Paper-ID: VGI_195801

Das moderne Problem der Erdfigur

Karl Ledersteger [1]

[1] *Technische Hochschule Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **46** (1, 2), S. 1–7, 33–38

1958

BibTEX:

```
@ARTICLE{Ledersteger_VGI_195801,
Title = {Das moderne Problem der Erdfigur},
Author = {Ledersteger, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {1--7, 33--38},
Number = {1, 2},
Year = {1958},
Volume = {46}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN
Offizielles Organ
des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie
REDAKTION:
emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. Lego und o. Prof. Hofrat Dr. phil. K. Ledersteger

Nr. 1 Baden bei Wien, Ende Februar 1958 XLVI. Jg.

Das moderne Problem der Erdfigur

Von K. Ledersteger, Wien*)

(Veröffentlichung der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung)

Das Problem einer streng einheitlichen Bezugsfläche sowohl für die kontinentalen Dreiecksnetze wie auch für das irdische Schwerefeld ist nicht allein durch die moderne Großraumvermessung in den Vordergrund des geodätischen Interesses gerückt worden. Seine Lösung ist auch die unbedingte und wichtigste Voraussetzung für das vor wenigen Jahren proklamierte geodätische Weltsystem Heiskanens. Streng physikalisch gesehen lassen sich aber die beiden großen Teilaufgaben des gesamten Problems der Erdfigur, nämlich die Bestimmung des sogenannten mittleren Erdellipsoides, das sich von selbst als idealste Bezugsfläche darbietet, und die Bestimmung der Geoidundulationen, d. h. der vertikalen Abstände der mathematischen Erdfigur vom Erdellipsoid, nur in wechselseitiger Durchdringung möglichst hypothesenfrei lösen. Damit soll gesagt sein, daß die Bestimmung der Undulationen der mathematischen Erdfigur oder des Geoides nicht unbedingt die Kenntnis des mittleren Erdellipsoides zur Voraussetzung hat. Vielmehr führt das Bestreben, die derzeit noch herrschenden Hypothesen zu vermeiden, weil sie einer Kritik nicht standhalten können, zu dem auf den ersten Blick sicher paradox anmutenden Ergebnis, daß man die Undulationen des Geoides bereits kennen muß, ehe man die Dimensionen des mittleren Erdellipsoides bestimmen kann.

Dieses Konzept zwingt aber zu einer Beschränkung auf die ganz großen Linien und wir können daher auch die historische Entwicklung nur kurz streifen. Das 18. Jahrhundert hat, fußend auf den theoretischen Arbeiten von Newton, Huygens und Clairaut, das abgeplattete Rotationsellipsoid nach der Kugel als zweite geometrische Näherung für die Erdfigur erkannt und diese Erkenntnis durch die gran-

*) Antrittsvorlesung, gehalten am 22. November 1957 an der Technischen Hochschule Wien.

diosen Gradmessungen empirisch bestätigen können. Mit der Entwicklung der Potentialtheorie gelangte man dann zum Begriff der Niveauflächen, unter denen nach Gauß die in ungefährer Höhe der Oberflächen der Weltmeere verlaufende Niveaufläche ausgezeichnet wird, der Listing den Namen „Geoid" gab.

Damit aber liegt es bereits nahe, von dem als Rotationsellipsoid vorausgesetzten mittleren Erdellipsoid zweierlei zu fordern, nämlich:

1. eine eindeutige Lage, derart, daß seine Figurenachse mit der Rotationsachse der Erde und sein Figurenmittelpunkt mit dem Erdschwerpunkt zusammenfällt, und

2. Volumgleichheit mit dem Geoid, d. h. daß die Undulationen des Geoides in ihrer Summe über die ganze Erde verschwinden.

Diese beiden Bedingungen genügen aber nicht zur eindeutigen Bestimmung des Erdellipsoides. Denn es gibt zu jeder vorgegebenen Abplattung ein anderes Rotationsellipsoid, das die genannten Bedingungen erfüllt. Man muß demnach die Definition des Erdellipsoides entweder physikalisch ergänzen, indem man eine gravimetrische Bestimmung der Abplattung, d. h. deren Ableitung aus dem Schwerefeld der Erde verlangt, oder man muß sie rein geometrisch dadurch verschärfen, daß man die Quadratsumme der Geoidhöhen der Minimumbedingung unterwirft, wodurch das Erdellipsoid zum bestanschließenden Rotationsellipsoid für das gesamte Geoid wird.

Wir wollen zunächst den älteren, geometrischen Weg einer gedrängten Betrachtung und Kritik unterziehen. Versteht man allgemein unter einem bestanschließenden Ellipsoid eine ellipsoidische Approximation des Geoidausschnittes im Vermessungsgebiet, so ist die geometrische Definition des Erdellipsoides schon insoferne bedenklich, als rund drei Viertel der Erde mit Wasser bedeckt sind. Weil man aber eine Rotationsfigur sucht, glaubte man, es genüge, wenn die geodätischen Operationen, gewöhnlich die Breitengradmessungen, unabhängig von der geographischen Länge nur möglichst gut über alle Breiten ausgedehnt sind. Man glaubte also, durch Kombination vieler, unter den verschiedensten Breiten vorgenommenen Gradmessungen das Erdellipsoid hinreichend exakt gewinnen zu können. Eine einfache potentialtheoretische Betrachtung lehrt aber, daß das Geoid unter den Kontinenten nach außen ausweichen muß, dort also stärker gekrümmt ist als über den Weltmeeren. Diese stärkere kontinentale Geoidkrümmung wirkt sich in mittleren Breiten in einer Verkürzung der Äquatorachse des bestanschließenden Ellipsoides aus, in niederen und hohen Breiten jedoch in einer Vergrößerung, bzw. Verkleinerung der Abplattung. Als Beispiel seien die beiden Gradmessungsellipsoide von Bessel und Clarke angeführt:

$$\begin{array}{lll} \text{Bessel, 1841}: & a = 6\,377\,397 \text{ m}, & \mathfrak{a} = 1 : 299{,}15 \\ \text{Clarke, 1880}: & \ 6\,378\,249 \text{ m}, & \mathfrak{a} = 1 : 293{,}5\ . \end{array}$$

Ersteres beruht vorwiegend auf Messungen in mittleren Breiten und zeigt daher die systematische Achsenverkürzung: die Achse ist um rund 900 m zu klein. Beim Clarkeschen Ellipsoid wurden hingegen die indischen Gradmessungen, damals die einzigen Gradmessungen in niederen Breiten, verstärkt herangezogen. Die Folge ist, daß sich die Achse annähernd richtig, dafür aber die Abplattung zu groß ergab. So finden diese vielfach diskutierten und mißdeuteten Ergebnisse ihre einfache Erklärung.

Sehen wir von diesen Schwierigkeiten ab, so ist die praktische Bestimmung des Erdellipsoides mittels einer Differentialmethode auf Grund der früheren geometrischen Definition an die Voraussetzung gebunden, daß die relativen Geoidhöhen, d. h. die Vertikalabstände des Geoides von einem Referenzellipsoid, dessen Parameter Achse und Abplattung innerhalb gewisser Grenzen frei wählbar sind und dessen Figurenachse der Rotationsachse der Erde parallel liegt, bekannt sind. Dann können mittels der Minimumforderung für die restlichen Geoidhöhen die Verbesserungen der Ellipsoidparameter gleichzeitig mit den drei Parametern einer Parallelverschiebung des Ellipsoides im Erdkörper abgeleitet werden. Aber selbst wenn die geodätischen Operationen über die ganze Erdoberfläche ausgedehnt werden könnten und obwohl der Volumschwerpunkt des Geoides fast völlig mit dem Erdschwerpunkt zusammenfällt, dürften wir wegen der asymmetrischen Verteilung von Land und Wasser dennoch nicht erwarten, daß sich das bestanschließende Ellipsoid in eindeutiger Lage ergibt, weil das eingeführte Minimumprinzip unmöglich die Schwerpunktslage des tatsächlichen Erdkörpers zu liefern vermag.

Außerdem wären die relativen Geoidhöhen, die als Ausgangswerte zu dienen hätten, nur sehr schwer zu gewinnen. An ihrer Stelle traten daher bisher immer die relativen Lotabweichungen, die aus dem Unterschied der physischen Lotrichtung in einem Oberflächen- oder besser in einem Geoidpunkt und der Richtung der Normalen im korrespondierenden Bildpunkt auf einem Bezugsellipsoid definiert sind, von dem wir nur wissen, daß es sich in einer achsenparallelen Lage befindet. Diese Lotabweichungen sind relativ hinsichtlich der Gestalt des Ellipsoides (Achse und Abplattung), hinsichtlich seiner Lage zum Geoid, d. h. abhängig von den beiden Lotabweichungskomponenten ξ_0 und η_0 im Fundamentalpunkt eines Dreiecksnetzes und der zugehörigen Geoidhöhe z_0, und schließlich hinsichtlich des Korrespondenzgesetzes zwischen Urbild und Abbild. Ohne näher auf die verschiedenen Möglichkeiten der Zuordnung einzugehen, sei sofort der Idealfall der Pizzettischen Projektion der Geoidpunkte angenommen. Bei dieser Projektion handelt es sich um eine Doppelprojektion: die Oberflächenpunkte werden zuerst mittels ihrer gekrümmten Lotlinie auf das Geoid übertragen, was praktisch durch eine Lotkrümmungsreduktion aller astronomischen und geodätischen Messungen zu erfolgen hat. Das Problem der Lotkrümmungsreduktionen kann natürlich nicht völlig hypothesenfrei gelöst werden, so wie alle Probleme, die ein Eindringen in die Erdkruste erfordern. Eine theoretische Betrachtung lehrt, daß hiezu die horizontalen Gradienten der Durchschnittswerte der wahren Schwere entlang der Lotlinien bestimmt werden müssen. Den empirischen Beweis, daß diese Werte mit ausreichender Sicherheit aus Gravimetermessungen an der Erdoberfläche abgeleitet werden können, glaube ich bereits in Händen zu haben. Der zweite Schritt der Pizzetti-Projektion, die Projektion der Geoidpunkte mittels der Ellipsoidnormalen auf das Bezugsellipsoid, erfolgt dann durch die sogenannte astronomisch-geodätische Netzausgleichung, deren wichtigste Bedingung die Laplacesche Gleichung ist, die allein die Projektion zu garantieren vermag. Wegen der genannten fünf freien Parameter der Gestalt und Lage des Bezugsellipsoides gibt es eine fünffach unendliche Schar von Pizzetti-Projektionen, unter denen wir die Projektion auf das eindeutig gelagerte mittlere Erdellipsoid als das natürlichste Abbild der Punktfiguration auf dem Geoid hervorheben können. Wir bezeichnen es zweckentsprechend als das „naturtreue Netz“. Die Unterschiede zwischen den Lotrichtungen in den Geoidpunkten und den Normalen zum eindeutig gelagerten Erdellipsoid definieren dann die absoluten Lotabweichungen und die zugehörigen mit gleichem Recht als absolut zu bezeichnenden Geoidhöhen sind die „Geoidundulationen“. Gelingt es, das Problem des naturtreuen Netzes, das wir als das Zentralproblem der astronomischen Geodäsie bezeichnen dürfen, für verschiedene, durch ein Weltmeer getrennte kontinentale Netze zu lösen, so ist damit gleichzeitig das Problem der geodätischen Verbindung getrennter Kontinente vermöge der absoluten Lotabweichungen gelöst.

Das Minimumprinzip für die restlichen Lotabweichungen, das der Lotabweichungsausgleichung zugrundeliegt, vermag aber ebensowenig wie die damit nahe verwandte Gradmessungsmethode das mittlere Erdellipsoid und die absolute Lage der Netze zu liefern. Wir erhalten statt dessen die sogenannte Minimallage auf dem bestanschließenden Ellipsoid. Wir wissen bereits, daß auch für einen ganzen Kontinent das bestanschließende Ellipsoid noch lange nicht mit dem Erdellipsoid identisch ist; ebensowenig ist die Minimallage des Netzes mit der absoluten Lage identisch. Denn die Geoidundulationen verlaufen in großen kontinentalen Wellen, so daß auch für einen Kontinent die mittlere Neigung des Geoides gegenüber dem Erdellipsoid von Null verschieden ist. In der Minimallage wird aber die mittlere Lotabweichung automatisch getilgt.

Wir sehen somit, daß die rein geometrische Auffassung auch das erste Teilproblem der Erdfigur nicht zu lösen vermag und daher das mittlere Erdellipsoid mit physikalischer Methode auf Grund einer physikalischen Definition bestimmt werden muß. Hiefür kann sofort ein weiteres Argument geltend gemacht werden. Das Geoid ist keine analytische Fläche. Deshalb wird seiner Beschreibung das Rotationsellipsoid als die geeignetste analytische Bezugsfläche zugrundegelegt und die Aufgabe besteht darin, die entsprechenden relativen Elemente durch Wahl des eindeutig gelagerten mittleren Erdellipsoides in absolute Größen zu verwandeln. Was aber für die Lotabweichungen und die Geoidhöhen gilt, muß in gleicher Weise für die Schwerewerte gelten. Die beobachteten Schwerewerte müssen auf das Geoid reduziert werden und mit den „theoretischen“ oder „normalen“ Werten verglichen werden, die für das Erdellipsoid gelten. Einheitliche Bezugsfläche sowohl für die Triangulierungen wie auch für das irdische Schwerefeld kann somit nur das physikalisch definierte mittlere Erdellipsoid sein.

Wir bezeichnen zunächst das mittlere Erdellipsoid als Repräsentanten der Normalfigur der Erde oder der Figur des vollkommenen hydrostatischen Gleichgewichtes, die wir kurz das „Normalsphäroid“ nennen wollen. Das Normalsphäroid muß a priori eine Rotationsfigur sein. Ein dreiachsiges Ellipsoid könnte daher höchstens als bestanschließendes Ellipsoid für das gesamte Geoid in Frage kommen. Als Erdellipsoid wäre es aber auch praktisch wegen seiner wesentlich komplizierteren Geometrie abzulehnen. Die Erdkruste befindet sich nun sicher nicht im hydrostatischen Gleichgewicht; sie weist sichtbare Massenunregelmäßigkeiten, wie einerseits die Kontinente mit ihren Gebirgen und andererseits die Weltmeere, aber auch unsichtbare Massenunregelmäßigkeiten auf. Nur durch bestimmte Massenverschiebungen könnte der Gleichgewichtszustand hergestellt oder, wie man sagt, die Erdmasse

„regularisiert“ werden. Jede gedachte Massenverschiebung ändert aber im allgemeinen die Kräftefunktion der Erde; an Stelle des tatsächlichen Geoides tritt ein „künstliches Geoid“ desselben Potentialwertes und wir wollen von vornherein nur solche Massenverschiebungen zulassen, deren künstliche Geoide die ganze in ihrer Anordnung abgeänderte Erdmasse umschließen, die also äußere Niveauflächen der neuen Massenanordnung sind. Würden wir das „Regularisierungsgesetz“ kennen, so würden wir durch die nach diesem Gesetz vorgeschriebenen Massenverschiebungen als künstliches Geoid das Normalsphäroid erhalten, das die freie Oberfläche der regularisierten Erdmasse darstellt. Da aber das Regularisierungsgesetz unbekannt ist, stehen zur Lösung des Problems der Erdfigur eigentlich nur zwei Wege offen: entweder man ersetzt das unbekannte Regularisierungsgesetz durch eine hypothetische Annahme oder man umgeht es bereits in der Definition des Erdellipsoides. Derzeit herrschend ist noch die Hypothese der Isostasie. Um aber die Schwächen dieses Lösungsversuches aufzudecken, müssen wir eine vom Regularisierungsgesetz unabhängige und dennoch physikalisch brauchbare Definition des Normalsphäroides der Erde formulieren.

Entwickelt man das Außenraumpotential der nach den vorgenannten Gesichtspunkten irgendwie umgruppierten Erdmasse in üblicher Weise nach Kugelfunktionen und faßt die von der geographischen Länge unabhängigen Glieder bis zur 4. O. zusammen, so erhält man ein Helmertsches Rotationsniveausphäroid U_4 und eine von den noch vorhandenen Massenunregelmäßigkeiten abhängige Restfunktion T, sodaß also für das zugehörige künstliche Geoid gilt: $(U_4 + T) = W_0$, unter W_0 den Potentialwert des tatsächlichen Geoides verstanden. Dann läßt sich zeigen, daß bei vorausgesetzt unveränderter Erdmasse und Rotationsgeschwindigkeit jedes Niveausphäroid

$$\left.\begin{aligned} U_4 &= \frac{k^2 E}{l}\left[1 + \frac{K}{2l^2}(1 - 3\sin^2\varphi') + \frac{\omega^2 l^3}{2k^2 E}\cos^2\varphi' + \right. \\ &\left. \qquad + \frac{D}{l^4}\left(\sin^4\varphi' - \frac{6}{7}\sin^2\varphi' + \frac{3}{35}\right)\right] \\ \text{mit} \quad K &= \frac{1}{E}\left(C - \frac{A+B}{2}\right) \quad ; \qquad \delta = \frac{D}{a^4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

durch die drei Parameter Achse, Abplattung und δ bestimmt ist, welch letzterer aus dem Koeffizienten der zonalen Kugelfunktion 4. O. hervorgeht und die maximale Abweichung des Niveausphäroides vom achsengleichen Rotationsellipsoid charakterisiert. Überdies ist die auf dem Niveausphäroid gültige theoretische Schwereverteilung

$$\gamma = \gamma_0\left(1 + \beta\sin^2\varphi - \frac{\beta_4}{4}\sin^2 2\varphi\right) \quad \ldots \quad (2)$$

durch dieselben drei Parameter bestimmt, d. h. γ_0, β und β_4 sind gleichfalls in Funktion von a, $\mathfrak{a}$ und δ darstellbar.

Um bei dieser Sachlage zu einer eindeutigen Definition des Normalsphäroides zu gelangen, fordern wir:

1. $T = 0$, d. h. das Normalsphäroid soll zu jenen künstlichen Geoiden gehören, die mit ihren eigenen Niveausphäroiden zusammenfallen, wie dies Hofrat Hopfner

so treffend formuliert hat. Diese Forderung ist selbstverständlich, weil das Normalsphäroid a priori keine Massenunregelmäßigkeiten aufweisen darf.

2. $\mathfrak{d} = + 105.10^{-7}$. Für diesen Wert fällt das Niveausphäroid mit seinem achsengleichen Rotationsellipsoid bis auf Größen 6. O. — $a\,\mathfrak{a}^3 \sim 0{,}2$ m — zusammen und darf daher als „Niveauellipsoid" bezeichnet werden. Wenn diese Annahme schon an sich recht plausibel ist, so läßt sie sich auch dadurch rechtfertigen, daß die unter verschiedenen hypothetischen Annahmen über die Dichteverteilung im Erdinnern abgeleiteten Normalfiguren Abweichungen vom Ellipsoid zeigen, die in $\mathfrak{d}$ umgerechnet auf Werte zwischen $+ 123$ und $+ 132.10^{-7}$ führen. Für das mittlere $\mathfrak{d} = 128.10^{-7}$ ist aber der Radiusvektor des Niveausphäroides maximal nur um 3,7 m kürzer als der Radiusvektor des Ellipsoides. Die bisherigen beiden Forderungen lassen sich kurz dahin zusammenfassen, daß das Normalsphäroid ein Niveauellipsoid ist.

3. Das mit dem Normalsphäroid fast völlig zusammenfallende Rotationsellipsoid werde als mittleres Erdellipsoid bezeichnet. Es soll mit dem tatsächlichen Geoid volumgleich sein, d. h. die Undulationen des aktuellen Geoides sollen in ihrer Summe verschwinden. Wie schon eingangs betont, ist damit das Erdellipsoid nicht bestanschließendes Ellipsoid im geometrischen Sinne. Vielmehr wird sich klar erweisen, daß das Kernproblem in einer gravimetrischen Bestimmung der Abplattung liegt, die auf Grund unserer Definition völlig unabhängig vom unbekannten Regularisierungsgesetz für die Erdmasse möglich ist.

Bevor wir das Problem der Erdfigur weiter verfolgen, muß noch die Anwendung der gewöhnlichen Kugelfunktionsentwicklung gerechtfertigt werden. Die ellipsoidische Gestalt der Erde legt es nämlich nahe, der Entwicklung des Potentiales rotationssymmetrische Ellipsoidkoordinaten zugrundezulegen. Diese Entwicklung, die übrigens wegen des Auftretens der Kugelfunktionen 2. Art wesentlich komplizierter ist, führt natürlich auf andere Näherungsfiguren. In der Theorie wird hier vorausgesetzt, daß das mittlere Erdellipsoid der Schar der Koordinatenellipsoide angehört; es müßte also die lineare Exzentrizität der konfokalen Koordinatenellipsoide entsprechend gewählt werden können, was allerdings die Kenntnis der Parameter des Erdellipsoides bereits voraussetzt. In diesem Falle verschwinden selbstverständlich alle Konvergenzbedenken. Zeigt man dann mit K. Jung, daß die in Ellipsoidkoordinaten und in Kugelkoordinaten definierten Niveausphäroide 4. Ranges bis auf Größen 6. O. überstimmen, so ist die Anwendbarkeit der Kugelkoordinaten und des Helmertschen Niveausphäroides bis an die Erdoberfläche, d. h. für den Potentialwert des tatsächlichen Geoides, erwiesen.

Die Theorie des Niveauellipsoides wurde zuerst im Jahre 1929 von Carlo Somigliana im Anschluß an Pizzetti als spezielle Lösung des Stokes'schen Problems entwickelt. Er zeigt, daß für jeden Körper, dessen freie Oberfläche eine Niveaufläche ist, bei vorausgesetzter Gesamtmasse und Rotationsgeschwindigkeit das Schwerefeld dargestellt werden kann aus der Anziehung der als homogen aufgefaßten Masse und einer über die freie Oberfläche verteilten Flächenbelegung, die den Effekt der Inhomogenität zum Ausdruck bringt und die teils positive, teils negative Werte annimmt, in ihrer Summe jedoch verschwindet. Dazu tritt selbstverständlich noch die Zentrifugalkraft. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß unsere Forderung

$\delta = +105.10^{-7}$, deren Folgerungen wieder bis auf Größen 6. O. mit den Ergebnissen Somiglianas übereinstimmen, wesentlich bequemer und natürlicher ist als dessen fiktive, mit äquivalenten Flächenbelegungen operierende Theorie.

Die Lösung des zweiten Teilproblems der Erdfigur, des Undulationsproblems, beruht auf den Schwerestörungen. Man erhält sie, wenn allgemein auf einem künstlichen Geoid die Schwereverteilung gegeben ist und diese mit der theoretischen oder normalen Schwereverteilung auf dem zugehörigen Niveausphäroid verglichen werden kann. Man erkennt sofort, daß es sich um eine zweite Randwertaufgabe handelt. Während aber bei der zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie die normalen Ableitungen des Potentials auf einer die ganze Masse umschließenden *bekannten* Fläche gegeben sind und hieraus das Außenraumpotential zu bestimmen ist, ist bei der Randwertaufgabe der physikalischen Geodäsie der Fläche, auf der die Schwerewerte vorliegen, eine Niveaufläche unbekannter Gestalt und die Aufgabe besteht darin, aus den Schwerestörungen die Abweichungen der Niveaufläche, also des künstlichen Geoides, von seinem Niveausphäroid zu bestimmen. Durch Aufsummieren der entsprechenden Reihe erhält man das Stokes'sche Integral in der Helmert-schen Form:

$$N = \frac{R}{G} + \int_0^{\pi} \Delta g_{\psi}\, F(\psi)\, d\psi, \qquad \ldots \quad (3)$$

in welchem N die Erhebung des künstlichen Geoides über sein Niveausphäroid in einer Station und $\triangle g_{\psi}$ den Mittelwert der Schwerestörung in einem Kreis vom sphärischen Radius ψ um die Station darstellt. $F(\psi)$ ist die mit $(\sin\psi)/2$ multiplizierte Stokes'sche Funktion S:

$$S = \operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} + 1 - 6\sin\frac{\psi}{2} = 5\cos\psi - 3\cos\psi \,.\, ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right), \qquad \ldots \quad (4)$$

während R den Radius der mittleren Erdkugel und G die Schwere auf ihr bedeutet. Denn das Stokes'sche Integral gilt streng genommen für die Kugel als Bezugsfläche. Kürzlich hat Sagrebin das Stokes'sche Problem für das Ellipsoid gelöst und gefunden, daß der Fehler des Stokes'schen Integrales etwa 1,3% beträgt. Wichtig ist noch die Bemerkung, daß es sich bei den in das Stokes'sche Integral einzuführenden Schwerestörungen um die sogenannten „scheinbaren" Schwerestörungen handelt, die aus dem Vergleich der Schwerewerte in den Punkten P des Geoides mit den theoretischen Schwerewerten in den korrespondierenden Punkten Q des Niveausphäroides hervorgeht. Vergleicht man jedoch die beiden im selben Punkt P geltenden Schwerewerte miteinander, so resultiert die wahre Schwerestörung, die sich von der scheinbaren Schwereanomalie um den Term von Bruns unterscheidet:

$$(g_P - \gamma_P) = (g_P - \gamma_Q) - \left(\frac{\partial\gamma}{\partial n}\right)_Q N. \qquad \ldots \quad (5)$$

Die grundsätzliche Bedeutung dieser Unterscheidung für unser Problem hat Hopfner wiederholt betont; von ihm stammt auch die Nomenklatur.

(Schluß folgt)

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN
Offizielles Organ
des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie
REDAKTION:
emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. Lego und o. Prof. Hofrat Dr. phil. K. Ledersteger

Nr. 2 Baden bei Wien, Ende April 1958 XLVI. Jg.

Das moderne Problem der Erdfigur

Von K. Ledersteger, Wien*)

(Veröffentlichung der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung)

(Schluß)

Voraussetzung für die Lösung des spezifischen Randwertproblems der physikalischen Geodäsie ist also, daß die Schwereverteilung auf einer die ganze Erdmasse einschließenden Niveaufläche, eben dem künstlichen Geoid, gegeben sein muß. Die an der Oberfläche der tatsächlichen Erde beobachteten Schwerewerte müssen zunächst irgendwie so auf das Geoid reduziert werden, daß die über das Geoid herausragenden Kontinentalmassen nach einer hypothetischen Annahme in das Innere des Geoides verschoben werden. Als erstes kommt für unser Problem die Freiluftreduktion in Frage:

$$g_F = g_P + 0{,}3086\ h_m\ mgal, \qquad \ldots \quad (6)$$

bei der die in P beobachtete Schwere „wie in freier Luft", d. h. lediglich wegen der Seehöhe h mit dem Freiluftgradienten 0,3086 $mgal/m$ aufs Geoid reduziert wird. Da dabei die Wirkung der Massenunregelmäßigkeiten auf P nicht weggerechnet wird, kann man die Reduktion auch so deuten, daß die Massenunregelmäßigkeiten, unverändert in ihrer gegenseitigen Lage, mit in die Tiefe genommen werden. Bei der Kondensationsreduktion:

$$g_K = g_P - \Delta g_{top} + \Delta g_{kond} + 0{,}3086\ h_m \qquad \ldots \quad (7)$$

wird zuerst die Wirkung der über dem Geoid liegenden Massen auf P in Abzug gebracht, sodann die Wirkung derselben, als Flächenbelegung auf das Geoid kondensierten Massen addiert und schließlich der Punkt mittels der Freiluftreduktion aufs Geoid gesenkt. Handelt es sich um ebenes Gelände, d. h. um eine ebene Bouguer'sche Platte, dann sind die beiden ersten Korrektionen einander gleich und die Konden-

*) Antrittsvorlesung, gehalten am 22. November 1957 an der Technischen Hochschule Wien.

sationsreduktion identisch mit der gewöhnlichen Freiluftreduktion. Eine dritte massenverschiebende Reduktion beruht auf der Lehre vom Massenausgleich oder der Theorie der Isostasie. Wir können leider aus Zeitmangel auf diese für die Struktur der Erdkruste so eminent wichtige Lehre nicht näher eingehen. Sie besagt, daß alle sichtbaren Massenunregelmäßigkeiten, d. h. sowohl die Massenüberschüsse der Kontinente als auch die Massendefizite der Meere unterirdisch weitgehend kompensiert sind, derart, daß es entweder nach Pratt in etwa 120 km Tiefe eine Ausgleichsfläche des Druckes gibt oder die leichteren Sial-Schollen nach Airy in das schwerere Sima eintauchen und sich im Schwimmgleichgewicht befinden, also das Gewicht der Scholle dem Auftrieb gleich ist. Die Lotabweichungen und die gravimetrischen Messungen lehren unzweifelhaft, daß die Isostasie im großen gesehen zurecht besteht, daß es aber auch beträchtliche Abweichungen gibt. Tatsächlich müssen sich die Schollen kontinentalen Ausmaßes als Ganzes gesehen wegen der elastischen und viskosen Eigenschaften des Erdkrustenmateriales im Schwimmgleichgewicht befinden, während z. B. kleinere Erhebungen nicht kompensiert sind, weil die Festigkeit der Scholle oder die Tragfähigkeit der Kruste ausreicht, das isostatische Sinken zu verhindern. Die isostatische Schwerereduktion:

$$g_I = g_P - \Delta g_{top} + \Delta g_{komp} + 0{,}3086\ h \quad . \ . \ . \quad (8)$$

besteht nun darin, daß z. B. wieder die Wirkung der über das Geoid heraus ragenden Kontinentalmassen abgezogen wird, dann aber diese Massen zur Auffüllung des unterirdischen Massendefektes bis zur Ausgleichsfläche verwendet werden und ihre Anziehung auf die Station berechnet wird. Zum Schluß wird wieder der Punkt ins Meeresniveau gesenkt. Im Zusammenhang mit der Frage der Größenordnung der Undulationen wurde das Problem der Isostasie in den Dreißigerjahren von Hopfner in der methodisch überspitzten Alternative: Große Undulationen — keine Isostasie oder kleine Undulationen und Isostasie zur Diskussion gestellt, wobei auch der Term von Bruns und seine Auswirkungen eine Klärung fand. Es gibt noch eine vierte Reduktionsweise, die für unser Problem der Erdfigur in Frage kommt. Es ist dies die Inversionsmethode von Rudzki, bei der die über das Geoid herausragenden Massen so in das Innere gespiegelt werden, daß in den Geoidpunkten das Potential erhalten bleibt. Bei dieser Methode fällt also das künstliche Geoid völlig mit dem aktuellen Geoid zusammen, weshalb diese Methode besonders von Hopfner empfohlen wurde. Man müßte dabei allerdings eine kleine Verringerung der Erdmasse in Kauf nehmen.

Nunmehr sind wir in der Lage, die derzeit herrschende Methode zur Bestimmung der Erdfigur kritisch zu betrachten und zu versuchen, einen korrekteren, möglichst hypothesenfreien Weg zu beschreiten. Gegenwärtig wird das unbekannte Regularisierungsgesetz durch die Hypothese der Isostasie ersetzt und bestimmt man die Undulationen des Geoides bezüglich des Internationalen Ellipsoides

$$a = 6\,378\,388 \text{ m}; \quad \mathfrak{a} = 1:297{,}0. \quad . \ . \ . \quad (9)$$

Dieses Ellipsoid wurde im Jahre 1910 von Hayford auf Grund von isostatisch reduzierten Lotabweichungen berechnet; es wird als das Niveauellipsoid angesehen, auf dem die durch die Internationale Schwereformel:

$$\gamma = 978{,}049\ (1 + 0{,}0052\,884\ \sin^2\varphi - 0{,}000\,0059\ \sin^2 2\varphi) \quad . \ . \ . \quad (10)$$

gegebene Schwereverteilung gelten soll. Die mit den isostatischen Schwerereduktionen verbundenen hypothetischen Massenverschiebungen bewirken einen schwer zu berechnenden indirekten Effekt, worunter man die aus ihnen folgende Verlagerung der Niveauflächen und des Erdschwerpunktes versteht. Aus diesen Potentialdifferenzen wird mittels der fundamentalen Formel $dW = -g.dh$ der Höhenunterschied zwischen dem aktuellen Geoid und dem künstlichen Geoid der Isostasie, dem sogenannten kompensierten Geoid oder „Cogeoid" berechnet, welcher nachträglich an die aus dem Stokes'schen Integral hervorgehenden Höhen N anzubringen ist, um die Höhen des aktuellen Geoides über dem Internationalen Ellipsoid zu erhalten. Auf diese Weise wurden von L. Tanni 1948 die kontinentalen Undulationen des aktuellen Geoides für 218 Eckpunkte eines 5^0-Netzes berechnet, nachdem bereits 1934 R. A. Hirvonen eine ähnliche Berechnung, allerdings mit wesentlich geringerem Beobachtungsmaterial und unter Verwendung der Freiluftreduktion durchgeführt hatte. Beides sind finnische Arbeiten, wie überhaupt Finnland einen sehr erheblichen Anteil an den Fortschritten der modernen Geodäsie hat. Übrigens hat Prof. Heiskanen der 11. Generalversammlung der UGGI in Toronto, September 1957, vorläufige Resultate der jüngsten Geoidberechnung im Mapping and Charting Research Laboratory der Ohio State University vorgelegt. Definitive Resultate des „Columbus Geoid" dürften in zwei Jahren vorliegen.

Zu diesem Verfahren können wir wie folgt kritisch Stellung nehmen:

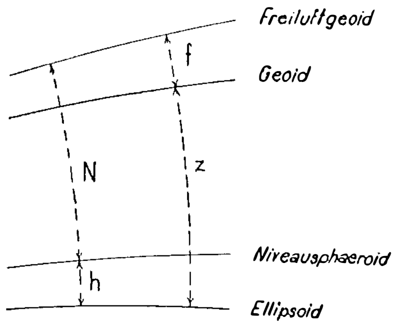
1. Würde tatsächlich die Isostasie das unbekannte Regularisierungsgesetz erfüllen, so wäre das Cogeoid das Normalsphäroid und müßte daher mit seinem eigenen Niveausphäroid zusammenfallen. Es dürfte also keine isostatischen Schwerestörungen geben und das Stokes'sche Integral wäre gänzlich überflüssig.

2. Das Internationale Ellipsoid ist höchstens das mit dem Niveausphäroid des Cogeoides achsengleiche Ellipsoid. Es darf auf keinen Fall mit dem mittleren Erdellipsoid identifiziert werden. Die auf isostatischer Grundlage abgeleiteten Höhen des aktuellen Geoides über dem Internationalen Ellipsoid sind also nicht die gesuchten Geoidundulationen.

3. Die aus den isostatisch reduzierten Schwerewerten abgeleitete theoretische Schwereformel könnte an sich die Schwereverteilung auf dem zum Cogeoid gehörigen Niveausphäroid geben. Erforderlich ist nur, daß die aufs Geoid reduzierten Schwerewerte zuerst weiter auf das Cogeoid reduziert werden, wobei das auftretende Korrektionsglied völlig dem Term von Bruns entspricht, und daß diese Werte zur gleichzeitigen Bestimmung aller drei Koeffizienten γ_0, β und β_4 im Ausgleichswege herangezogen werden. In Wirklichkeit ist aber in der Internationalen Schwereformel der Koeffizient gemäß dem Clairautschen Theorem entsprechend der Hayfordschen Abplattung willkürlich angenommen worden und ähnlich für β_4 der für ein Niveauellipsoid gültige Wert angesetzt worden. Lediglich γ_0 wurde durch Ausgleichung abgeleitet. Es ist also nicht ganz korrekt anzunehmen, daß die Internationale Schwereformel die theoretische Schwere auf dem Internationalen Ellipsoid darstellt, weil dieses Ellipsoid sicher kein Niveauellipsoid ist.

Suchen wir daher eine vom unbekannten Regularisierungsgesetz völlig unabhängige und insoferne hypothesenfreie Lösung des gesamten Problemes der Erdfigur, so brauchen wir auch eine Schwerereduktion, die die Schwereverteilung auf dem künstlichen Geoid und den indirekten Effekt ohne Annahme einer bestimmten Massenverschiebung liefert. Dies ist durch eine Modifikation der gewöhnlichen Freiluftformel zu erreichen. Wir denken uns zu diesem Zwecke die beobachteten Schwerewerte mit dem Freiluftgradienten auf eine äußere Niveaufläche in etwa 10 km reduziert. Nach dem Satz von Stokes gibt es nun viele Anordnungen der Erdmasse, für welche unsere äußere Niveaufläche, die Schwereverteilung auf ihr sowie das Potential im ganzen Außenraum unverändert bleiben, wobei allerdings der Kreis der möglichen Massenanordnungen durch die notwendige Konstanz des Drehimpulses stark eingeschränkt ist. Darunter muß es auch solche Anordnungen geben, für die das entstehende künstliche Geoid äußere Niveaufläche wird. Geht man also mit dem Freiluftgradienten um die vorgegebene Potentialdifferenz zurück, so erhält man gleichzeitig die Schwerewerte auf diesem künstlichen Geoid, das man mit Recht als „Freiluftgeoid" bezeichnen darf, sowie den indirekten Effekt, d. h. die Abstände des Freiluftgeoides vom aktuellen Geoid. Die Fehler, die man bei der Extrapolation mit dem gewöhnlichen Freiluftgradienten bis 10 km Höhe gemacht hat, werden beim Rückgang auf den Potentialwert des aktuellen Geoides völlig aufgehoben. Die neue Reduktion, die wir deshalb als „wahre Freiluftreduktion" bezeichnen wollen, unterscheidet sich von der bisherigen lediglich durch Berücksichtigung des zugehörigen indirekten Effektes; das Freiluftgeoid, das natürlich nicht das Normalsphäroid ist, fällt auf den Meeren mit dem aktuellen Geoid zusammen und erhebt sich über den Kontinenten bis maximal 9 m.

Unterwirft man die auf das Freiluftgeoid reduzierten Schwerewerte einer Ausgleichung nach Formel (2), so erhält man die drei Koeffizienten γ_0, β und β_4 und daraus die Abplattung $\mathfrak{a}$, den Parameter δ und in weiterer Folge die Erhebungen h des Niveausphäroides über sein achsengleiches Rotationsellipsoid und schließlich die Schwerestörungen. Das Stokes'sche Integral liefert dann die Erhebungen N des Freiluftgeoides über sein Niveausphäroid. Wir haben also vier Flächen zu betrachten: das aktuelle Geoid, das Freiluftgeoid, sein Niveausphäroid und dessen achsengleiches Rotationsellipsoid. Während aber die Erhebungen N in ihrer Summe über die ganze Erde verschwinden, gilt dies nicht für die Höhen des aktuellen Geoides über dem Ellipsoid, die Geoidhöhen:



$$z = N + h - f, \qquad \ldots \quad (11)$$

deren drei Komponenten wir als „gravimetrische Höhen" bezeichnen, weil sie sämtlich aus dem Schwerefeld der Erde abgeleitet sind. Sie sind wesentlich dadurch gekennzeichnet, daß sie fast völlig unabhängig sind von einem Fehler in der angenommenen Achse der Bezugsfigur, d. h. des Niveausphäroides.

Für das Niveausphäroid und sein achsengleiches Ellipsoid kennen wir genau die Abplattung, während wir für die Achse etwa den internationalen Wert $a = 6\,378\,388$ m übernehmen, der um ca. 90—100 m zu groß sein dürfte. Ändert man jetzt, entsprechend unserer Definition des Normalsphäroides, bei festgehaltener Achse die Abplattung des Ellipsoides in $\mathfrak{a}_m = (\mathfrak{a} + d\mathfrak{a})$ derart, daß die zugehörigen Änderungen dz der Geoidhöhen diese in ihrer Summe über die ganze Erde zum Verschwinden bringen:

$$\iint (z + dz)\, do = 0, \qquad \ldots (12)$$

so ist damit, gänzlich unabhängig vom Fehler in der angenommenen Achse, auf rein gravimetrischem Wege die Abplattung $\mathfrak{a}_m$ des Erdellipsoides gewonnen. Gleichzeitig stellen die neuen Geoidhöhen $(z + dz)$ die gesuchten Undulationen des Geoides dar und es ist damit bereits erreicht, daß das mittlere Erdellipsoid dem Geoid volumgleich ist, ohne daß man zunächst seine Achse genau kennt. Dieses paradox scheinende Ergebnis ist eine natürliche Folge der gravimetrischen Höhen.

Es ist jetzt aber auch möglich, streng die Schwereverteilung auf dem Erdellipsoid anzugeben. Der Koeffizient β der theoretischen Schwere folgt aus der Abplattung vermöge des erweiterten Clairautschen Theorems. Der Koeffizient β_4 ist durch die Forderung des Niveauellipsoides vorgegeben. Schließlich kann die Äquatorschwere auf dem Erdellipsoid aus der Äquatorschwere auf dem gegebenen Niveausphäroid in Funktion von δ, $\mathfrak{a}$ und $d\mathfrak{a}$ ermittelt werden.

Als letzte Aufgabe bleibt noch die Bestimmung der großen Achse des Erdellipsoides. Hiezu denken wir uns ein kontinentales Netz nach Pizzetti auf ein Referenzellipsoid projiziert, das die Hayfordsche Achse, jedoch die bereits bestimmte Abplattung des Erdellipsoides besitzt. Dieses Netz zerlegt man in einzelne Gradfelder und bestimmt für den Schwerpunkt der astronomischen Stationen jedes Gradfeldes aus den vorhandenen kontinentalen Geoidundulationen die repräsentative absolute Lotabweichung, welchen Sollwerten man den jeweiligen Mittelwert der gegebenen relativen Lotabweichungen als Istwert gegenüberstellt. Dann kann nach dem Prinzip der Lotabweichungsausgleichung die Verbesserung der Achse gleichzeitig mit der absoluten Lage des Netzes bestimmt werden. Diese „absolute Lotabweichungsausgleichung“ unterscheidet sich von der üblichen Lotabweichungsausgleichung wesentlich dadurch, daß hier die Minimumforderung in einer möglichst weitgehenden Anpassung der relativen an die absoluten Lotabweichungen besteht, mithin für zufällige Fehler und nicht wie bei der Minimumforderung für die restlichen Lotabweichungen für physikalische Größen gilt. Sowohl hieraus, wie aus dem Umstand, daß sich die Undulationen nicht mehr ändern, erkennt man den prinzipiellen Unterschied gegenüber dem Prinzip des bestanschließenden Ellipsoides. Das Verfahren liefert aber gleichzeitig das naturtreue Netz. Wendet man es auf zwei kontinentale Netze an, so erhält man aus der absoluten Lage die geodätische Verbindung zweier durch einen Ozean getrennter Kontinente mit einer durch keine andere Methode zu überbietenden Genauigkeit auf die einfachste und exakteste Weise. Der erste im Jahre 1950 durchgeführte Versuch einer absoluten Lotabweichungsausgleichung lieferte getrennt für Europa und Amerika:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Europa:} & a = & 6\,378\,286 \pm 53 \text{ m} \\ \text{Amerika} & & 6\,378\,282 \pm 44 \text{ m} \\ \text{Mittel} & & 6\,378\,284 \pm 34 \text{ m}\,. \end{array}\right\} \qquad \ldots (13)$$

Die relative Lage der beiden Fundamentalpunkte von Europa und Amerika ergab sich in ostwestlicher Richtung mit einem mittleren Fehler von nur 11 m oder 13.10^{-7}, eine Genauigkeit, die durch eine Verbindungstriangulation etwa über eine Inselbrücke nie erreicht werden könnte.

Damit wäre das Problem der Erdfigur vollständig gelöst. Diese fast völlig hypothesenfreie Lösung ist übrigens seltsam genug. Man sollte eigentlich meinen, daß man das Erdellipsoid kennen muß, ehe man das Geoid gegenüber dieser einheitlichen Bezugsfläche festlegen kann. In Wahrheit aber kehren sich die beiden Teilaufgaben, die Bestimmung des Erdellipsoides und die Bestimmung der Geoidundulationen, fast gänzlich um. Es müssen die Geoidhöhen gegenüber einem streng physikalisch definierten Ellipsoid bekannt sein, ehe aus den gravimetrischen Höhen die Abplattung des Erdellipsoides abgeleitet werden kann, und es müssen überhaupt die Undulationen des Geoides vorliegen, ehe die Achse des Erdellipsoides bestimmt werden kann.

Eine weitere Herleitung des Theorems von Clairaut

Von Karl Hubeny, Graz

Dem Sinussatz der sphärischen Trigonometrie entspricht auf beliebigen Drehflächen bekanntlich die Bedingung $p \,.\, \sin \Theta = k$, welche als das Theorem von Clairaut bezeichnet wird.

Dieser Satz besagt, daß entlang jeder geodätischen Kurve einer Drehfläche in allen Punkten das Produkt aus dem Parallelkreishalbmesser und dem Sinus des zwischen der Kurve und dem Meridian eingeschlossenen Winkels, d. h. des Azimuts, konstant ist. Der Beweis dieses Satzes [1] ist einfach zu führen. Ich möchte nun nachstehend eine Entwicklung desselben aus der Gauß'schen totalen Differentialgleichung der geodätischen Kurven mitteilen, die deswegen von einigem Interesse sein dürfte, weil die genannte Form der Differentialgleichung der geodätischen Kurve bei den meisten grundlegenden geodätischen Entwicklungen eine wichtige Rolle spielt und damit eine gewisse Einheitlichkeit der Darstellung möglich ist.

In der xz-Ebene eines räumlichen cartesischen Koordinatensystems sei eine Kurve in der Parameterdarstellung

$$x = p\ (u), \quad z = q\ (u) \qquad \ldots \quad (1)$$

gegeben. Rotiert diese Kurve um die z-Achse, so hat man in

$$x = p\ (u) \cos v,\ y = p\ (u) \sin v,\ z = q\ (u) \qquad \ldots \quad (2)$$

eine Parameterdarstellung der entstandenen Drehfläche vor sich. In dieser bedeutet u einen beliebigen Parameter, während der Parameter v der zwischen der xz-Ebene und der Kurvenebene bestehende Verdrehungswinkel ist.

Der Radius p eines Parallelkreises ist nach (1) $p\ (u)$; die Fundamentalgrößen erster Ordnung ergeben sich mit (die Akzente zeigen Ableitungen nach u an)

$$\begin{aligned} E &= (p'\,(u))^2 + (q'\,(u))^2 \\ F &= 0 \\ G &= (p\,(u))^2 = p^2. \end{aligned} \qquad \ldots \quad (3)$$