

Paper-ID: VGI\_195703



## Beitrag zur Kartenentwurfslehre

Karl Killian <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **45** (1), S. 14–22

1957

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Killian_VGI_195703,  
  Title = {Beitrag zur Kartenentwurfslehre},  
  Author = {Killian, Karl},  
  Journal = {{\u0026}sterreichische Zeitschrift f{\u0026;r Vermessungswesen},  
  Pages = {14--22},  
  Number = {1},  
  Year = {1957},  
  Volume = {45}  
}
```



## Beitrag zur Kartenentwurfslehre

Von Ing. K. Killian

Die *Tissot'sche Indikatrix* gibt uns bekanntlich ein Kriterium für die Strecken-, Winkel- und Flächenverzerrungen aller überhaupt möglichen Kartenentwürfe und gestattet damit einen systematischen Aufbau der ganzen Kartenentwurfslehre. Dennoch dürfte es von Interesse sein, einige bekannte Beziehungen auch von anderen Standpunkten aus zu beleuchten, wobei das Bestreben auf *einfachste, anschauliche* Beweise gerichtet ist, und in diesem Zusammenhang einige Vorläufer *Tissot's* zu nennen.

### 1. Stereographische Projektion

Während die geometrischen Eigenschaften von zwei anderen perspektivischen Projektionen: gnomonische Projektion (Thales 600 v. Chr.) und orthographische Projektion (Apollonius 240 v. Chr.) unmittelbar erkannt wurden, war dies bei der stereographischen Projektion nicht der Fall. Hipparch (160—125 v. Chr.) hat die stereographische Projektion der Kugel zur Abbildung des Himmelsgewölbes angewandt und Ptolemäus (150 n. Chr.) entdeckte die Kreistreue für einige Kreise. Jordanus Saxo (gest. 1237) erkannte die Kreistreue als allgemein bestehend. Die Winkeltreue, die nach den heutigen Erkenntnissen auf Grund der *Tissot-Indikatrix* unmittelbar aus der Kreistreue folgt, wurde erst von Mercator (1587) entdeckt. Neu entdeckt wurde sie von Hook (siehe Philos. Transactions Bd. XIX., 1695 bis 1697, S. 204 u. 205).

Zunächst seien zwei zum größten Teil bekannte einfache Beweise über Kreis- und Winkeltreue der genannten Projektion angeführt, die am Schlusse durch einen kürzeren einfachen und allgemeiner anwendbaren Beweis ergänzt werden. In Fig. 1 (= Aufriß) ist  $e$  die Projektionsebene, die die abzubildende Kugel in einem zum Projektionszentrum  $O$  diametral gelegenen Punkt  $S$  berührt. Jede andere zu dieser Ebene parallele Projektionsebene ergibt bekanntlich nur eine Ähnlichkeitstransformation. Ein beliebiger ebener Schnitt mit der Kugel ist ein Kreis, der in Fig. 1 als Strecke  $\overline{AB}$  dargestellt wird.  $OAA'$  und  $OBB'$  sind die in der Papierebene gelegenen Erzeugenden des projizierenden Kegels.

Die Dreiecke  $OSB$  und  $OSB'$  sind rechtwinkelig und haben den gleichen Winkel  $\alpha$ . Die Winkel bei  $S$  und  $B'$  sind daher einander gleich. Die Winkel bei  $S$  und  $A$  sind ebenfalls einander gleich (Peripheriewinkel). Daher ist das Viereck  $ABB'A'$  ein Sehnenviereck. Dessen Umkreis kann als Aufriß einer Kugel angesehen werden. Da ebene Schnitte einer Kugel immer Kreise sind, folgt, daß jeder Kreis als Kreis abgebildet wird. Die auf  $e$  normalen Großkreise der Kugel werden als Kreise mit unendlich großem Radius abgebildet.

Auch unendlich kleine Kreise werden als Kreise abgebildet, d. h. in allen Richtungen ist die Streckenverzerrung konstant oder unendlich kleine Figuren sind einander ähnlich, die Abbildung ist also winkeltreu.

Unabhängig von der Kreistreue kann die Winkeltreue auch aus Fig. 1 abgelesen werden: Legt man in einem beliebigen Punkt  $P$  der Kugel die Tangentialebene  $t$ , so ist einer ihrer beiden Winkel mit der Projektionsebene gleich dem Zentriwinkel  $2\beta$  (Winkelsumme im Viereck  $MPNS$ ). Die Winkelhalbierende Ebene  $w$  steht immer normal zum Projektionsstrahl  $OPP'$  (Peripheriewinkel  $\beta$  ist Normalwinkel zu Winkel  $P'Nw$ ). Denkt man sich durch den Projektionsstrahl  $OPP'$  beliebige Ebenen gelegt, so werden diese Ebenen von den beiden Ebenen  $e$  und  $t$  unter gleichen Winkeln geschnitten; denn die Ebenen  $e$  und  $t$  liegen symmetrisch zur Ebene  $w$  (Fokalfunkte der Luftbildmessung).

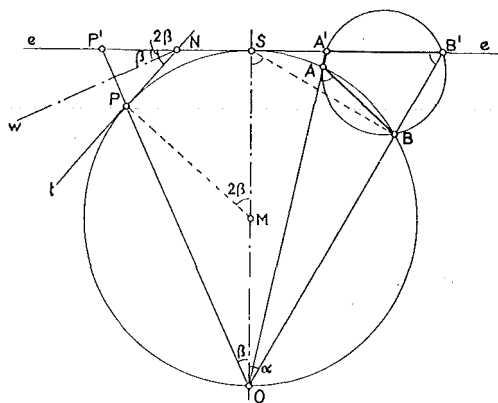


Fig. 1

Bemerkt sei, daß aus der Kreis- und Winkeltreue z. B. der aus der Geometrie bekannte Satz folgt: „Drei Kleinkreise einer Kugel, deren Kreisebenen durch einen gemeinsamen Kugelpunkt gehen, bilden ein Dreieck, dessen Winkelsumme  $180^\circ$  ist.“ Sieht man nämlich den gemeinsamen Kugelpunkt als Zentrum einer stereographischen Projektion an, so ergibt das Bild dieser Kreise ein geradlinig begrenztes Dreieck. Dies gilt auch, wenn einer oder zwei der drei Kleinkreise durch Großkreise ersetzt werden.

Daß die stereographische Projektion der Kugel die einzige zentrale Projektion ist, bei der alle Kreise wieder als Kreise abgebildet werden, folgt unmittelbar aus Fig. 1. Denn bei anderen Lagen des Projektionszentrums  $O$  entsteht das genannte Sehnenviereck nicht. Daß jedoch die stereographische Projektion überhaupt die einzige konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene darstellt, bei der Kreise wieder als Kreise abgebildet werden, ist vermutlich nur umständlich ableitbar. Ein solcher Beweis ist aber schon implicit in der Arbeit von L a g r a n g e enthalten: „Sur la construction des cartes géographiques“ 1779 (Übersetzung: Ostwalds Klassiker Nr. 55).

Das wenig sagende Wort „stereographisch“ rührt her vom Jesuitenpater A g u i l o n i u s (1613). Es würden einige Vorschläge gemacht, dieses Wort durch ein besseres, z. B. durch „allkreisig“, zu ersetzen. Das letztere und ähnliche Worte wären jedoch nur für die stereographische Projektion

einer Kugel anwendbar, während in der Geometrie die Bezeichnung „stereographische Projektion“ für alle Flächen zweiter Ordnung, die von einem ihrer Punkte auf eine Ebene projiziert werden, eingeführt ist. Erwähnt sei z. B. die stereographische Projektion eines einschaligen Hyperboloides auf eine zu ihrer Achse senkrechten Ebene. Einschaliges Hyperboloid und Kugel können durch imaginäre Kollineation ineinander übergeführt werden, so daß in diesem Fall alle projektivischen Sätze der einen Fläche auf die andere übertragen werden können.

Wir denken uns an Stelle der Kugel ein Rotationsellipsoid. Das Projektionszentrum  $O$  liege in einem Pol und die Projektionsebene berühre das Rotationsellipsoid im anderen Pol. Das Rotationsellipsoid denken wir uns wieder durch eine beliebige Ebene geschnitten. Die Schnittfigur ist bekanntlich eine Ellipse, die wir im Aufriß wieder als eine Strecke  $\overline{AB}$  darstellen. Das Bild jeder solchen Schnittfigur ist ein Kreis, wie vermutlich am einfachsten auf folgende Weise gezeigt werden kann: zwei Flächen zweiter Ordnung schneiden sich bekanntlich in einer Kurve vierter Ordnung, die auch in zwei Kurven zweiter Ordnung zerfallen kann. Bei der stereographischen Projektion schrumpfen alle reellen Punkte einer der beiden Kurven in einem Punkt zusammen. (Das imaginäre Geradenpaar bleibt für den folgenden Schluß unbeachtet.) Denkt man sich jedoch das Projektionszentrum  $O$  um einen unendlich kleinen Betrag, etwa in der Richtung der Achse des die genannte Ellipse projizierenden Kegels verschoben, so wird die zweite Kurve ein Kreis; denn die *Dupinsche Indikatrix* (1813) des Poles ist ein Kreis. Da ferner die Projektionsebene parallel zur Tangentialebene in  $O$  ist, ist somit auch das gesuchte Projektionsbild ein Kreis. (Die *Dupinsche Indikatrix* eines regulären Flächenpunktes  $P$  ist bekanntlich jene unendlich kleine Schnittkurve, in welcher eine, der Tangentialebene in  $P$  parallele, und von zweiter Ordnung dieser unendlich nahen Ebene, die Fläche schneidet. Unter Vernachlässigung unendlich kleiner Größen höherer als zweiter Ordnung ergibt sich ein unendlich kleiner Kegelschnitt, der die Fläche in der Umgebung von  $P$  charakterisiert).

Ähnliche Überlegungen können auch für die stereographische Projektion anderer Flächen zweiter Ordnung angewandt werden. Der Beweis der Kreistreue der stereographischen Projektion der Kugel ergibt sich aus dem soeben angeführten Beweis für das Ellipsoid.

Denkt man sich die genannte Schnittfigur des Ellipsoides unendlich klein, so ersetzt in diesem Fall die *Dupinsche Indikatrix* die *Tissotsche Indikatrix*. Wollte man die Letztere zur Anwendung bringen, so müßte man bekanntlich vorerst das Bild eines unendlich kleinen, am Ellipsoid gelegenen Kreises, bestimmen.

Bezüglich der Anwendung der stereographischen Projektion in der Geodäsie seien genannt: C. F. Gauß' Werke 9. Bd.; Krüger, Veröff. d. Preuß. Geod. Inst. Neue Folge Nr. 89; Rousilhe, *Emploi Des Coordonnées Rectangulaires Stereographiques*, Paris 1922.

## 2. Tissots Indikalrix

Diese kann man am einfachsten mit Hilfe bekannter Beziehungen der affinen Transformationen ableiten. Es bedeuten:  $\varphi, \lambda$  die geographischen Koordinaten eines am Rotationsellipsoid gelegenen Punktes  $P$  und  $x, y$ , die Kartenkoordinaten seines Bildpunktes  $P'$ . Die gegebenen Abbildungsgleichungen seien stetig, differenzierbar und voneinander unabhängig:

$$\begin{aligned} x &= x(\varphi, \lambda) \\ y &= y(\varphi, \lambda) \end{aligned} \quad \dots \quad (1)$$

Somit ist

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \end{aligned} \quad \dots \quad (2)$$

Für einen beliebigen Punkt des Rotationsellipsoides sind die partiellen Diff.-Q. konstante Größen. Die Gln. (2) stellen somit die allgemeinen affinen Transformationsgleichungen dar, d. h. die Umgebung des Punktes  $P$  ist zur Umgebung seines Bildpunktes  $P'$  affin.

Die Gln. (2) werden zweckmäßig so umgeformt, daß an Stelle der Winkeldifferentiale  $d\varphi, d\lambda$  Linienelemente kommen. Ist  $\rho$  der Krümmungshalbmesser des Meridians im Punkte  $P$  und  $r$  der Halbmesser des durch  $P$  gehenden Parallelkreises, so sind die Linienelemente im Meridian bzw. Parallelkreis  $\rho d\varphi$  bzw.  $r d\lambda$ . Diese Größen führen wir an Stelle von  $d\varphi$  und  $d\lambda$  ein und müssen daher die entsprechenden partiellen Diff.-Q. durch  $\rho$  bzw.  $r$  dividieren.

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial \varphi} (\rho d\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda} (r d\lambda) \\ dy &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial y}{\partial \varphi} (\rho d\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \lambda} (r d\lambda) \end{aligned} \quad \dots \quad (2a)$$

Wir schreiben diese allgemeinen affinen Transformationsgleichungen in üblicher Form:

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y \\ y' &= a_2 x + b_2 y \end{aligned} \quad \dots \quad (3)$$

und beachten bekannte Eigenschaften: Ist  $x = \infty$  oder  $y = \infty$  oder  $x = y = \infty$ , so werden  $x'$  und  $y'$  unendlich groß, d. h. die unendlich fernen Punkte der einen Ebene entsprechen unendlich fernen der anderen. Ist  $x = y = 0$ , so ist  $x' = y' = 0$ , d. h. die Koordinatenanfänge des  $x, y$ - und des  $x', y'$ -Systems fallen zusammen. Ist  $x = 0$  oder  $y = 0$ , so ist  $x' \neq 0$  bzw.  $y' \neq 0$ , d. h. die Koordinatenachsen fallen nicht zusammen. Die affine Transformation führt eine Kurve  $n$ -ter Ordnung in eine Kurve  $n$ -ter Ordnung über. Setzt man z. B. eine lineare Gl.  $y = mx + n$  in die Gln. (3) ein, so ergibt sich nach Elimination von  $x$  ebenfalls eine lineare Gl. in  $x'$  und  $y'$ . Analoges gilt für Gln. zweiter Ordnung. Jeder Kreis der  $x, y$ -Ebene geht daher in eine Kurve zweiter Ordnung über, und zwar in eine solche, die nach der erst-

erwähnten Eigenschaft ebenfalls keine reellen unendlich fernen Punkte aufweist, d. h. in eine Ellipse (Kreis wird als Ellipse mit gleichen Halbachsen angesehen). Denkt man sich einen Kreis mit umschriebenem Quadrat und den beiden die Berührungspunkte verbindenden Durchmessern affin transformiert, so erhält man eine Ellipse mit einem umschriebenen Parallelogramm und einem Paar konjugierter Durchmesser (Kreismittelpunkt entspricht Diagonalschnittpunkt des Parallelogramms).

Die *Tissot-Indikatrix* ist daher eine Ellipse und ein beliebiges Paar aufeinander normaler Durchmesser des Einheitskreises entsprechen einem Paar konjugierter Durchmesser dieser Ellipse. Dem Paar aufeinander normaler konjugierter Durchmesser (Hauptachsen) der Ellipse entspricht ein bestimmtes Paar aufeinander normaler Durchmesser des Einheitskreises.

Es wird nun noch die bekannte Beziehung abgeleitet, die zwischen den Flächeninhalten eines Dreieckes und seines affin transformierten besteht. Sind die Koordinaten der Eckpunkte entsprechender Dreiecke  $x'_1, y'_1; x'_2, y'_2; x'_3, y'_3$ ; bzw.  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$  und ihre Flächen  $F'$  bzw.  $F$ , so ist:

$$2 F' = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x_1 + b_1 y_1 & a_2 x_1 + b_2 y_1 & 1 \\ a_1 x_2 + b_1 y_2 & a_2 x_2 + b_2 y_2 & 1 \\ a_1 x_3 + b_1 y_3 & a_2 x_3 + b_2 y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

und nach Anwendung der bekannten Multiplikationsregel für Determinanten folgt:

$$2 F' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Somit ist

$$F' = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot F = \sigma \cdot F \quad . . . \quad (4)$$

Affine Transformation bewirkt also, daß alle Dreiecksinhalte und somit alle Flächeninhalte beliebig geformter Flächen (aus Dreiecken aufgebaut bzw. Grenzübergang bei krummer Begrenzung) mit einem konstanten Faktor  $\sigma$ , der *Flächenverzerrung*, multipliziert werden, was auch rein geometrisch leicht gezeigt werden kann. Bezeichnet man also die Halbachsen der Tissot-Indikatrix mit  $a$  und  $b$ , so ist ihre Fläche bzw. die des Einheitskreises  $ab\pi$  bzw.  $\pi$ , somit:

$$\sigma = a b \quad . . . \quad (5)$$

Noch einfacher gelangt man zu diesem Verhältnis, wenn man die doppelte Dreiecksfläche:  $ab$  durch die entsprechende doppelte Dreiecksfläche:  $1 \cdot 1$  dividiert. Nebenbei ist damit die Formel für die Ellipsenfläche aus der Formel für die Kreisfläche abgeleitet (Archimedes).

Setzt man in Gl. (4) für  $a_1, b_1, a_2, b_2$  die ursprünglichen Werte ein, so kommt man zu der von Tissot abgeleiteten Gl.:

$$\sigma = \frac{1}{r\rho} \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \quad . . . \quad (6)$$

Man erkennt, daß der Klammerausdruck, er möge  $D$  heißen, die Funktionaldeterminante (Jakobi 1841) der Abbildungsfunktionen Gl. (1) darstellt. Ist  $D = 0$ , so besteht bekanntlich eine Abhängigkeit zwischen den beiden Abbildungsfunktionen. Ist nämlich tatsächlich  $y = f(x)$ , so folgen die Gln.:

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = f'(x) \frac{\partial x}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = f'(x) \frac{\partial x}{\partial \lambda}$$

die nach Elimination von  $f'(x)$  für  $D$  den Wert 0 ergeben. Ist  $D = 0$ , so wird die ganze Fläche des Rotationsellipsoids auf eine Kurve  $y = f(x)$  abgebildet; denn jedem Punkt des Ellipsoids entsprechen nach den Abbildungsgleichungen (1) Werte von  $x$  und  $y$ , die voraussetzungsgemäß auch die Funktion  $y = f(x)$  befriedigen. In diesem Fall ist nach Gl. (6)  $\sigma = 0$ , was der Abbildung der ganzen Fläche des Rotationsellipsoids auf eine Kurve entspricht. Jedem Kurvenpunkt sind sodann  $\infty^1$  Punkte der Fläche zugeordnet.

Bemerkt sei, daß diese Abbildungsart eventuell zur Vereinfachung der numerischen Auswertung von Abbildungsfunktionen verwendet werden kann. Man kann nämlich auf die genannte Weise das Ellipsoid auf zwei gewählte Kurven (Kreise, Gerade) abbilden und etwa von zwei festen Zentren ausgehend, analog der Photogrammetrie, entsprechende Strahlen schneiden.

Die *Streckenverzerrungen*  $h$ ,  $k$  des Meridian- und Parallelkreislinienelementes, d. h. die Längenverhältnisse der Abbildungen dieser Elemente zu ihren wahren Größen läßt sich aus den Gln. (2) ablesen, wenn man beachtet, daß für den Meridian  $\lambda = \text{const.}$ , d. h.  $d\lambda = 0$ ; und für den Parallel  $\varphi = \text{const.}$ , d. h.  $d\varphi = 0$  ist:

$$h = \frac{1}{\rho} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}; \quad k = \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2} \quad \dots \quad (7)$$

Diese Streckenverzerrungen gelten für beliebige Meridian- und Parallelkreislinienelemente, also auch für die im Meridian und im Parallel gelegenen Radien des Einheitskreises. Nach dem vorhin Gesagten sind also  $h$  und  $k$  die diesen Radien entsprechenden konjugierten Achsen der Indikatrix.

Aus der durch Gl. (4) dargestellten Eigenschaft affiner Transformationen erkennt man ferner, daß die Inhalte aller einer Ellipse umschriebenen Parallelogramme untereinander gleich sind; denn die diesen entsprechenden, dem Kreis umschriebenen Quadrate sind konstant. Damit ist auch ein Satz von A p o l l o n i u s bewiesen, der nach Tissot zur Berechnung der *Winkelverzerrung*  $J$  des rechten Winkel dient, welcher von den Meridian- und Parallelkreislinienelementen gebildet wird. Unter dieser Winkelverzerrung  $J$  versteht er die Änderung des genannten rechten Winkels, sodaß der Winkel zwischen den entsprechenden konjugierten Achsen  $90^\circ \pm J$  ist. Also folgt aus dem Gesagten

$$h k \cos J = a b \quad \dots \quad (8)$$

Eine Gl. zur Berechnung der Halbachsen  $a$ ,  $b$  der Indikatrix erhält man durch Einsetzen des Wertes  $\sigma$  von Gl. (5) in Gl. (6). Als zweite Gleichung

verwendet man bekanntlich einen weiteren Satz von A p o l l o n i u s: Die Summe der Quadrate eines beliebigen Paares konjugierter Halbachsen einer Ellipse sind konstant:

$$h^2 + k^2 = a^2 + b^2 \quad . . . \quad (9)$$

Während A p o l l o n i u s seine Sätze aus planimetrischen Überlegungen auf überaus bewundernswerte Weise erschlossen hat, kann heute die Richtigkeit dieses Satzes bekanntlich leicht mit Hilfe der analytischen Geometrie nachgewiesen werden. Noch einfacher gelingt dieser Beweis mit den affinen Transformationsgleichungen: Wir schneiden den Einheitskreis  $x^2 + y^2 = 1$  mit zwei aufeinander normalen Geraden:  $y = mx$  und  $y = -1/m \cdot x$ . Die Koordinaten der Schnittpunkte der ersten Geraden sind  $x^2 = 1 : (1 + m^2)$  und  $y^2 = m^2 (1 + m^2)$ . Für die Schnittpunkte der zweiten Geraden ist  $y$  mit  $x$  und  $x$  mit  $y$  zu vertauschen. Quadriert man Gl. (3) und setzt man für  $x$  und  $y$  die soeben berechneten Werte ein, so ergibt die Addition der beiden Gln. die Gl. (9). Noch etwas einfacher wird der Beweis, wenn wir um den Mittelpunkt der Indikatrix einen Kreis mit dem Radius  $a$  legen, der somit perspektiv-affin zur Indikatrix ist und sodann wieder von den Schnittpunkten des Kreises mit zwei aufeinander normalen Geraden ausgehen.

Die Extreme der Streckenverzerrungen sind identisch mit den Hauptachsen der Tissot-Indikatrix. Die Winkelverzerrungen sind in den Hauptachsen der Indikatrix = 0; denn diese entsprechen den zugeordneten Durchmessern des Einheitskreises. Die maximale Winkelverzerrung findet man nach Tissot, indem man den Mittelpunkt der Indikatrix mit dem des Einheitskreises zur Deckung bringt und aus der Differenz zweier entsprechender Winkel ihren Maximalwert:  $\sin \omega = (a - b) : (a + b)$  abliest.

#### *Geschichtliche Bemerkung:*

Die oben angewandten Grundbegriffe der affinen Verwandtschaften waren schon E u l e r und M ö b i u s bekannt, auf die auch der Name „affin“ zurückgeht. L a m b e r t stellte 1772 die ersten allgemeinen Untersuchungen über Kartenprojektion an (Ostwalds Klassiker Bd. 54). E u l e r spricht schon in seiner 1777 erschienenen Arbeit: „Drei Abhandlungen über Kartenprojektionen“ (Ostwalds Klassiker Bd. 93) von Elementar-Rechtecken der Kugel, die unendlich kleinen Parallelogrammen der Ebenen entsprechen. Auf S. 7 dieser Arbeit schrieb er die Bedingung dafür, daß in der Karte die Meridiane normal auf den Parallelkreisen stehen, genau nach den C a u c h y - R i e m a n n ' s c h e n Diff.-Gln. an. Seine Gln. für die allgemeine Winkeltreue haben jedoch eine andere Form als letztere Gln. L a g r a n g e (1779) und G a u ß (1822) (Ostwalds Klassiker Bd. 55) lösten die Aufgabe der Abbildung zweier krummer Flächen aufeinander. Letzterer leitete auch die Diff.-Gl. ab, die zur konformen Abbildung zweier beliebiger Flächen führt. T i s s o t ' s Verdienst ist es, die damals für die Kartenentwurfslehre unbeachtet gebliebenen Erkenntnisse in einer einheitlichen praktischen Form dargestellt zu haben, was ihm durch Einführung seiner Indikatrix treffend gelang. (M. A. T i s s o t, Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géo-



graphiques, Paris 1881. — Deutsch von F. H a m m e r: „Die Netzentwürfe geographischer Karten“ 1887). Man vergleiche auch L. D r i e n c o u r t et J. L a b o r d e, Traité des projections des cartes géographiques, 1932.

### 3. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Während in den Lehrbüchern der Mathematik die Ableitung dieser Differentialgleichungen gewöhnlich von einem allgemeineren Standpunkte ausgehend behandelt sind, geschieht dies in der modernen Kartenentwurfslern, indem man nach T i s s o t die Bedingung setzt, daß die Indikatrix ein Kreis wird:  $a = b$ .

Ohne Verwendung der T i s s o t -Indikatrix wird in den folgenden Zeilen ein anderer naheliegender Weg beschrillen: in Fig. 2 ist ein von  $P$  ausgehendes, in der Tangentialebene von  $P$  gelegenes, im übrigen beliebiges Strahlenbüschel 1, 2, 3 ...  $i$  dargestellt, dessen Kartenbild 1', 2', 3', ...  $i'$  (Fig. 3) ist.  $A_i$  und  $A_i'$  sind die einander entsprechenden Azimute des  $i$ -ten Strahles. Die notwendige und hinreichende Bedingung der Konformität kann ausgedrückt werden durch:

$$A_i' - A_i = \gamma \text{ oder } A_i' = A_i + \gamma \quad \dots \quad (10)$$

wobei  $\gamma$  ein für alle Strahlen konstanter Winkel ist. Daraus folgt

$$\tan A_i' = \frac{\tan A_i + \tan \gamma}{1 - \tan A_i \tan \gamma} \quad \dots \quad (11)$$

ferner ist:  $\tan A_i' = \frac{dy}{dx}$  und nach Gl. (2)  $\tan A_i' = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda}$  . . . (12)

aus den Gln. (12) und (11) folgt, wenn man beachtet, daß  $\tan A_i = r d\lambda : \rho d\varphi$  und  $\tan \gamma = \sin \gamma : \cos \gamma$ :

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda} = \frac{r d\lambda}{\rho d\varphi} + \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{r \cos \gamma d\lambda + \rho \sin \gamma d\varphi}{\rho \cos \gamma d\varphi - r \sin \gamma d\lambda} \quad \dots \quad (13)$$

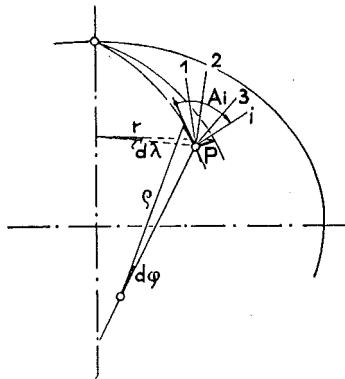


Fig. 2

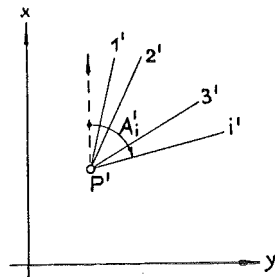


Fig. 3

Wir lassen den in der Mitte stehenden Ausdruck unbeachtet und erkennen, daß diese Gl. für beliebige  $d\lambda$  und  $d\varphi$  nur bestehen kann, wenn:

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cdot \cos \gamma, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \rho \sin \gamma, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \varphi \cos \gamma, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = -r \sin \gamma$$

setzt man die  $\cos \gamma$  und  $\sin \gamma$  einander gleich, so ergeben sich die Cauchy-Riemann'schen Diff.-Gln.:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad \dots \quad (14)$$

Zur Elimination der Radien  $\rho$  und  $r$  definiert man bekanntlich die isometrische Breite  $\beta$  nach der Beziehung

$$\rho d\varphi = r d\beta \quad \text{bzw.} \quad \beta = \int_0^\varphi \frac{\rho}{r} d\varphi \quad \dots \quad (15)$$

diese ist, wie schon in dem genannten Werk *Tissot's* erklärt ist und unmittelbar aus der Anschauung folgt, gleich dem Längenunterschied der Schnittpunkte einer  $45^\circ$ -Loxodrome mit dem Parallel von der Breite  $\varphi$  und dem Äquator.

Abschließend sei noch an das im ersten Absatz Gesagte erinnert, wonach der Inhalt vorliegender Schrift ein Versuch sein soll, einige bekannte Beziehungen der Kartenentwurfslehre auf einfachste und anschauliche Art zu beweisen. Ein kleiner Auszug aus der Literatur erwies sich dabei als Richter über die Priorität menschlicher Erkenntnisse.

## Referate

### Ausgleichung ohne Aufstellung der Gauß'schen Normalgleichungen von Prof. E. Stiefel\*)

Der Autor behandelt in dieser Arbeit eingehend ein Verfahren zur Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen ohne Aufstellung der Gauß'schen Normalgleichungen.

Dieses Verfahren läßt sich auf die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen übertragen (der einfachen Schreibweise halber, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, wird das Verfahren für drei Unbekannte betrachtet).

1. Das Verfahren liefert bei  $m$  Unbekannten nach  $m$  Schritten, d. h. bei  $m$  maliger Anwendung, die Unbekannten.

2. Bei jedem der  $m$  Schritte wird die Fehlerquadratsumme vermindert, bis sie nach dem  $m$  ten Schritt ihr Minimum erreicht. (Also der Algorithmus kann nach weniger als  $m$  Schritten abgebrochen werden, wenn eine vorgegebene Genauigkeitsstufe erreicht ist.)

3. Das Verfahren beginnt mit Näherungswerten  $x_0, y_0 \dots$ . Sind  $x_j, y_j \dots$  die Näherungswerte für  $x, y \dots$  nach dem  $j$  ten Schritt, so nimmt, geometrisch gesprochen,

---

\*) Erschienen in der Wissenschaftlichen Zeitschrift der Technischen Hochschule Dresden, 1953; S. 441—442.