinatenabstände Δx_0 und Δy_0 des gesuchten Punktes P_0 von einem Näherungspunkt P_0' explizit anzugeben. Die Koordinaten von P_0' sind fehlertheoretisch ohne Bedeutung, da dessen Lage beliebig gewählt werden kann, so daß sich in den Gleichungen

$$x_0 = x_0' + \Delta x_0 \quad (3)$$

$$\text{und } y_0 = y_0' + \Delta y_0 \quad (4)$$

die Untersuchung der Fehlerfortpflanzung jeweils auf den zweiten Teil der rechten Seite beschränken kann. Man findet daher die abgeleiteten Fehler des mehrfach eingeschnittenen Punktes, wenn man in den Ausdrücken

$$dx_0 = d\Delta x_0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Delta x_0}{\partial x_i} \cdot dx_i + \frac{\partial \Delta x_0}{\partial y_i} \cdot dy_i + \frac{\partial \Delta x_0}{\partial \varphi_{0i}} \cdot d\varphi_{0i} \right) =$$

$$\text{und} \quad = \sum_{i=1}^n (X_i' \cdot dx_i + Y_i' \cdot dy_i + K_i' \cdot d\varphi_{0i})$$

$$dy_0 = d\Delta y_0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Delta y_0}{\partial x_i} \cdot dx_i + \frac{\partial \Delta y_0}{\partial y_i} \cdot dy_i + \frac{\partial \Delta y_0}{\partial \varphi_{0i}} \cdot d\varphi_{0i} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n (X_i'' \cdot dx_i + Y_i'' \cdot dy_i + K_i'' \cdot d\varphi_{0i})$$

die neu eingeführten Koeffizienten X , Y und K bestimmt und anschließend die Fehler der Außenpunkte und der Richtungen einsetzt; die Berechnungen dazu werden nach den einzelnen Schnittmethoden getrennt aufgeführt.

a) Die Fehlerfortpflanzung beim mehrfachen Vorwärtsschnitt

Bekanntlich lassen sich bei dieser Aufgabe die Abstände vom Näherungspunkt durch die Ausdrücke

$$\Delta x_0 = - \frac{[aw \cdot 1]}{[aa \cdot 1]} = - \frac{[bb] [aw] - [ab] [bw]}{[aa] [bb] - [ab] [ab]} \quad (5)$$

und

$$\Delta y_0 = - \frac{[bw \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} = - \frac{[aa] [bw] - [ab] [aw]}{[aa] [bb] - [ab] [ab]} \quad (6)$$

darstellen, worin a und b die Richtungskoeffizienten der Form

$$a_{0i} = + \rho^{cc} \cdot \frac{(y_i - y_0')}{(y_i - y_0')^2 + (x_i - x_0')^2} \quad (7)$$

und

$$b_{0i} = - \rho^{cc} \cdot \frac{(x_i - x_0')}{(y_i - y_0')^2 + (x_i - x_0')^2} \quad (8)$$

bedeuten und w_i der Widerspruch ist, der nach der Gleichung

$$w_i = \arctan \frac{y_i - y_0'}{x_i - x_0'} - \varphi_{0i} \quad (9)$$

berechnet wird. Die Richtungskoeffizienten und die Widersprüche sind jeweils Funktionen von x_i , y_i und φ_{0i} ; in den Gleichungen (5) und (6) liegt daher bereits eine explizite Darstellung vor, die nach den eben genannten Variablen abgeleitet werden kann. Es ist vorteilhaft, zuerst die Bestimmungsgleichungen (7), (8) und (9) nach den Unbekannten partiell zu differenzieren, wobei man folgende Ergebnisse erhält:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{0i}}{\partial x_i} &= + \frac{1}{\rho^{ec}} \cdot 2a_{0i} b_{0i} \quad , \quad \frac{\partial a_{0i}}{\partial y_i} = + \frac{1}{\rho^{ec}} \cdot (b_{0i}^2 - a_{0i}^2) \quad , \quad \frac{\partial a_{0i}}{\partial \varphi_{0i}} = 0 \quad ; \\ \frac{\partial b_{0i}}{\partial x_i} &= + \frac{1}{\rho^{ec}} \cdot (b_{0i}^2 - a_{0i}^2) \quad , \quad \frac{\partial b_{0i}}{\partial y_i} = - \frac{1}{\rho^{ec}} \cdot 2 a_{0i} b_{0i} \quad , \quad \frac{\partial b_{0i}}{\partial \varphi_{0i}} = 0 \quad ; \quad (10) \\ \frac{\partial w_i}{\partial x_i} &= - a_{0i} \quad , \quad \frac{\partial w_i}{\partial y_i} = - b_{0i} \quad , \quad \frac{\partial w_i}{\partial \varphi_{0i}} = - 1 . \end{aligned}$$

Die Zusammenstellung zeigt, daß die partiellen Ableitungen der Richtungskoeffizienten a_{0i} und b_{0i} nach x_i und y_i wesentlich kleiner sind als alle anderen Größen, da im Ergebnis stets der Faktor $1/\rho^{ec}$ vorkommt; die totale Differentiation der Formeln (5) und (6) wird wesentlich vereinfacht, wenn man diese Ableitungen gleich Null setzt, wodurch sich brauchbare Näherungsformeln ergeben. Als Beispiel sei die partielle Ableitung von $[aw]$ nach x_i angeführt, um den prinzipiellen weiteren Rechnungsgang anzudeuten. Man erhält hierbei

$$\frac{\partial [aw]}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{01} w_1 + a_{02} w_2 + \dots + a_{0i} w_i + \dots + a_{0n} w_n) = w_i \cdot \frac{\partial a_{0i}}{\partial x_i} + a_{0i} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial x_i} ,$$

worin für die Näherung der erste Term Null gesetzt wird, so daß sich der einfache Ausdruck

$$\frac{\partial [aw]}{\partial x_i} = - a_{0i} a_{0i} \quad (11)$$

ergibt. Analog sind die übrigen Ableitungen zu bilden und in die total differenzierten Formeln für x_0 und y_0 einzusetzen. Damit ist die Fehlerfortpflanzung in x_0 für einen mehrfach vorwärts eingeschnittenen Punkt durch die Koeffizienten

$$X_i' = + \frac{1}{D} \cdot a_{0i} \cdot (a_{0i} [bb] - b_{0i} [ab]) = a_{0i} K_i' \quad (12a)$$

$$Y_i' = + \frac{1}{D} \cdot b_{0i} \cdot (a_{0i} [bb] - b_{0i} [ab]) = b_{0i} K_i' \quad (12b)$$

$$K_i' = + \frac{1}{D} \cdot (a_{0i} [bb] - b_{0i} [ab]) \quad (12c)$$

gegeben; für die Koordinate y_0 ist sie durch die Größen

$$X_i'' = + \frac{1}{D} \cdot a_{0i} \cdot (b_{0i} [aa] - a_{0i} [ab]) = a_{0i} K_i'' \quad (13a)$$

$$Y_i'' = + \frac{1}{D} \cdot b_{oi} \cdot (b_{oi} [aa] - a_{oi} [ab]) = b_{oi} K_i'' \quad (13b)$$

$$K_i'' = + \frac{1}{D} \cdot (b_{oi} [aa] - a_{oi} [ab]) \quad (13c)$$

bestimmt, worin der Buchstabe D die bekannte Determinante ($[aa] [bb] - [ab] [ab]$) bedeutet. Die im Endresultat jeweils verbleibende Größe K , K' für die Koordinate x_0 und K'' für y_0 , stellt den Kehrwert eines Richtungskoeffizienten dar, der jedoch die Auswirkungen aller Schnittrichtungen in sich trägt. Der Wert K ergibt daher mit einem Winkelwert multipliziert eine Länge, da er die Dimension Länge/Sekunden hat; soll jedoch mit einer Länge vervielfacht werden, also mit dx_i oder dy_i , so ist K vorher durch den entsprechenden Richtungskoeffizienten a_{oi} oder b_{oi} in ein Winkelmaß zu überführen.

Eine Kontrolle der oben angegebenen Formeln ist durch folgende Überlegung leicht möglich: Verschieben sich alle Außenpunkte um einen bestimmten Betrag dx , so muß sich auch P_0 um diesen Betrag verlagern, d. h. es muß $\sum_{i=1}^n X_i' = 1$ und $\sum_{i=1}^n X_i'' = 0$ sein, was sich leicht überblicken läßt; ebenso ist für ein bestimmtes gemeinsames dy entsprechend $\sum_{i=1}^n Y_i' = 0$ und $\sum_{i=1}^n Y_i'' = 1$.

Die Fehlerfortpflanzung in einem mehrfach eingeschnittenen Punkt ist daher durch die Formeln

$$dx_0 = \sum_{i=1}^n K_i' \cdot (a_{oi} dx_i + b_{oi} dy_i + \varphi_{oi}) \quad (14)$$

und

$$dy_0 = \sum_{i=1}^n K_i'' \cdot (a_{oi} dx_i + b_{oi} dy_i + d\varphi_{oi}) \quad (15)$$

gegeben, die durch Einführung der mittleren Fehler die Formen

$$(m_x)_0^2 = \sum_{i=1}^n K_i'^2 \cdot (a_{oi}^2 (m_x)_i^2 + b_{oi}^2 (m_y)_i^2 + (m_\varphi)_{oi}^2) \quad (16)$$

und

$$(m_y)_0^2 = \sum_{i=1}^n K_i''^2 \cdot (a_{oi}^2 (m_x)_i^2 + b_{oi}^2 (m_y)_i^2 + (m_\varphi)_{oi}^2) \quad (17)$$

erhalten. Die bisherigen Ergebnisse und insbesondere die Erklärung der K -Werte lassen den Schluß zu, daß die Formeln (14) bis (17) für alle Schnittverfahren gelten und jeweils nur die entsprechenden Größen K' und K'' einzuführen sind.

Da der Ausgleich mehrfacher Schnitte oft graphisch durchgeführt wird, wobei die einzelnen Richtungskoeffizienten, die Widersprüche und die notwendigen Produkt-Summen konstruktiv gefunden werden, sei für die

K -Werte eine Möglichkeit der zeichnerischen Darstellung kurz angegeben: Man legt durch den Punkt P_0' Parallele zu den Koordinatenrichtungen und trägt darauf die Werte $[aa]/D$, $[ab]/D$ und $[bb]/D$ in einem entsprechenden Maßstab so auf, wie es in Fig. 1 angezeichnet ist. Anschließend projiziert man die Endpunkte der aufgetragenen Strecken auf die jeweilige Schnitt- richtung φ_{0i} . Aus den Formeln (12c) und (13c) geht durch einfache Um-

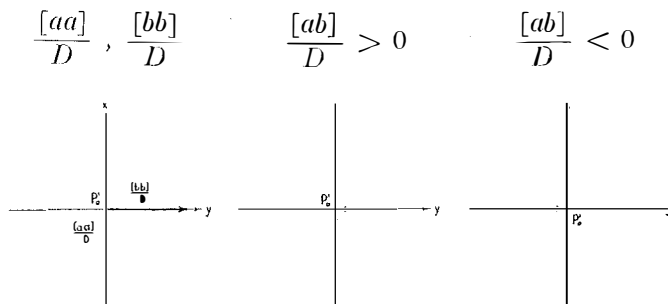


Fig. 1

formung hervor, daß jeweils die Projektionen von verschiedenen Koordinatenachsen zusammengehören (Fig. 2), wobei K' mit $[bb]/D$ und K'' mit $[aa]/D$ zu bilden ist. Die graphische Summe und das Vorzeichen derselben kann durch die in Fig. 1 und 2 zusätzlich eingezeichneten Pfeile gefunden werden, wenn man folgende Regel berücksichtigt: Sind die Richtung der Projektionssumme und die Schnitt- richtung gleich, so ist der entnommene Wert, der die Größe $\frac{s_{0i}}{\rho^{cc}} \cdot K_i'$ bzw. $\frac{s_{0i}}{\rho^{cc}} \cdot K_i''$ hat, positiv, ansonsten negativ.

Fall: $[ab]/D > 0$

Fall: $[ab]/D < 0$

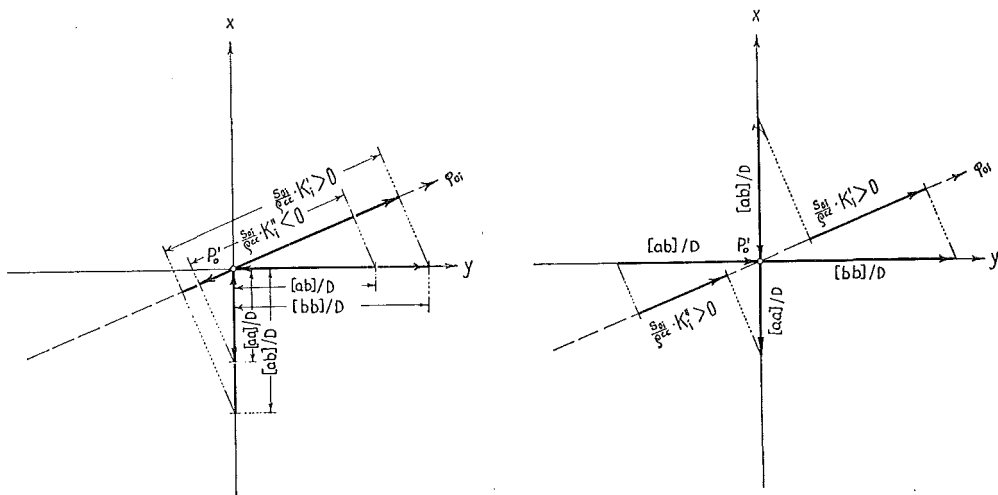


Fig. 2

b) Die Fehlerfortpflanzung beim mehrfachen Rückwärtsschnitt

Die Entwicklung der Formeln für den mehrfachen Rückwärtsschnitt läßt sich auf den schon besprochenen Fall zurückführen, wenn man die reduzierten Koeffizienten und Widersprüche, nämlich

$$A_{0i} = a_{0i} - \frac{[a]}{n}, \quad B_{0i} = b_{0i} - \frac{[b]}{n} \quad \text{und} \quad W_{0i} = w_{0i} - \frac{[w]}{n} \quad (18)$$

verwendet; dadurch behalten die Bestimmungsgleichungen für x_0 und y_0 , nämlich die Formeln (5) und (6), ihre Gestalt und können analog nach den Variablen x_i , y_i und φ_{0i} abgeleitet werden. Die partiellen Ableitungen der reduzierten Koeffizienten A_{0i} und B_{0i} seien zur Vereinfachung wieder gleich Null gesetzt, so daß nur die Differentiation der Summen $[AW]$ und $[BW]$ von Interesse ist. Der prinzipielle Gang der Rechnung sei durch partielle Ableitung der Summe $[AW]$ nach x_i gezeigt. Zuerst führt man dazu die ursprünglichen Richtungskoeffizienten ein und spaltet unter Anwendung bekannter Regeln in einzelne Ableitungen auf, was der Reihe nach die Ausdrücke

$$\frac{\partial [AW]}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left([aw] - \frac{[a]}{n} [w] \right) = \frac{\partial [aw]}{\partial x_i} - \frac{[w]}{n} \cdot \frac{\partial [a]}{\partial x_i} - \frac{[a]}{n} \cdot \frac{\partial [w]}{\partial x_i}$$

ergibt, worin anschließend die Summen in die einzelnen Posten, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial [AW]}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{01} w_1 + a_{02} w_2 + \dots + a_{0i} w_i + \dots + a_{0n} w_n) - \\ &\quad - \frac{[w]}{n} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{01} + a_{02} + \dots + a_{0i} + \dots + a_{0n}) - \\ &\quad - \frac{[a]}{n} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (w_1 + w_2 + \dots + w_i + \dots + w_n) \end{aligned}$$

aufgelöst werden; nunmehr sind die Glieder, die die Variable x_i enthalten, herauszugreifen und zu differenzieren, was zu dem einfachen Endergebnis

$$\begin{aligned} \frac{\partial [AW]}{\partial x_i} &= w_i \cdot \frac{\partial a_{0i}}{\partial x_i} + a_{0i} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial x_i} - \frac{[w]}{n} \cdot \frac{\partial a_{0i}}{\partial x_i} - \frac{[a]}{n} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = \\ &= -a_{0i} a_{0i} + a_{0i} \frac{[a]}{n} = -a_{0i} A_{0i} \end{aligned} \quad (19)$$

führt. Der weitere Rechengang erfolgt analog dem letzten Kapitel, wodurch man die für den mehrfachen Rückwärtsschnitt geltenden K -Werte erhält. Es sind dies die Ausdrücke

$$K_i' = + \frac{1}{D} \cdot (A_{0i} [BB] - B_{0i} [AB]) \quad (20)$$

und

$$K_i'' = + \frac{1}{D} \cdot (B_{0i} [AA] - A_{0i} [AB]) \quad (21)$$

mit

$$D = [AA] [BB] - [AB] [AB],$$

die den gleichen Aufbau wie die Formeln (12c) und (13c) zeigen. Die Verschiebung bzw. die Lagegenauigkeit eines mehrfach rückwärts eingeschnittenen Punktes in Funktion der dx_i , dy_i und $d\varphi_{0i}$ ist daher durch die Formeln (14) bis (17) ausgedrückt, in die jedoch nun die K -Werte der Gleichungen (20) und (21) einzusetzen sind.

c) Die Fehlerfortpflanzung beim kombinierten Einschnneiden

Bei der Ableitung der entsprechenden Formeln für den kombinierten Einschnitt ist zu beachten, daß sich die Koeffizienten der Normalgleichungen jeweils aus zwei Produkt-Summen in der Form

$$[\mathfrak{R}\mathfrak{I}] = [aa]_{\mathbf{V}} + [AA]_{\mathbf{R}} = [aa]_{\mathbf{V}} + [aa]_{\mathbf{R}} - \frac{[a]_{\mathbf{R}}}{n_{\mathbf{R}}} \cdot [a]_{\mathbf{R}} \quad (22)$$

zusammensetzen, worin der Index V die „vorwärts“, der Index R die „rückwärts“ schneidenden Strahlen anzeigt. Die Ableitungen nach den Variablen x_i , y_i und φ_{0i} lassen sich leicht angeben; so ist etwa die Differentiation von $[\mathfrak{R}\mathfrak{W}]$ nach x_i gleich der Summe der entsprechenden Ableitungen von $[aw]_{\mathbf{V}}$ und $[AW]_{\mathbf{R}}$, die schon in den vorhergehenden Kapiteln behandelt wurden, so daß sich daher der Ausdruck

$$\frac{\partial [\mathfrak{R}\mathfrak{W}]}{\partial x_i} = - (a_{0i} a_{0i})_{\mathbf{V}} - (a_{0i} A_{0i})_{\mathbf{R}} \quad (23)$$

durch Zusammensetzung der Gleichungen (11) und (19) ergibt. Beachtet man, daß für ein und dieselbe Richtung $(a_{0i})_{\mathbf{V}}$ gleich $(a_{0i})_{\mathbf{R}}$ ist, so kann man a_{0i} in obiger Formel herausheben und erhält als Ergebnis

$$\frac{\partial [\mathfrak{R}\mathfrak{W}]}{\partial x_i} = - a_{0i} \cdot \left((a_{0i})_{\mathbf{V}} + (A_{0i})_{\mathbf{R}} \right).$$

Für einen nur vorwärts beobachteten Strahl geht diese Gleichung in die Formel (11) über, für einen nur rückwärts beobachteten Strahl hingegen in Formel (19). Die K -Werte für den kombinierten Einschnitt sind somit durch

$$K' = + \frac{1}{D} \cdot \left\{ \left((a_{0i})_{\mathbf{V}} + (A_{0i})_{\mathbf{R}} \right) [\mathfrak{B}\mathfrak{B}] - \left((b_{0i})_{\mathbf{V}} + (B_{0i})_{\mathbf{R}} \right) [\mathfrak{R}\mathfrak{B}] \right\}$$

und

$$K'' = + \frac{1}{D} \cdot \left\{ \left((b_{0i})_{\mathbf{V}} + (B_{0i})_{\mathbf{R}} \right) [\mathfrak{R}\mathfrak{I}] - \left((a_{0i})_{\mathbf{V}} + (A_{0i})_{\mathbf{R}} \right) [\mathfrak{R}\mathfrak{B}] \right\}$$

mit $D = [\mathfrak{R}\mathfrak{I}] [\mathfrak{B}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{R}\mathfrak{B}] [\mathfrak{R}\mathfrak{B}]$

gegeben; durch Einsetzen in Gleichung (14) und (15) oder Gleichung (16) und (17) erhält man die gewünschten Endformeln.

Die Ergebnisse dieser Entwicklungen erlauben, die Fehlerfortpflanzung bei mehrfach eingeschnittenen Punkten näherungsweise für jede gestellte Aufgabe zu rechnen, da Beobachtungen nach Winkeln durch bekannte Umformungen auf die behandelten Fälle zurückgeführt werden können. Wählt man zweckmäßige Dimensionen, etwa Dezimeter für die Koordinatenfehler

und Kilometer für die Punktentfernungen, so läßt sich die gesamte Bestimmung mit Hilfe des vorher gerechneten oder gezeichneten Ausgleichs am Rechenschieber in relativ kurzer Zeit durchführen, was für die Praxis einen wesentlichen Vorteil bedeutet. Die Lösung der behandelten Aufgabe erlaubt eine Fülle von Anwendungen auf andere Gebiete, die weiteren Arbeiten vorbehalten bleiben müssen; als erste davon wird eine umfangreiche Abhandlung über „Die Kontrolle langer offener Polygonzüge durch Fernziele“ als Sonderheft dieser Zeitschrift demnächst erscheinen.

Anhang: Beispiel

Für das Beispiel wurden mit Absicht die einfachen Verhältnisse eines vierfachen Vorwärtsschnittes gewählt, bei dem zwei Visuren nahezu mit den Koordinatenrichtungen übereinstimmen, da die Fehlerfortpflanzung dabei am leichtesten zu übersehen ist. In der beigelegten Kartierung (Fig. 3) sind die mittleren Fehler der Festpunkte stark vergrößert als positive Strecken eingetragen, während der mittlere Richtungsfehler jeweils schematisiert dargestellt wurde.

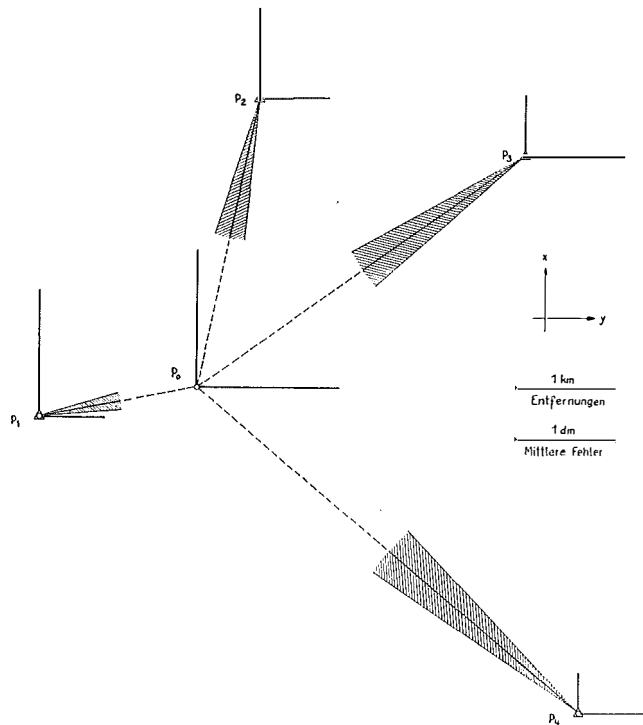


Fig. 3

Aus dem vorhandenen Ausgleich wurden die Richtungskoeffizienten und deren Produkt-Summen entnommen, während die Lagefehler der Festpunkte älteren Manualen entstammen; auf Grund des verwendeten Instrumentes wurde schließlich m_φ mit $\pm 30''$ angenommen. Um die Ergebnisse

besonders anschaulich zu machen, wurden die einzelnen Koeffizienten nach den Formeln (12) und (13) gerechnet und dann erst in die entsprechenden Endformeln eingesetzt.

Angaben:

(Punktentfernungen in *km*, Lagegenauigkeit in *dm*)

P_i	a_{0i}	b_{0i}	$(m_x)_i$	$(m_y)_i$	Produkt-Summen
P_1	-19,6	+ 3,7	± 2,5	± 1,3	$[aa] = 455$
P_2	+ 2,2	- 10,7	± 1,8	± 1,4	$[ab] = -106$
P_3	+ 6,5	- 4,7	± 1,2	± 2,0	$[bb] = 168$
P_4	+ 4,9	+ 4,2	± 0,8	± 1,4	$D = 65,2 \cdot 10^6$

Ergebnisse:

i	X'	Y'	K'	X''	Y''	K''
1	+ 0,87	- 0,17	- 0,045	+ 0,12	- 0,02	- 0,006
2	- 0,03	+ 0,13	- 0,012	- 0,16	+ 0,76	- 0,071
3	+ 0,06	- 0,04	+ 0,009	- 0,14	+ 0,10	- 0,022
4	+ 0,10	+ 0,08	+ 0,019	+ 0,18	+ 0,16	+ 0,037
Probe:	1,00	0,00		0,00	1,00	

$$\begin{aligned} (m_x)_0^2 &= \sum_{i=1}^4 (X_i'^2 \cdot (m_x)_i^2 + Y_i'^2 \cdot (m_y)_i^2 + K_i'^2 \cdot (m_{\varphi})_{0i}^2) = \\ &= (4,73 + 0,00 + 0,00 + 0,01) + (0,05 + 0,03 + 0,01 + 0,01) + (1,82 + \\ &+ 0,13 + 0,07 + 0,33) = 4,74 + 0,10 + 2,35 = 7,19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m_y)_0^2 &= \sum_{i=1}^4 (X_i''^2 \cdot (m_x)_i^2 + Y_i''^2 \cdot (m_y)_i^2 + K_i''^2 \cdot (m_{\varphi})_{0i}^2) = \\ &= (0,09 + 0,08 + 0,03 + 0,02) + (0,00 + 1,13 + 0,04 + 0,05) + (0,03 + \\ &+ 4,54 + 0,44 + 1,23) = 0,22 + 1,22 + 6,24 = 7,68 \end{aligned}$$

Die mittleren Koordinatenfehler des mehrfach vorwärts eingeschnittenen Punktes sind daher:

$$\begin{aligned} (m_x)_0 &= \pm 2,7 \text{ dm} \\ (m_y)_0 &= \pm 2,8 \text{ dm} \end{aligned}$$

Literaturübersicht:

- A c k e r l, „Über den Einfluß fehlerhafter Festpunkte auf das Ergebnis des Vorwärts-einschneidens.“ Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen, 1930.
- A c k e r l, „Über den Rückwärtsschnitt aus fehlerhaften Festpunkten.“ Schweizerische Zeitschrift für Vermessung und Kulturtechnik, 1948.
- A c k e r l, „Die Fehlerellipse des Neupunktes beim Rückwärtsschneiden aus fehlerhaften Festpunkten.“ Schweizerische Zeitschrift für Vermessung und Kulturtechnik, 1949.